PROJECT AKARI

AKARI

知乎 @ 余命数（水无月零）

中学数学之旅

第一卷·基础语言

Volume I · LANGUAGE

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

公开版 · 10 月 5 日

Project Akari

余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

中学数学之旅

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

rikka.moe

知乎@余命数

余命数 (Midnight Forever)
知乎 @ 余命数
https://rikka.moe

知乎@余命数

中学数学之旅
An Excursion through Secondary School Mathematics
最后更新：October 7, 2026

知乎@余命数

© 2026 余命数
保留所有权利. 书稿版本，禁止修改、倒卖等任何侵犯作者著作权的行为.

知乎@余命数

知乎@余命数

书稿声明

Draft Notice

本书目前为**书稿状态**，意味着：

- 内容尚未完整，部分章节可能缺失或正在编写中
- 文中可能存在笔误、排版错误或数学推导疏漏
- 章节结构与内容安排可能在后续版本中调整
- 习题答案与索引等附录内容可能尚未完善

若您在阅读过程中发现任何错误或有改进建议，
欢迎通过以下方式联系作者：

个人网站：https://rikka.moe

电子邮箱：me@rikka.moe

书籍主页：https://rikka.moe/books

当前版本：Draft October 7, 2026

知乎@余命数

献词

Dedication

谨以此书

献给 Amate Yuzuriha

愿你如星辉长明，照亮每一段未竟的旅途

每一个未曾舞蹈的日子
都是对生命的一种辜负

„Und verloren sei uns der Tag,
wo nicht ein Mal getanzt wurde!”

— 弗里德里希·尼采
Friedrich Nietzsche

— 2026 —

知乎@余命数

关于作者

余命数



Project Akari ·Midnight Forever

2025 届广西新高考二卷考生, 政史地组合, 数学 139 分.

这套书整理自我中学阶段学习数学时的笔记与讲义. 我按一条理想的阅读骨架把代数、离散与随机、几何、分析、线性结构依次铺开, 每条结论都给出推导路径, 把概念彼此生长的过程摊开在纸面上. 愿它陪你走完一段中学数学的旅程.

书籍主页

https://rikka.moe/books

更多信息、勘误表、联系方式等均可在此查看

交流与联系

在线平台

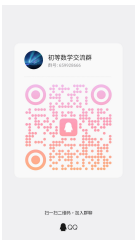
个人主页	`https://rikka.moe`
书籍主页	`https://rikka.moe/books`
知乎	@ 余命数
爱发电	`https://afdian.com/a/writeamathbook`

即时通讯

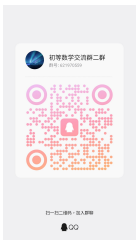
QQ	`2454167821`
交流群	`659928666`
邮箱	`me@rikka.moe`



扫码添加好友



交流群一



交流群二



爱发电赞助

知乎@余命数

欢迎通过以上方式与我交流讨论

知乎@余命数

前言

如果你基于本书制作修改版 PDF, 请保留这里的前言与声明, 谢谢. 想了解更多, 请访问我的主页https://rikka.moe

推动我写这套书的最主要动因是贫穷. 我高中就读于一所普通的省重点, 家里没钱给我补习, 能找到的老师水平也一般.

好在我有一台能联网的手机和一颗热爱学习的心, 于是便用互联网找学习资源, 听网课、看电子书.

这个过程里我攒下大量笔记, 大多记在 Obsidian 上. 高考结束后的 2025 年暑假, 我把这些笔记整理成册, 发到几个群里反响不错, 于是继续写了下去.

我也希望这本书能集百家之长. 市面上的资料和教辅很多, 我想读一本成体系、又贴合自己阅读习惯的书, 于是干脆自己动手写, 权当半个教科书.

这本书花了我不少时间. 如果你觉得有帮助, 欢迎去爱发电https://afdian.com/a/writeamathbook支持一下, 请我吃一碗拼好饭也可以. 书中的疑问或错误, 欢迎随时联系, 邮件 me@rikka.moe、QQ2454167821, 或加入 QQ 群 659928666.

知乎@余命数

吊诡的是, 我觉得教辅太贵, 所以都看电子版.

Obsidian 是一款很好用的笔记软件, 用好了可以打造属于自己的知识库.

关于联系与提问

本人经常在外打工兼职或忙别的事, QQ 私聊不一定看得到, 重要的事情请发知乎私信. 已经写清楚的问题我一般不再重复, 比如分卷本与合订本的区别、各版本之间的区别.

学习方法我也说不出什么有用的. 你观察过学得好的同学就会发现, 无论被谁请上台分享经验, 大多只能说些政治正确的话, 扎实基础、回归课本、多跟老师. 这怪不得他们, 真正掌握一项技能后, 就很难想象不懂它是什么感觉, 一项已经内化的能力, 很难再拆开讲给你听.

即便方法就是“极度的自律、极高的抗挫折能力、成百上千小时的枯燥重复”, 即便有些人同时有智商与基因、家庭托底和超强的专注力与抗挫折力, 学习也没有廉价速成的魔法. 每次有人问我, 我也只能给出和所有人一样的回答, 巩固基础、回归课本、多跟老师、总结错题.

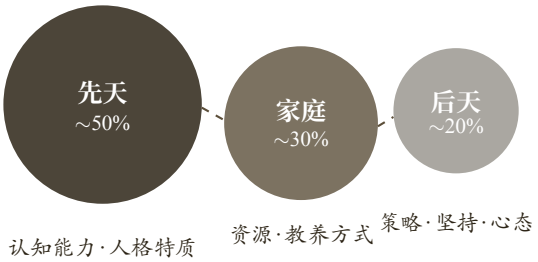
用卖课的人的话说, 就是欢迎多多支持我的项目和电子书. 所以这方面的问题, 就不必再问了.

不过, 考虑到还是有人想知道学习方法. 很好, 下面从比较科学的角度出发, 拒绝政治正确和哔哩哔哩经典学长或学姐分享学习方法的套话, 来说说好的学习方法.

学习成绩的好坏可以认为取决于三大类因素: 先天禀赋、家庭条件和后天努力. 下图用圆的大小表示各自的影响占比, 圆越大代表该因素对成绩差异的解释份额越多.

占比数据综合自 Silventoinen et al. (2020) 在 Scientific Reports 上发表的 28 国双胞胎整合分析(遗传力约 40%–70%, 共享环境约 20%–40%)与 de Zeeuw et al. (2015) 的荷兰双胞胎元分析; 本文取中位数附近的近似值.

知乎@余命数



知乎@余命数

图中三个圆分别代表：

- **先天**，约占一半：认知加工速度、工作记忆容量等人脑硬件参数，以及尽责性、抗压性等人格倾向. 这部分相对稳定，但并非锁死. 早期营养、睡眠和运动会影响其发挥. 有些人的确在某些方面的所谓的感觉更好，又或者说，假如你在婴幼儿时期，甚至还没出生的时候，就接受到了一些对神经系统不太好的物质，这都是实打实的.
- **家庭**，约占三成：家里的藏书量、父母的词汇量和教育期望、能否提供安静的学习环境与课外资源. 家庭条件好在早期尤为关键，随着年级升高其权重逐渐下降. 这里也比较显然，如果家庭是那种书香家庭，父母都是文化人，或者都是中产阶级甚至是富人阶级，请得起清华北大的私教一对一，买学区房、上重高等等，获取好的成绩的概率更大、更轻松. 如果家庭是那种一天到晚都在吵架、家庭暴力、父母没文化而且也不怎么有钱（遗憾的是编者的家庭都是如此，因此我付出了很大的努力），很大概率最后都是成绩一般甚至很差，成为混混或其他.
- **后天**，约占两成：学习方法是否科学、能不能坚持、面对难题时的心态. 虽然占比最小，却是个人最能把控的部分，也是拉开同等条件下人与人差距的主战场. 这也就是唯一可以努力的地方，除非你是家长，否则对于学生，也就是我们而言，只有此路！

虚线表示三类因素之间存在交互，即先天禀赋需要在合适的家庭环境中才能充分发挥，而后天努力的效率又受限于先天的认知基础和家庭提供的资源.

把可控因素提炼出来，成绩的近似模型可以写成：

$$\text{成绩} \approx \underbrace{(\text{认知基础} + \text{尽责性})}_{\text{较稳定}} \times \underbrace{(\text{科学策略} + \text{自我调节})}_{\text{高度可控}} + \underbrace{\text{家庭支持} + \text{教学质量}}_{\text{环境系数}} \tag{0-1}$$

说说，公式里用的是乘法和加法，含义各有侧重.“较稳定”部分与“高度可控”部分之间是乘号，即便先天基础只有六七分，只要方法和自律跟上，乘积依然可观；反过来基础再好，方法为零则乘积也为零. 加在最外面的“环境系数”是加分项，好的家庭和老师能把整体水平往上抬一截，但它们替代不了主体部分的乘积.

Poropat (2009) 的元分析，样本逾七万人，显示尽责性是大五人格中对学业成绩最强的非智力预测因子，其对大学成绩的预测效力与智力相当.

ACE 模型源自行为遗传学经典范式：A 为加性遗传，C 为共享环境，E 为非共享环境.Lee et al. (2018) 在 Nature Genetics 上发表了百万级样本的 GWAS，其多基因评分解释受教育年限约 11%–13% 的变异.

Hart & Risley (1995) 在 Meaningful Differences 中跟踪观测了 42 户家庭三年，发现专业人员家庭幼儿在三岁前累计听到约 3000 万词，领取福利金的家庭约 1000 万词，“三千万词鸿沟”由此得名；后续研究对其取样和方法有争议，但方向一致.

Duckworth & Seligman (2005) 在 Psychological Science 上对八年级生的纵向研究中发现，自控力对期末成绩的方差解释量约为 IQ 的两倍有余.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

“科学策略”指的是有实证支撑的学习技术. 合上书本逼自己回忆的主动检索, 以及在快要忘记时复习的间隔重复, 其效果远大于被动重读和划重点.“自我调节”涵盖制定计划、监控进度和在出错时及时纠正方向的能力.

先天和家庭设定了起跑线和跑道状况, 后天的高质量努力决定你能在这条道上跑多远.

所以, 动用你聪明的小脑袋瓜, 评估自身的情况, 决定从何入手, 别去问别人的学习方法. 你首先是你自己的, 如果你自己都不知道自己要做什么, 就不要偷懒问别人了.Like WTF, 如果你是个普通家庭, 你去问一个有钱人出身的竞赛背景的学霸, 问学习方法, 这本身就荒谬.

当然, 还有一个很好的学习习惯, 那就是去爱发电支持作者:), 推出更多的学习资源, 助你一臂之力.

Dunlosky et al. (2013) 在 Psychological Science in the Public Interest 上评定了十种常用学习技术, practice testing 与 distributed practice 获评高效用, rereading 与 highlighting 获评低效用.

知乎@余命数

如何获取无水印版

本书的基础版本， 含水印免费开放， 任何人都可以在我的主页`https://rikka.moe/books`下载. 如果你想获取无水印版, 可以在爱发电上支持本项目:

1. 打开爱发电页面:`https://afdian.com/a/writeamathbook`
2. 选择对应的赞助档位(通常会标注“无水印版”或“完整版”), 完成赞助
3. 赞助后在爱发电的消息里会收到无水印版 PDF 的下载链接; 如果没有收到, 请发邮件或在知乎私信告诉我你的爱发电昵称

无水印版与免费下载版的**内容完全一致**, 差别只在水印. 你不花钱也能读到一模一样的数学内容;付费只是为了去掉水印、支持项目运转.

既然可以免费下到, 为什么要花钱买?

我一直用中世纪或文艺复兴时期王公贵族资助艺术家来比喻这种捐赠的模式, 或者更恰当的, 是 18-19 世纪文人的集资预订, 又或者是数字公共品理论。

许多高中生(包括我)因为高中的时候穷, 没钱, 所以喜欢白漂电子书资料。毕竟在我那时候, 任何没有 DRM(数字版权管理技术)的电子书都能被随意复制粘贴和传播, 盗版网课也有很多。很多时候不是不想支持正版, 而是没钱。与其到处找资源, 不如加成千上万个资料群, 去点那些夸克网盘(天下没有免费的午餐, 夸克网盘对分享资料的人也是有利可图的), 下一堆资料。虽然下了或者存了以后, 可能没有时间看或者基本不看, 但至少满足了收集欲, 以及一种“我在学习”的感觉。

但是, 与其在网盘里存 500G 的名师网课和状元笔记, 或者花重金买各种名师的网课和资料, 不如把钱留给真正对你有用的东西。如果你觉得 “这本书确实对我有用”、写得好, 或者在其他方面给你带来了价值, 不妨去我的爱发电`https://afdian.com/a/writeamathbook`花 10～30 块来支持我, 并获得无水印版。

其实 10 块钱，吃一次拼好饭差不多就花完了。所以我想了一句广告语：用一次拼好饭的钱，来支持下一位创作者。即使实际上你可以白漂（毕竟这是公共品，一个人的占用不会导致另一个人占用的减少），但你的支持，能让互联网上的创作者感到生活更加美好。

更重要的是，你今天怎么对待创作者，就是你希望将来别人怎么对待你。总有一天，你也会在网上创作：可能是一篇文章，一门课。到那时你会明白，被人认可的感觉有多重要，哪怕对方只付了一次拼好饭的钱。

公共品之所以能一直存在，是因为总有一些人，在可以不付钱的时候，仍然愿意为自己认可的东西付一点点。创作者因此能继续创作，受众也因此能继续读到好东西，这才是真正的双赢。而你今天的这一点点，就是在把这个循环往下传。

知乎 知乎@余命数

试用 Akari Web 平台

知乎@余命数

除了纸质书之外，Project Akari 还在做一套在线学习工具，即 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）.

Project Akari 是一项旨在结合人工智能教育、教育数据挖掘、学习分析，并基于认知心理学的研究成果，搭建一款旨在帮助学生高效地学习数学和计算机科学方面知识的智能辅导系统，或称为学习引擎.

余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

因此，我们的目的就是，尽可能量化学生的知识状态，并结合算法，智能评价和判断学生目前的学习状态，辅助其真正习得和掌握一样东西.

我们的哲学是，让用户用效率最高的方式学到知识，为此我们开发了一整套配合的算法，并在课程等设计上尝试最小化认知负担，采取更互动的方式以激发主动性. 量化学习的一切，并且优化，便是一切的出发点和落脚点.

知乎@余命数

这本书写给谁

知乎@余命数

本书的目标读者有三类：

- **在校高中生**：跟着课堂教学同步使用，课上没听懂的章节回来对着书再看一遍推导. 标题带 $*$ 的选读内容可以先跳过，等基础扎实了再回头啃.
- **复读生或自学备考者**：按目录顺序系统过一遍，重点关注每节的例题和章末习题. 如果你的时间紧张，优先读函数、三角、数列和解三角形四章，即高考分值密集的区域.
- **想重温数学的成年人**：你可能忘了大半高中内容但又不想从初中补起. 挑感兴趣的章节直接读就好，遇到前置知识不清楚的地方顺着交叉引用回去翻.

不管你是哪种读者，建议的做法都一样，先看正文搞懂逻辑链，再做例题（盖上解答自己想），最后做章末习题检验. 光看不练等于白看.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

本书的结构

各卷可独立阅读，也可合订通读. 分卷本在文前附有本卷的分册前言与本卷导读；合订本在每卷分隔页之后给出本卷导读，便于按卷回看. 标题中带 * 的章节多为选读或拓展，初读时可略，需要时再补.

关于版本与系列

本书目前仍是书稿，个别地方尚未完整，可能存在笔误或疏漏，若发现错误或有建议，欢迎联系作者. 本版本是 2026 年按学习路径重排的重要更新，调整了五卷章序，把数列章尾的分析内容并入极限与导数，把平面向量提到解三角形之前.

本书属于 Project Akari 系列.Akari 取自日文“あかり”，意为光，寓意是让好的学习材料更容易被找到、更容易被用起来.

Project Akari 的另一部书稿《函数与导数》将函数、极限与导数相关内容单独成书，系统展开. 两本书可以独立阅读，也可以互相参照. 配套的 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）提供笔记、记忆卡片和在线练习，与书稿配合使用.

本系列的基础版本免费开放，完整版本以极低价格提供. 知识不应该是奢侈品，这是我做这件事的底线.

从写作、排版到软件开发，Project Akari 的每一步都是我一个人完成的. 服务器和运营成本靠书的销售收入以及我个人的工作收入来覆盖. 这个项目既是学习方法的实践，也是工程能力的验证.

发现错误怎么办

一个人的精力和眼力终究有限，书里难免有笔误、推导疏漏乃至概念性错误. 如果你发现了，请按以下方式反馈，我能更快地定位和修正：

1. 说明在哪一卷、哪一章、哪一节，或直接给页码和小标题
2. 引用书中的原文或公式编号
3. 写出你认为正确的版本或质疑的理由

最快的渠道是知乎私信 `https://www.zhihu.com/people/yushumi-shu`，其次是邮件 `me@rikka.moe`. 有价值纠错的读者名字会列入后续版本的鸣谢名单.

致谢

这本书能走到今天，离不开很多人的帮助.

首先要感谢每一位读过草稿、提出意见的同学和朋友. 你们在群里随手指出的一道错题、一处不通顺的表达，聚沙成塔地把这本书往前推了一步.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

感谢爱发电上的赞助者们. 你们的每一笔支持都实实在在地变成了服务器费用和我碗里的拼好饭, 让我能在打工之余腾出手来继续写.

感谢家人容忍我把无数个周末和假期耗在了电脑屏幕前. 虽然你们不完全理解我在做什么, 但从没拦过我.

最后感谢你, 正在读这段字的陌生人. 一本书的价值在被翻开的那一刻才算兑现.

版权与授权

本系列的基础版本依据**知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际协议**(CC BY-NC-ND 4.0) 开放给个人学习者免费使用. 完整版本以极低价格提供, 销售收入用于覆盖服务器与运营成本. 商业使用、机构采购或翻译授权请联系作者.

防盗版与使用声明

本书为 Project Akari 系列出版物. 本 PDF 仅供合法获取者个人学习使用, 禁止以下行为:

- 将本 PDF 或其任何部分上传至任何公开网络平台、网盘、论坛或即时通讯群组;
- 对本 PDF 进行二次售卖、捆绑销售或用于任何商业用途(已获作者书面授权者除外);
- 将本书内容用作机器学习或人工智能训练语料;
- 移除、涂改或遮盖本书的水印、版权信息、读者指纹或页脚标识;
- 修改 PDF 元数据后以原书名、作者名重新分发.

如发现盗版或侵权行为, 欢迎通过以下渠道举报:

- 书籍主页:https://rikka.moe/books
- 邮箱:me@rikka.moe

版本指纹(用于溯源与正版核验):

读者标识 DRAFT-REVIEW

文档哈希 DRAFT-REVIEW

编译日期 October 7, 2026

关于修改与再分发的声明

本书由作者独自维护并发布, 是本项目唯一的**权威正版来源**. 任何对本 PDF 或其源文件的内容、水印、版权信息、读者指纹、PDF 元数据的删改、涂改或遮盖, 均视为对本声明与著作权法的违反.

修改后的版本**不得**保留以下任一标识并以任何形式分发, 否则视为侵权:

- 书名《中学数学之旅》及 Project Akari 系列名称;
- 作者署名"余命数"及相关社交账号;
- 版权页、前言中任何声明性文字;
- 页脚隐性指纹与页面水印.

欢迎读者基于本书内容做学习笔记与摘录，但请在分发时注明来源与原作者. 如需做系统性改编，如翻译、缩写、教材化使用，请先联系作者取得书面授权.

正版核验与联系方式见版权页，或访问 https://rikka.moe/books.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

分册前言

写第一卷时，我反复想起高中刚接触映射概念时的困惑. 代数变形算得快和说清两个对象之间的对应关系是两件事. 本卷就从可操作的代数变形出发，逐步搭出抽象语言，再回到函数与不等式的整体性质.

预备知识整理因式分解、乘法公式、恒等变形、二次函数与若干数论工具，作为后续计算的公共底座. 集合与映射把对象与对应这两个概念说清楚，并引入逻辑用语初步，使后文对函数、证明与定义的表述有统一语言. 函数一章是本卷重心：定义域与基本性质、复合与反函数、图像变换，再到多项式、指数、幂、对数等初等函数，最后处理零点、值域与解析式求解. 函数方程与抽象函数把条件从已知表达式换成已知关系. 不等式则是函数性质的直接应用.

逻辑量词这一节曾让我在最早一版笔记里绕了很久，后来才明白它就是连接命题与证明的那条线.

函数与不等式中偶尔用到导数、介值、中值定理等分析语言，相应位置都注明了出处在第四卷. 基础轨读者可先按定义法与图像理解，完整轨读者学完第四卷后回看这些旁注.

读完本卷，应在代数变形、对应语言与函数整体性质之间自如切换，并为第二卷的周期现象、离散过程与随机性做好准备.

本书为书稿状态，内容尚不完善，可能存在笔误或疏漏. 如有问题或建议，欢迎联系作者 `https://rikka.moe`，或发送邮件至 `me@rikka.moe`.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

本卷导读

本卷线索

第一卷的主线是：**从可操作的代数变形，走到可陈述的对应语言，再落到可分析的函数与不等式.** 具体技巧服务于结构；结构又反过来解释技巧为何有效.

章节地图

▷ **预备知识** 整理因式分解、乘法公式、恒等变形、二次函数与若干数论事实，是后续各章随时调用的工具基础.

▷ **集合与映射** 用集合描述对象，用映射描述对应，并初步引入命题与量词. 函数的概念由此获得精确的表述.

▷ **函数** 本卷重心. 先建立定义域、单调性、奇偶性、周期性等性质，再讨论复合、反函数与图像变换，然后进入常见类型与综合问题. 全章论证从定义与图像出发.

▷ **函数方程与抽象函数** 在表达式未知、关系已知的设定下训练赋值与结构假设，把函数章建立的性质用作推理的支点.

▷ **不等式** 以均值不等式为主线，辅以柯西、排序等工具，并展开放缩与构造等思想. 切线法与凸性观点把函数图像的几何直觉化为估计手段.

向后展望

第二卷将把函数语言用于周期现象（三角函数）与离散对象，后者即数列初等部分，并经计数进入统计与概率. 第一卷建立的单调性、图像与不等式估计，会在那里反复出现.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

目录

关于作者 i

前言 iii

分册前言 xi

本卷导读·第一卷 xiii

第一章 预备知识 2

1.1 因式分解 . . . 2
1.2 乘法公式与因式分解 . . . 7
1.3 恒等变形的方法 . . . 20
1.4 二次函数 . . . 31
1.5 计算与变形技巧 . . . 37
1.6 数论进阶 . . . 50

第二章 集合与映射 58

2.1 集合论初步 . . . 58
2.2 映射 . . . 74
2.3 逻辑用语初步 . . . 76
2.4 势与对角线法 * . . . 79

第三章 函数 84

3.1 函数的概念 . . . 84
3.2 定义域 . . . 86
3.3 单调性 . . . 88
3.4 奇偶性 . . . 92
3.5 周期性 . . . 107
3.6 凹凸性 . . . 115
3.7 反函数 . . . 123
3.8 函数的复合 . . . 127
3.9 函数的图像变换 . . . 131
3.10 常见多项式函数 . . . 135
3.11 指数函数 . . . 147
3.12 幂函数 . . . 156
3.13 对数函数 . . . 158

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

3.14 函数模型与应用 . . . 166
3.15 函数的零点(一) . . . 169
3.16 分段函数 . . . 175
3.17 绝对值函数 . . . 190
3.18 函数解析式的求解 . . . 196
3.19 函数值域的求解 . . . 205
3.20 多项式理论 . . . 209
3.21 三次与四次方程 . . . 216

第四章 函数方程与抽象函数 224
4.1 基本分析方法 . . . 224
4.2 从基本初等函数到函数方程 . . . 226
4.3 二次及高次多项式模型 . . . 227
4.4 三角与双曲函数模型 . . . 230
4.5 柯西方程的正则解 . . . 233
4.6 Jensen 方程与 Pexider 方程 . . . 236
4.7 迭代函数方程 . . . 239
4.8 嵌套根式与函数方程 . . . 242
4.9 解题策略小结 . . . 245

第五章 不等式 250
5.1 均值不等式 . . . 250
5.2 均值不等式的提示 . . . 254
5.3 均值不等式链 . . . 257
5.4 均值不等式的应用技巧 . . . 259
5.5 柯西不等式 . . . 263
5.6 排序不等式 . . . 274
5.7 伯努利不等式 . . . 276
5.8 糖水不等式 . . . 279
5.9 放缩思想 . . . 286
5.10 局部化与孤立思想 . . . 291
5.11 构造思想 . . . 295
5.12 齐次化与规范化 . . . 299
5.13 代数代换思想 . . . 305
5.14 排序与调整思想 . . . 309
5.15 凸性思想 . . . 313
5.16 进阶不等式 . . . 316
5.17 切比雪夫与 Schur 不等式 . . . 319
习题 . . . 323

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

习题解答 **327**
第 1 章预备知识 327

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

第 1 章

预备知识

基础语言

「几何无王者之路。」

——欧几里得

第一章 预备知识

1.1 因式分解

因式分解把多项式写成若干整式的乘积, 我们用它分析代数结构、求解方程、简化运算. 多元多项式的因式分解常常依靠式子本身的结构, 如对称性、轮换性、齐次性.

1.1.1 特殊代数式

我们讨论三类多项式, 即对称式、轮换式与齐次式. 整理复杂多项式、降元与因式分解时经常遇到它们.

1.1.2 定义与基本性质

在给出形式定义之前, 我们先定义一个贯穿本节的概念, 即**置换**. 对称式与轮换式都要用它来描述.

1.1.2.1 置换

设有三个位置, 分别摆放着变量 x_1, x_2, x_3. 我们把它们重新摆放, 比如变成 x_2, x_3, x_1. 这一过程称为一个**置换**, 记作

$$\sigma: \quad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_2, x_3, x_1).$$

此时第 1 个位置改放 x_2, 第 2 个位置改放 x_3, 第 3 个位置改放 x_1. 下图的箭头标明了每个变量在新排列中落到的位置.

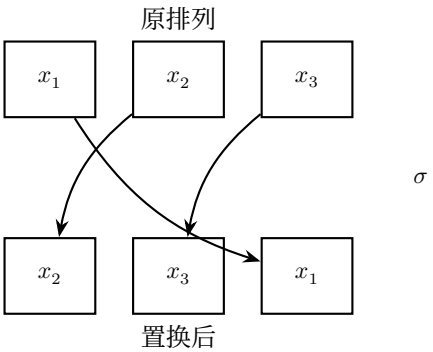


图 1.1 三元置换 σ 中变量位置的循环挪动

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

只交换两个变量而其余位置不动的置换, 称为**对换**, 记作 τ_{ij}. 每个置换都可由若干次对换拼成. 例如上图中的 σ 可由两次对换实现, 先交换 x_1, x_2, 再交换(此时的)x_1, x_3. 下图展示最简单的对换 τ_{12}.

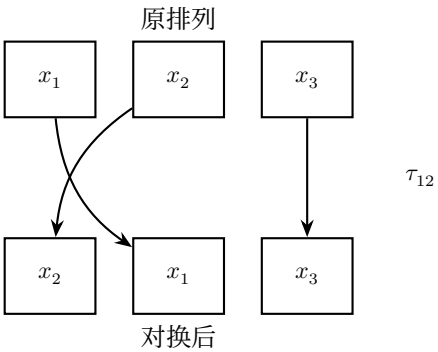


图 1.2　对换 τ_{12} 中 x_1 与 x_2 互换, x_3 不动

我们把 n 个变量的全部置换汇集起来, 称之为 n **次对称群** S_n. 它共有 $n!$ 个元素, 三个变量时有 $3! = 6$ 种不同排法. 恒等排列, 即什么都不换的那个排列, 也是其中之一.

$n!$ 读作"n 的阶乘", 即 $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, 见第二卷第 9.2 节.

有了以上直观, 我们给出对称式的定义. 对称式是在任意置换下都不改变的多项式. 由于每个置换都能由对换拼成, 检验对称性时逐一检查对换就够了.

定义 1.1 (对称式) 设 $P(x_1, \dots, x_n)$ 为 n 元多项式. 若对任意置换 $\sigma \in S_n$, 都有

$$P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \equiv P(x_1, \dots, x_n),$$

则称 P 为关于 $x_1, \dots, x_n$ 的**对称式**.

"群"是代数术语, 指一个配备了运算的集合, 运算满足四条性质: 封闭性、结合律、存在单位元、每个元素有逆元. S_n 以置换的复合为运算, 记作 $\circ$, $\tau \circ \sigma$ 表示先做 σ 再做 τ, 逐一满足: 两置换复合仍是置换, 复合满足结合律, 恒等排列是单位元, 每个置换 σ 都有逆置换 σ^{-1}, 上标 -1 标记逆置换.

例题 1.1
- $P(x, y) = x^2 + y^2$ 在交换 x, y 后不变, 为对称式.
- $P(x, y, z) = xyz + x + y + z$ 在任意交换 x, y, z 后不变, 为三元对称式.
- $P(x, y) = x - y$ 在交换 x, y 后变为 $y - x = -(x - y)$, 故非对称式.

注 1.1 (基本性质)
设 P, Q 均为关于 $x_1, \dots, x_n$ 的对称式.
- 和与积仍为对称式, 即 $P \pm Q$ 与 PQ 皆为对称式.
- 代入保持对称性, 即 f 为一元多项式时, $f(P)$ 仍为对称式.

知乎@余命数

- 若 $P=AB$, 则对每个置换 σ 有

$$P(x_\sigma)=A(x_\sigma)B(x_\sigma)=P(x),$$

因此两个因式在置换下满足 $A(x_\sigma)/A(x)=B(x)/B(x_\sigma)$(作为有理函数相等). 例如 $P=x_1x_2x_3$ 时取 $A=x_1$、$B=x_2x_3$, 两个因式都不是对称式, 乘积却是对称式.

知乎@余命数

注 1.2 (基本对称式与表示)
对 n 元变量 $x_1,\dots,x_n$, 记

$$e_1=x_1+\cdots+x_n,\quad e_2=\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j,\quad \dots,\quad e_n=x_1x_2\cdots x_n,$$

($\sum$ 读作对……求和. 例如 $\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$ 表示所有满足 $1\le i<j\le n$ 的乘积 x_ix_j 相加. 三元时即 $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$. 系统记号见第二卷第 7.2 节.)称为**基本对称式**. 任一关于 $x_1,\dots,x_n$ 的对称多项式, 都可以表示为 $e_1,\dots,e_n$ 的多项式. 例如在两元情形,

任一对称式$P(x,y)$ 都可写成$P(x,y)=F(x+y,xy)$,

其中 F 为某一元或二元多项式.

例题 1.2
- $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, 为 e_1,e_2 的多项式.
- $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.

知乎@余命数

注 1.3 (对称性与因式)
在两元情形, 若 $P(x,y)$ 为对称式且含有因式 $(x-y)$, 则 $(x-y)$ 的次数为偶数. 原因是对换 x,y 时 $(x-y)$ 变号, 而 P 不变, 故 $(x-y)$ 的总次方必须为偶数, 例如 $(x-y)^2,(x-y)^4$ 等.

定义 1.2 (轮换式) 设 $P(x_1,\dots,x_n)$ 为 n 元多项式. 若在轮换

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto(x_2,x_3,\dots,x_n,x_1)$$

下恒有

$$P(x_2,x_3,\dots,x_n,x_1)\equiv P(x_1,\dots,x_n),$$

则称 P 为关于 $x_1,\dots,x_n$ 的**轮换式**.

知乎@余命数

例题 1.3　以 a,b,c 的轮换 $a\to b\to c\to a$ 为例.

- $a^2b+b^2c+c^2a$ 在轮换下不变, 为轮换式; 在交换 a,b 时变式, 故非对称式.
- $(a-b)(b-c)(c-a)$ 在轮换下仅作因子重排, 乘积不变, 为轮换式.

注 1.4 (与对称式的关系及封闭性)

- 任一对称式在任意置换下不变, 因而在轮换下亦不变; 对称式必为轮换式, 反之不然.
- 若 P,Q 为轮换式, 则 $P\pm Q$ 与 PQ 仍为轮换式.

注 1.5 (因式传递性)
设 $P(a,b,c)$ 为关于 a,b,c 的轮换式.

- 若 P 含有因式 $(a-b)$, 则在轮换 $a\to b\to c\to a$ 下, P 也含 $(b-c)$ 与 $(c-a)$.
- 类似地, 若 P 含有因式 (a^2-b^2), 则含有 (b^2-c^2) 与 (c^2-a^2) 等.

这类因式成轮换族, 可一并提取.

定义 1.3 (齐次式) 设 $P(x_1,\dots,x_n)$ 为多项式. 若 P 中每一项的总次数均为同一整数 d, 则称 P 为 d **次齐次式**.

例题 1.4
- $2x^2+3xy-y^2$ 各项为 2 次, 为二次齐次式.
- $a^3+b^3+c^3-3abc$ 各项为 3 次, 为三次齐次式.
- x^2+y 各项次数不等, 非齐次式.

引理 1.1 (齐次性的等价刻画) 设 P 为非零多项式. 则 P 为 d 次齐次式, 当且仅当对任意数 t, 有

$$P(tx_1,\dots,tx_n)=t^dP(x_1,\dots,x_n).$$

证明 若 P 为 d 次齐次式, 则每一项形如 $c\,x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$, 且 $k_1+\cdots+k_n=d$. 代入 tx_i 后, 每项变为

$$c\,t^{k_1+\cdots+k_n}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}=t^d\cdot c\,x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n},$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

从而整体为 $t^d P(x_1,\dots,x_n)$.

反过来, 将 P 按总次数分解为若干齐次部分之和

$$P = P_m + P_{m+1} + \cdots + P_M,$$

其中非零的 P_k 是 k 次齐次部分. 代入 tx_i 后得到

$$P(tx_1,\dots,tx_n) = \sum_{k=m}^{M} t^k P_k(x_1,\dots,x_n).$$

若它恒等于 $t^d P(x_1,\dots,x_n)$, 则比较关于 t 的各次幂系数可知, 除 $k=d$ 外所有 P_k 均为零. 因此所有非零项的总次数都等于 d, 即 P 为 d 次齐次式. □

知乎@余命数

注 1.6 (因式与降元)
若 P 为 d 次齐次式且 $P = QR$, 则 Q, R 亦必为齐次式, 且 $\deg Q + \deg R = d$. 在二元情形, 齐次性可用于降元. 设

$$F(x,y) = 0$$

为 d 次齐次方程, 若 $y \neq 0$, 令 $t = \dfrac{x}{y}$, 两边除以 y^d, 得一元方程

$$F(t,1) = 0,$$

解出 t 后再还原 $x:y$ 的比值. 这在因式分解和解齐次方程组时常用.

余命数 知乎@余命数

注 1.7 (对称性、轮换性与齐次性的组合)
多项式往往同时具有多种结构. 例如:

- x^2+xy+y^2 是对称式、(两元)轮换式、二次齐次式.
- $a^2b+b^2c+c^2a$ 是三元轮换式、三次齐次式, 非对称式.
- $a^3+b^3+c^3-3abc$ 是三元对称式、三次齐次式.

在因式分解或恒等变形中, 通常结合多种结构使用, 如利用齐次性降元, 配合对称性或轮换性判断因式形状.

知乎@余命数

1.1.3 应用练习

练习 1.1 判断下列多项式的类型(对称式、轮换式、齐次式).

(a) $P(x,y)=x^2+xy+y^2$;

(b) $P(a,b,c)=a^2b+b^2c+c^2a$;

(c) $P(x,y,z)=x^3+y^3+z^2$;

(d) $P(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)$.

知乎@余命数

练习 1.2 已知关于 a,b,c 的轮换式 $P(a,b,c)$ 含有因式 $(a-b)$, 写出它必然含有的另外两个一次因式.

练习 1.3 因式分解

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$

练习 1.4 设 $F(x,y)$ 为二元 d 次齐次多项式,方程 $F(x,y)=0$ 中 $(x,y)\neq(0,0)$. 令 $t=\dfrac{x}{y}(y\neq 0)$ 或 $t=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$, 将方程化为一元方程, 写出一般变形过程.

知乎@余命数

1.2 乘法公式与因式分解

知乎@余命数

我们先整理常用的乘法公式及其逆运算, 再给出若干因式分解方法, 最后推广到高次多项式.

1.2.1 平方差与完全平方

知乎@余命数

性质 (平方差) 对任意数 a,b,

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

证明 展开右端得

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2.$$

□

例题 1.5 计算 $2024 \cdot 2016$.

解 这两个数关于 2020 对称. 令 $a = 2020, b = 4$, 则

$$2024 \cdot 2016 = (2020 + 4)(2020 - 4) = 2020^2 - 4^2 = 4080400 - 16 = 4080384.$$

例题 1.6 因式分解 $x^2 - 4y^2 - 4y - 1$.

解 后三项构成完全平方, 即

$$x^2 - (4y^2 + 4y + 1) = x^2 - (2y + 1)^2,$$

于是

$$x^2 - 4y^2 - 4y - 1 = (x - 2y - 1)(x + 2y + 1).$$

性质 (完全平方) 对任意数 a, b, c,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

证明 二项式情形直接展开即可. 对三项式, 令 $u = a + b$, 有

$$(a + b + c)^2 = (u + c)^2 = u^2 + 2uc + c^2,$$

再代回 $u^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 即得. □

例题 1.7 计算 101^2 与 99^2.

解

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1 = 10201,$$

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1 = 9801.$$

例题 1.8 已知 $a - b = 4, ab = 5$, 求 $(a + b)^2$.

解 由

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

得

$$(a+b)^2 = 4^2 + 4\cdot 5 = 36.$$

例题 1.9 已知 $x + \dfrac{1}{x} = 5$, 求 $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ 与 $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$.

解 平方得

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 25,$$

从而

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 23.$$

再平方一次,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = 23^2,$$

故

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 23^2 - 2 = 527.$$

知乎@余命数

1.2.2 立方公式与幂的和差

性质 (立方和与立方差) 对任意数 a, b,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

证明 对 $a^3 + b^3$ 添项拆项, 得

$$a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b - ab^2 + ab^2 + b^3 = a^2(a+b) - ab(a+b) + b^2(a+b),$$

提取公因式 $(a+b)$ 即得

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

立方差同理. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

性质 (完全立方) 对任意数 a, b,

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

证明 由二项式自乘,

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2),$$

展开整理即得所述公式.$(a-b)^3$ 类似. □

例题 1.10 因式分解 $8x^3 - 27y^3$.

解

$$8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2).$$

例题 1.11 化简 $\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$.

解 对分子作立方和分解, 得

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1),$$

约去公因式, 故

$$\frac{x^3+1}{x^2-x+1} = x+1.$$

又 $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, 对一切实数 x 分母不为零.

例题 1.12 已知 $x + \dfrac{1}{x} = 3$, 求 $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$.

解

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9,$$

得 $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. 于是

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \cdot (7-1) = 18.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

亦可用

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18.$$

定理 1.1 (幂的差) 对任意正整数 n,

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

知乎@余命数

证明 设

$$S=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1},$$

则乘积

$$(a-b)S=a^n-b^n$$

其中中间各项成对抵消, 仅保留首尾两项. □

定理 1.2 (奇数次幂的和) 若 n 为正奇数, 则

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

证明 我们把幂的差公式用于 $a^n-(-b)^n$. 因 n 为奇数, $(-b)^n=-b^n$, 故

$$a^n+b^n=a^n-(-b)^n=(a+b)(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+\cdots+(-b)^{n-1}).$$

由于 $n-1$ 为偶数, 括号内各项符号交替, 末项为 b^{n-1}, 即得所述公式. □

例题 1.13 分解 x^5-y^5 与 x^5+y^5.

解

$$x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4),$$

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4).$$

例题 1.14 分解 x^4+4x^2+16.

解 我们把它视为关于 x^2 的二次式. 若用十字相乘, 在整数系数范围难以直接配对. 改用结构式

$$x^4+4x^2+16=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4),$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

展开右端验证为

$$(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)=x^4+4x^2+16.$$

注 1.8 (索菲·热尔曼型恒等式)
对任意 a,b,

$$a^4+4b^4=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2),$$

其中 x^4+4 为 $a=x,b=1$ 的特例.

1.2.3 基本因式分解方法

1.2.3.1 提公因式与分组分解

例题 1.15 因式分解 $3x(a-b)-2y(b-a)$.

解 $(b-a)=-(a-b)$, 故

$$3x(a-b)-2y(b-a)=3x(a-b)+2y(a-b)=(a-b)(3x+2y).$$

例题 1.16 因式分解 $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$.

解 有

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0,\quad c-a=-(a-b)-(b-c).$$

代入, 得

$$\begin{aligned}ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)&=ab(a-b)+bc(b-c)\\&\quad+ca[-(a-b)-(b-c)]\\&=[ab(a-b)-ca(a-b)]\\&\quad+[bc(b-c)-ca(b-c)]\\&=(a-b)(ab-ca)+(b-c)(bc-ca).\end{aligned}$$

注意 $ab-ca=a(b-c)$, $bc-ca=c(b-a)$, 于是

$$\begin{aligned}&=(a-b)a(b-c)+(b-c)c(b-a)\\&=(a-b)a(b-c)-(b-c)c(a-b)\\&=(a-b)(b-c)(a-c)\end{aligned}$$

知乎@余命数

$$= -(a-b)(b-c)(c-a).$$

1.2.3.2 配方法与添项拆项

例题 1.17 因式分解 x^4+4.

解 视 x^4 与 4 为 $(x^2)^2$ 与 2^2, 构造中间项 $4x^2$, 得

$$x^4+4 = (x^4+4x^2+4)-4x^2 = (x^2+2)^2-(2x)^2.$$

平方差公式给出

$$x^4+4 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

例题 1.18 因式分解 $x^2-6x+9-y^2$.

解

$$x^2-6x+9 = (x-3)^2,$$

原式为

$$(x-3)^2-y^2 = (x-3-y)(x-3+y) = (x-y-3)(x+y-3).$$

1.2.3.3 整体代换

例题 1.19 因式分解 $2(x+y)^2-5(x+y)-3$.

解 令 $A = x+y$, 则

$$2A^2-5A-3 = (2A+1)(A-3),$$

代回得

$$2(x+y)^2-5(x+y)-3 = [2(x+y)+1][(x+y)-3].$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

1.2.4 二次多项式

1.2.4.1 十字相乘法

定义 1.4 设 $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$, 一元二次三项式

$$ax^2+bx+c$$

若可写成

$$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2),$$

则称右式为其在实数范围内的因式分解.

展开右式, 得

$$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2,$$

比较系数, 需满足

$$a_1a_2=a,\quad c_1c_2=c,\quad a_1c_2+a_2c_1=b.$$

例题 1.20 因式分解 $3x^2+11x-4$.

解 $3x^2=3x\cdot x,-4=-1\cdot 4$, 取

$$a_1=3,\ a_2=1,\ c_1=-1,\ c_2=4,$$

得

$$(3x)\cdot 4+(x)\cdot(-1)=12x-x=11x,$$

故

$$3x^2+11x-4=(3x-1)(x+4).$$

例题 1.21 因式分解 $2x^2+7x+3$.

解 $2x^2=2x\cdot x,3=1\cdot 3$, 取

$$a_1=2,\ a_2=1,\ c_1=1,\ c_2=3,$$

得

$$(2x)\cdot 3+(x)\cdot 1=7x,$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

于是

$$2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3).$$

1.2.4.2 双十字相乘法

定义 1.5 设 $a,b,c\in\mathbb{R},ac\neq 0$. 齐次二次式

$$ax^2+bxy+cy^2$$

若可写成

$$(a_1x+c_1y)(a_2x+c_2y),$$

则称右式为其因式分解.

展开右式, 得

$$(a_1x+c_1y)(a_2x+c_2y)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)xy+c_1c_2y^2,$$

比较系数, 需要

$$a_1a_2=a,\quad c_1c_2=c,\quad a_1c_2+a_2c_1=b.$$

例题 1.22 因式分解 $6x^2+5xy-6y^2$.

解 $6x^2=3x\cdot 2x,-6y^2=-2y\cdot 3y$, 取

$$a_1=3,\ a_2=2,\ c_1=-2,\ c_2=3,$$

有

$$(3x)(3y)+(2x)(-2y)=9xy-4xy=5xy,$$

故

$$6x^2+5xy-6y^2=(3x-2y)(2x+3y).$$

例题 1.23 因式分解 $x^2-3xy-10y^2$.

解 $x^2=x\cdot x,-10y^2=-5y\cdot 2y$, 取

$$a_1=1,\ a_2=1,\ c_1=-5,\ c_2=2,$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

交叉项

$$(x)(2y)+(x)(-5y)=2xy-5xy=-3xy,$$

于是

$$x^2-3xy-10y^2=(x-5y)(x+2y).$$

1.2.4.3 通用公式

定理 1.3 (一元二次通用公式) 设 $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$, 判别式

$$\Delta=b^2-4ac.$$

若 $\Delta\geq 0$, 则

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

若 $\Delta<0$, 则在实数范围内不能分解为一次因式的乘积.

知乎@余命数

证明 方程 $ax^2+bx+c=0$ 等价于

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

配方得到

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{\Delta}{4a^2},$$

当 $\Delta\geq 0$ 时,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

知乎@余命数

两根为 x_1,x_2 时, 有

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

展开右端可核对系数. 当 $\Delta<0$ 时, 该方程无实根; 若它能在实数范围内分解为两个一次因式的乘积, 则方程必有实根, 与 $\Delta<0$ 矛盾. □

例题 1.24 用通用公式因式分解 $3x^2-11x+10$.

解 $a=3,b=-11,c=10$, 判别式

$$\Delta=(-11)^2-4\cdot 3\cdot 10=1,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根为

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{5}{3}.$$

于是

$$3x^2 - 11x + 10 = 3(x-2)\left(x - \frac{5}{3}\right) = (3x-5)(x-2).$$

定理 1.4 (齐次二次分解) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$. 若 $\Delta \geq 0$, 则存在实数 λ_1, λ_2,

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a(x - \lambda_1 y)(x - \lambda_2 y),$$

其中

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

若 $\Delta < 0$, 则在实数范围内不能分解为一次因式的乘积.

余命数 知乎@余命数

证明 令 $t = x/y (y \neq 0)$, 则

$$ax^2 + bxy + cy^2 = y^2(at^2 + bt + c).$$

若 $\Delta \geq 0$, 一元二次 $at^2 + bt + c = 0$ 有根

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

知乎@余命数

且

$$at^2 + bt + c = a(t - \lambda_1)(t - \lambda_2),$$

于是当 $y \neq 0$ 时,

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a(x - \lambda_1 y)(x - \lambda_2 y).$$

知乎@余命数

两边都是关于 x, y 的多项式, 且在 $y \neq 0$ 时相等, 故作为多项式恒等式对所有 x, y 成立. 若 $\Delta < 0$ 而仍可在实数范围内分解为两个一次齐次因式, 则令 $y = 1$ 会得到一元二次式 $at^2 + bt + c$ 的实一次因式分解, 从而有实根, 矛盾. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.2.5 高次多项式

引理 1.2 (余式定理) 设 $P(x)$ 为多项式, 将其除以 $(x-a)$, 得

$$P(x)=(x-a)Q(x)+r,\quad r\in\mathbb{R}.$$

则 $r=P(a)$.

证明 对上式代入 $x=a$, 得 $P(a)=r$. □

定理 1.5 (因式定理) 多项式 $P(x)$ 有因式 $(x-a)$ 当且仅当 $P(a)=0$.

证明 若 $P(x)=(x-a)Q(x)$, 则 $P(a)=0$. 反之, 若 $P(a)=0$, 由余式定理,

$$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)=(x-a)Q(x),$$

从而 $(x-a)$ 为因式. □

定理 1.6 (有理根定理) 设

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$$

为整系数多项式, $a_n\neq 0$. 若最简分数 $\frac{p}{q}(\gcd(p,q)=1,q>0)$ 为 $P(x)$ 的有理根, 则 q 为 a_n 的整数因数; 若 $p\neq 0$, 则 p 为 a_0 的整数因数, 若 $p=0$, 则 $a_0=0$.

证明 由 $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$, 两边乘以 q^n 得

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

移项可得

$$a_np^n=-q(a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1}),$$

因此 $q\mid a_np^n$. 又 $\gcd(p,q)=1$, 故 $\gcd(p^n,q)=1$, 从而 $q\mid a_n$.

同理,

$$a_0q^n=-p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\cdots+a_1q^{n-1}).$$

若 $p\neq 0$, 由 $\gcd(p,q^n)=1$ 得 $p\mid a_0$; 若 $p=0$, 直接由 $P(0)=0$ 得 $a_0=0$. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.25　因式分解 $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

解　这里 $a_3=1, a_0=6$. 根据有理根定理, 可能的有理根为 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. 逐一代入, 得

$$P(1)=1-2-5+6=0,$$

故 $(x-1)$ 为因式. 综合除法(系数为 $1,-2,-5,6$ 与根 1)得商

$$x^2-x-6.$$

继续因式分解, 得

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2),$$

于是

$$P(x)=(x-1)(x-3)(x+2).$$

例题 1.26　因式分解 $P(x)=x^3-4x^2+8$.

解　这里 $a_3=1, a_0=8$. 根据有理根定理, 可能的有理根为 $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$. 逐个试算, 得

$$P(2)=8-16+8=0,$$

故 $(x-2)$ 为因式. 综合除法(系数 $1,-4,0,8$ 与根 2)得商

$$x^2-2x-4.$$

判别式

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-4)=20>0,$$

一元二次公式给出根

$$x=1\pm\sqrt{5}.$$

在实数范围内可写成

$$x^2-2x-4=(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5}),$$

在有理数范围则保留二次因式. 于是

$$P(x)=(x-2)(x^2-2x-4)$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

或

$$P(x)=(x-2)(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5}).$$

1.2.6 练习

练习 1.5 因式分解 $(x+2y)^2-(x-y)^2$.

知乎@余命数

练习 1.6 因式分解 $8a^3+27b^3$.

练习 1.7 已知 $x+\dfrac{1}{x}=4$, 求 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 与 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$.

练习 1.8 因式分解 x^4-16 与 x^4+4x^2+16.

练习 1.9 因式分解 $2x^2-5x-3$ 与 $6x^2+5xy-6y^2$.

练习 1.10 对多项式 $P(x)=2x^3-x^2-8x+4$, 写出所有可能的有理根, 并完成因式分解.

知乎@余命数

1.3 恒等变形的方法

恒等变形用来证明等式与化简代数式. 我们给出五种策略, 分别对应不同的结构线索.

1.3.1 复杂化简法

知乎@余命数

我们证明恒等式 $A=B$ 时, 从结构复杂的一端入手, 经因式分解、通分、展开、配方等变形, 化到结构简单的一端.

知乎@余命数

知乎@余命数

例题 1.27　在各分母均有意义时, 求证

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$$

证明　左侧具有轮换对称性, 右侧为简单分式之和, 我们对左侧作裂项. 将分子表为分母因式之差, 得

$$b-c=(a-c)-(a-b)$$

于是

$$\frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}$$

由轮换对称性, 另两项同理处理, 得

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}$$

三式相加, 每个分式恰出现两次, 得

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}\right)+\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)+\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}\right)\\&=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}=\text{RHS}\end{aligned}$$

□

例题 1.28　因式分解 $(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5$.

解　x^2+x 反复出现, 我们作整体换元. 令 $A=x^2+x$, 原式化为

$$(A-1)(A+3)-5=A^2+2A-3-5=A^2+2A-8$$

对 A 的二次式作因式分解, 得

$$A^2+2A-8=(A+4)(A-2)$$

代回 $A=x^2+x$, 得

$$(x^2+x+4)(x^2+x-2)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因 x^2+x+4 判别式 $\Delta = 1-16 < 0$, 在实数域不可约; 而 $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$. 故

$$\text{原式} = (x^2+x+4)(x+2)(x-1)$$

例题 1.29 化简 $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2}$.

解 分母形如 x^2-xy+y^2, 我们将分子分解为含此因式的乘积. 为构造平方差, 对分子配方, 得

$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2 \\ &= (x^2+y^2)^2-(xy)^2 \\ &= (x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy) \end{aligned}$$

代入原式, 约去公因式, 得

$$\frac{(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)}{x^2-xy+y^2} = x^2+xy+y^2 \quad (x^2-xy+y^2 \neq 0)$$

例题 1.30 求证 $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

证明 右侧为三个一次因式之积, 我们用因式定理验证左侧的根. 令 $P(a) = (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$, 代入 $a=-b$ 得

$$P(-b) = c^3-(-b)^3-b^3-c^3 = 0$$

故 $(a+b) \mid P(a)$. 由轮换对称性, $(b+c)$ 与 $(c+a)$ 亦整除 P.

P 是三次齐次式, 三个一次因式之积亦为三次齐次式, 故

$$P(a) = k(a+b)(b+c)(c+a)$$

取 $a=b=c=1$ 确定系数, 得

$$\text{LHS} = 3^3-3 = 24, \quad \text{RHS} = k\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 8k$$

解得 $k=3$. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.31　已知 $abc=1$, 且各分母均有意义, 求证 $\dfrac{1}{1+a+ab}+\dfrac{1}{1+b+bc}+\dfrac{1}{1+c+ca}=1$.

证明　三个分母结构相似但不同, 条件 $abc=1$ 尚未使用. 我们用此条件统一分母.

第二项乘 $\dfrac{a}{a}$ 并利用 $abc=1$, 得

$$\frac{1}{1+b+bc}=\frac{a}{a+ab+abc}=\frac{a}{a+ab+1}$$

第三项乘 $\dfrac{ab}{ab}$, 得

$$\frac{1}{1+c+ca}=\frac{ab}{ab+abc+a^2bc}=\frac{ab}{ab+1+a}$$

三项分母统一为 $1+a+ab$, 分子相加, 得

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{1+a+ab}+\frac{ab}{1+a+ab}=\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=1$$

□

例题 1.32　已知 $a+b+c=0$, 且各分母均有意义, 求证 $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}=1$.

证明　分母 $2a^2+bc$ 形式特殊, 我们利用 $a=-(b+c)$ 将其因式分解, 得

$$2a^2+bc=a^2+a\cdot a+bc=a^2-a(b+c)+bc=(a-b)(a-c)$$

由轮换对称性, $2b^2+ca=(b-c)(b-a)$, $2c^2+ab=(c-a)(c-b)$.

通分后公分母为 $(a-b)(b-c)(c-a)$, 分子为

$$\begin{aligned}&-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)\\&=-a^2b+a^2c-b^2c+ab^2-c^2a+bc^2\end{aligned}$$

此式关于 a,b,c 轮换反对称(交换任意两变量变号), 且为三次齐次式, 故必有因式 $(a-b)(b-c)(c-a)$. 比较首项系数知

$$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

知乎@余命数

与分母相消, 得 1. □

例题 1.33 因式分解 $x^4+y^4+(x+y)^4$.

解 我们直接展开, 再看能否配成完全平方. 展开 $(x+y)^4$, 得

$$\begin{aligned} x^4+y^4+(x+y)^4 &= x^4+y^4+(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4) \\ &= 2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4 \\ &= 2(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4) \end{aligned}$$

括号内为四次齐次对称式. 我们猜测它是某二次齐次式的平方, 设为 $(x^2+\alpha xy+y^2)^2$. 展开比较系数, 得

$$\begin{aligned} (x^2+xy+y^2)^2 &= x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y+2xy^3+2x^2y^2 \\ &= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4 \end{aligned}$$

吻合. 故原式 $=2(x^2+xy+y^2)^2$.

1.3.2 双向变换法

当等式两端均较复杂时, 我们分别把它们变形到同一形式. 若 $A=C$ 且 $B=C$, 则 $A=B$.

例题 1.34 求证 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

证明 两侧均为四个变量的四次式, 我们直接展开比较. 左侧展开为

$$\text{LHS}=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

右侧展开为

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= (a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2) \\ &= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \end{aligned}$$

交叉项 $\pm 2abcd$ 相消, 两侧相等. □

例题 1.35 求证 $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

证明 左侧为已知的因式分解公式, 右侧较复杂. 我们从右侧入手化简, 得

$$\begin{aligned}\text{RHS} &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

此即 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的标准分解式. 展开验证, 得

$$\begin{aligned}&= a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c\\ &\quad +a^2b+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-abc\\ &\quad +a^2c+b^2c+c^3-abc-bc^2-ac^2\\ &= a^3+b^3+c^3-3abc = \text{LHS}\end{aligned}$$

□

知乎@余命数

例题 1.36 求证 $(a+b+c)^3abc-(bc+ca+ab)^3 = abc(a^3+b^3+c^3)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$.

证明 两侧结构相似, 左侧涉及 $(a+b+c)^3$ 与 $(bc+ca+ab)^3$, 右侧涉及 $a^3+b^3+c^3$ 与 $(bc)^3+(ca)^3+(ab)^3$. 移项使结构对称, 得

$$abc[(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)] = (bc+ca+ab)^3-[(bc)^3+(ca)^3+(ab)^3]$$

利用恒等式 $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(z+x)$. 左侧展开为

$$\text{左式} = abc\cdot 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

右侧取 $x=bc$, $y=ca$, $z=ab$, 得

$$\begin{aligned}\text{右式} &= 3(bc+ca)(ca+ab)(ab+bc)\\ &= 3\cdot c(a+b)\cdot a(b+c)\cdot b(a+c)\\ &= 3abc(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

两侧相等. □

例题 1.37 求证 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$.

知乎@余命数

证明 两侧复杂度相当, 我们直接展开. 左侧展开为

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 3abc$$

右侧展开为

$$\begin{aligned}
&= a(ab + bc + ca) + b(ab + bc + ca) + c(ab + bc + ca) \\
&= (a^2b + abc + a^2c) + (ab^2 + b^2c + abc) + (abc + bc^2 + c^2a) \\
&= a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + c^2a + bc^2 + 3abc
\end{aligned}$$

两侧相等. □

知乎@余命数

例题 1.38 求证 $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$.

证明 先记

$$T = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2.$$

四个因式形如 $\pm a \pm b \pm c$, 我们将 T 配方为平方差的乘积.

知乎@余命数

$$\begin{aligned}
T &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 4a^2b^2 - c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 + 2a^2b^2 \\
&= (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + c^4 - 4a^2b^2 \\
&= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2
\end{aligned}$$

知乎@余命数

应用平方差公式两次, 得

知乎@余命数

$$\begin{aligned}
&= (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) \\
&= ((a - b)^2 - c^2)((a + b)^2 - c^2) \\
&= (a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c)
\end{aligned}$$

知乎@余命数

注意 $-a + b + c = -(a - b - c)$, 故

$$\begin{aligned}
&2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \\
&= -T = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).
\end{aligned}$$

□

例题 1.39 (索菲·热尔曼恒等式) 求证 $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 右侧形如 $(M+N)(M-N)=M^2-N^2$, 其中 $M=a^2+2b^2$, $N=2ab$. 展开验证, 得

$$\begin{aligned}\text{RHS}&=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2\\&=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2\\&=a^4+4b^4=\text{LHS}\end{aligned}$$

□

例题 1.40 (拉格朗日恒等式) 求证 $\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right)=\left(\sum_i a_ib_i\right)^2+\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2$.

知乎@余命数

证明 我们对有限指标集合展开右侧, 得

$$\left(\sum_i a_ib_i\right)^2=\sum_i a_i^2b_i^2+2\sum_{i<j}a_ia_jb_ib_j,$$

且

$$\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2=\sum_{i<j}(a_i^2b_j^2-2a_ia_jb_ib_j+a_j^2b_i^2).$$

两式相加后交叉项抵消, 得

$$\sum_i a_i^2b_i^2+\sum_{i<j}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2)=\sum_{i,j}a_i^2b_j^2.$$

而

$$\sum_{i,j}a_i^2b_j^2=\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_j b_j^2\right),$$

故恒等式成立. □

1.3.3 作差法

我们利用 $A=B\iff A-B=0$. 当等式两侧结构有局部对应关系时, 逐项作差往往比通分简洁.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.41 在各分母均有意义时,求证 $\dfrac{x}{ax-a^2}+\dfrac{y}{ay-a^2}+\dfrac{z}{az-a^2}=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{y-a}+\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{3}{a}$.

证明 左右两侧均有三个分式,结构对应. 我们逐项作差,得

$$\frac{x}{ax-a^2}-\frac{1}{x-a}=\frac{x}{a(x-a)}-\frac{a}{a(x-a)}=\frac{x-a}{a(x-a)}=\frac{1}{a}$$

另两组差亦为 $\dfrac{1}{a}$. 故

$$\text{LHS}-\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{y-a}+\frac{1}{z-a}\right)=\frac{3}{a}$$

移项即得原式. □

例题 1.42 求证 $(a+b)(b+c)(c+a)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$.

证明 左侧为三因式之积,右侧已部分展开. 直接展开左侧比较,得

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a)&=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)\\&=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc\\&=a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc\end{aligned}$$

与右侧相同. □

例题 1.43 已知 $a+b+c=0$,求证 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

证明 我们利用标准分解式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

代入条件 $a+b+c=0$,右边为 0. 故 $a^3+b^3+c^3=3abc$. □

例题 1.44 已知 $a+b+c=0$,且各分母均有意义,求证 $\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 我们利用条件简化分母. 由 $a=-(b+c)$ 得

$$b^2+c^2-a^2=b^2+c^2-(b+c)^2=-2bc$$

由轮换对称性, 另两分母为 $-2ca$ 与 $-2ab$. 故

$$\text{LHS}=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ca}+\frac{1}{-2ab}=-\frac{1}{2abc}(a+b+c)=0$$

□

知乎@余命数

例题 1.45 已知 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$, 且 $x,y,z\neq 0$, 求证 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$.

乎@余命数

证明 由等比条件, 我们设公比. 令 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$, 则 $a=kx$, $b=ky$, $c=kz$. 代入, 得

$$\text{LHS}=k^2(x^2+y^2+z^2)\cdot(x^2+y^2+z^2)=k^2(x^2+y^2+z^2)^2$$

$$\text{RHS}=(kx^2+ky^2+kz^2)^2=k^2(x^2+y^2+z^2)^2$$

知乎@余命数　知乎@余命数

两侧相等. □

例题 1.46 在各分母均有意义时, 求证 $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}=0$.

知乎@余命数

证明 左侧为轮换对称式, 我们通分验证分子为零. 公分母为 $(a+b)(b+c)(c+a)$, 分子为

$$(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ca)(c+a)+(c^2-ab)(a+b)$$

展开, 得

$$\begin{aligned}&=(a^2b+a^2c-b^2c-bc^2)+(b^2c+ab^2-ac^2-a^2c)\\&\quad+(ac^2+bc^2-a^2b-ab^2)\\&=0\end{aligned}$$

知乎@余命数　知乎@余命数

各项两两抵消. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.3.4 分析法

我们从待证结论出发, 逐步归结到已知条件. 正式书写时把推导过程整理为综合形式.

例题 1.47 已知 $a+b+c=0$, 求证 $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

证明 我们展开左侧, 待证式等价于

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=2(a^4+b^4+c^4)$$

即

$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(*)$$

现从条件推导 $(*)$. 由 $(a+b+c)^2=0$ 得

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$$

两边平方, 得

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(ab+bc+ca)^2$$

展开两侧, 得

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)]$$

因 $a+b+c=0$, 右边末项消失, 得

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

移项即得 $(*)$. □

例题 1.48 求证 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

证明 右侧为完全平方之和, 展开后应与左侧吻合, 得

$$\begin{aligned}\text{RHS}&=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)\\&=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\&=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\text{LHS}\end{aligned}$$

□

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.3.5 赋值法（多项式恒等定理）

定理 1.7　若两个次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 在 $n+1$ 个不同点处取值相同，则 $P(x)\equiv Q(x)$.

证明　令 $R(x)=P(x)-Q(x)$. 则 $R(x)$ 的次数不超过 n，且它在这 $n+1$ 个不同点处均取值为 0. 若 R 不是零多项式，则由因式定理可知这些不同的零点对应 $n+1$ 个不同的一次因式，因而 R 的次数至少为 $n+1$，与 $\deg R\le n$ 矛盾. 故 $R\equiv 0$，即 $P(x)\equiv Q(x)$. □

此定理将恒等式的证明化为有限次数值验证.

例题 1.49　求证 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+5x+5)^2$.

证明　设左边为 $P(x)$，右边为 $Q(x)$，均为 4 次多项式. 我们取 5 个点验证，得

- $x=-1$：$P(-1)=0\cdot 1\cdot 2\cdot 3+1=1$，$Q(-1)=(1-5+5)^2=1$.
- $x=-2$：$P(-2)=(-1)\cdot 0\cdot 1\cdot 2+1=1$，$Q(-2)=(4-10+5)^2=1$.
- $x=-3$：$P(-3)=(-2)(-1)\cdot 0\cdot 1+1=1$，$Q(-3)=(9-15+5)^2=1$.
- $x=-4$：$P(-4)=(-3)(-2)(-1)\cdot 0+1=1$，$Q(-4)=(16-20+5)^2=1$.
- $x=0$：$P(0)=24+1=25$，$Q(0)=25$.

5 个点处取值相同，由定理知 $P(x)\equiv Q(x)$. □

1.4 二次函数

设 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$ 为二次函数. 它的图像是抛物线.

1.4.0.0.1　配方法与顶点式　我们对一般式配方，把它改写成顶点式.

$$\begin{aligned} f(x)&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

于是我们得到 $f(x)=a(x-h)^2+k$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 顶点坐标 $(h,k)=\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $a>0$ 时它是抛物线的最低点; 当 $a<0$ 时它是抛物线的最高点.
- 对称轴方程 $x=h=-\dfrac{b}{2a}$.

知乎@余命数

1.4.0.0.2 系数的几何意义 设二次项系数为 a, 一次项系数为 b, 常数项为 c. 它们的几何意义如下.

知乎@余命数

- a 决定开口方向与宽窄. 当 $a>0$ 时开口向上; 当 $a<0$ 时开口向下.$|a|$ 越大, 开口越窄.
- b 与 a 共同决定对称轴位置. 当 a,b 同号时对称轴在 y 轴左侧; 当 a,b 异号时对称轴在 y 轴右侧.
- c 是抛物线与 y 轴交点的纵坐标.

1.4.0.0.3 与 x 轴的交点 抛物线与 x 轴交点的横坐标就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根. 实根的个数由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的符号决定.

- 若 $\Delta>0$, 则抛物线与 x 轴有两个不同交点.
- 若 $\Delta=0$, 则抛物线与 x 轴有唯一切点(重根).
- 若 $\Delta<0$, 则抛物线与 x 轴无交点.

知乎@余命数

1.4.1 韦达定理及其推广

设 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两个根. 由因式分解

知乎@余命数

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

知乎@余命数

比较系数, 我们得到

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

利用韦达定理, 我们可以在不解方程的前提下计算根的对称表达式. 一些常用变形如下.

- $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$
- $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{\Delta}{a^2}$
- $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$
- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1.4.1.1 推广至 n 次方程

设 $x_1,\dots,x_n$ 是方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\ (a_n\neq 0)$ 的 n 个根. 根与系数满足下述对称关系.

$$\sum_i x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j} x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j<k} x_ix_jx_k=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

一般地, 任取 k 个根相乘再求和, 所得结果为 $(-1)^k\dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.

对于三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, 设其根为 x_1,x_2,x_3, 则它们满足

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},\quad x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

例题 1.50 设 α,β 是方程 $x^2-3x-5=0$ 的两根, 求以 $\dfrac{1}{\alpha-1}$ 和 $\dfrac{1}{\beta-1}$ 为根的一元二次方程.

解 我们设新根为 $y_1=\dfrac{1}{\alpha-1}, y_2=\dfrac{1}{\beta-1}$. 由原方程可知 $\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-5$.

计算新根之和, 得

$$y_1+y_2=\frac{(\alpha-1)+(\beta-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{3-2}{-5-3+1}=-\frac{1}{7}$$

计算新根之积, 得

$$y_1y_2=\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\frac{1}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=-\frac{1}{7}$$

于是所求方程为 $y^2+\dfrac{1}{7}y-\dfrac{1}{7}=0$, 即 $7y^2+y-1=0$.

为验证这一结果, 我们由 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 得 $x=\dfrac{y+1}{y}$. 代入原方程, 得

$$\left(\frac{y+1}{y}\right)^2-3\left(\frac{y+1}{y}\right)-5=0$$

知乎@余命数

两边乘 y^2 并整理, 得

$$(y+1)^2-3y(y+1)-5y^2=-7y^2-y+1=0$$

即 $7y^2+y-1=0$.

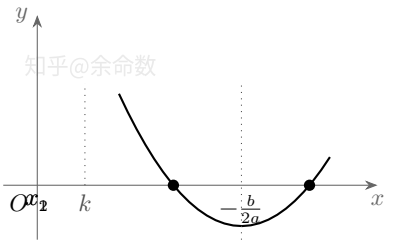
1.4.2 一元二次方程根的分布

设 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$. 在根的分布问题中, 我们把根相对于给定值的位置关系翻译成关于系数的不等式组. 约束来自以下三点.

知乎@余命数

1. 判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 控制根的存在性.
2. 对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 控制根的整体位置.
3. 端点函数值 $f(k)$ 控制特定点与根的相对位置.

1.4.2.1 两根均大于 k

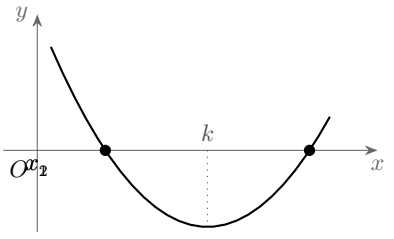


知乎@余命数

由图可知, 抛物线与 x 轴有交点, 对称轴在 k 的右侧, 且点 $(k,f(k))$ 在 x 轴上方. 因此所需条件为

$$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ -\dfrac{b}{2a}>k\\ f(k)>0\end{cases}$$

1.4.2.2 一根大于 k, 一根小于 k

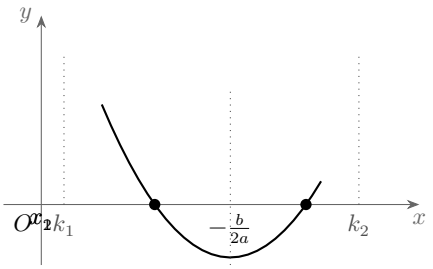


点 $(k,f(k))$ 在 x 轴下方. 由于抛物线开口向上, $f(k)<0$ 已经蕴含 $\Delta>0$. 于是条件简化为

$$f(k)<0$$

知乎@余命数

1.4.2.3 两根均在区间 (k_1,k_2) 内



知乎@余命数

同理, 两根都在 (k_1,k_2) 内时, 条件可写成

$$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ k_1<-\dfrac{b}{2a}<k_2\\ f(k_1)>0\\ f(k_2)>0\end{cases}$$

例题 1.51 若方程 $x^2-(m+1)x+m=0$ 的两根均在区间 $(0,2)$ 内, 求 m 的取值范围.

解 设 $f(x)=x^2-(m+1)x+m$.

判别式 $\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\geq 0$ 恒成立.

对称轴满足 $0<\dfrac{m+1}{2}<2$, 解得 $-1<m<3$.

端点函数值需 $f(0)=m>0$ 与 $f(2)=4-2(m+1)+m=2-m>0$, 即 $m<2$.

取交集得 $m\in(0,2)$.

例题 1.52 若方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 至少有一个根在区间 $(0,2)$ 内, 求 m 的取值范围.

解 我们考虑补集, 即两根均不在 $(0,2)$ 内.

方程化为 $(x-m)^2=1$, 解得 $x=m\pm 1$, 即两根为 $m-1$ 与 $m+1$.

两根均 ≤ 0 即 $m+1\leq 0$, 亦即 $m\leq -1$.

两根均 ≥ 2 即 $m-1\geq 2$, 亦即 $m\geq 3$.

两根分居 0 与 2 两侧, 即 $m-1\leq 0\leq 2\leq m+1$, 亦即 $m=1$.

补集为 $(-\infty,-1]\cup\{1\}\cup[3,+\infty)$, 故原问题的解为 $m\in(-1,3)\setminus\{1\}$.

例题 1.53 已知方程 $x^2+(k-3)x+k=0$ 有两个不同实根 x_1,x_2, 满足 $x_1<1<x_2<4$. 求 k 的取值范围.

知乎@余命数

解 设 $f(x)=x^2+(k-3)x+k$.

由 $x_1<1<x_2$ 可知 $f(1)<0$, 即

$$1+(k-3)+k=2k-2<0 \implies k<1$$

由 $x_2<4$ 可知 $f(4)>0$, 即

$$16+4(k-3)+k=5k+4>0 \implies k>-\frac{4}{5}$$

对称轴 $\dfrac{3-k}{2}<4$ 给出 $k>-5$, 这个条件已被 $k>-\dfrac{4}{5}$ 蕴含.

取交集得 $k\in\left(-\dfrac{4}{5},1\right)$.

例题 1.54 求使不等式 $ax^2-2x+1>0$ 对所有 $x\in(0,2]$ 恒成立的 a 的取值范围.

解 设 $f(x)=ax^2-2x+1$. 我们要求 f 在 $(0,2]$ 上的最小值大于 0.

若 $a=0$, 则 $f(x)=-2x+1$ 在 $x=1$ 处取负值, 不满足要求.

若 $a<0$, 则 $f(2)=4a-3<-3<0$, 不满足要求.

若 $a>0$, 则对称轴为 $x_0=\dfrac{1}{a}$.

- 当 $x_0\geq 2$, 即 $0<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时, f 在 $(0,2]$ 上递减, 最小值为 $f(2)=4a-3$. 要求 $4a-3>0$, 即 $a>\dfrac{3}{4}$, 与 $a\leq\dfrac{1}{2}$ 矛盾.
- 当 $0<x_0<2$, 即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时, 最小值为 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-\dfrac{1}{a}$. 要求 $1-\dfrac{1}{a}>0$, 即 $a>1$.

故 $a\in(1,+\infty)$.

例题 1.55 若方程 $x^2-2a|x|+a^2-4=0$ 有四个不相等的实根, 求 a 的取值范围.

解 令 $t=|x|$, 其中 $t\geq 0$, 则方程化为

$$t^2-2at+a^2-4=0$$

每个正根 t_0 对应两个 x 值 $\pm t_0$. 因此, 原方程有四个不同实根当且仅当关于 t 的方程有两个不相等的正根.

设 $g(t)=t^2-2at+a^2-4$.

判别式 $\Delta=4a^2-4(a^2-4)=16>0$, 恒有两个不同实根.

两根之和 $2a>0$, 即 $a>0$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两根之积 $a^2-4>0$, 即 $|a|>2$.

取交集得 $a\in(2,+\infty)$.

例题 1.56　已知 $f(x)=x^2+ax+1$. 若方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一解, 求 a 的取值范围.

解　唯一解只有两种可能. 一种是重根落在 $(0,1)$ 内, 另一种是两根中恰有一个落在 $(0,1)$ 内.

先考虑重根情形.$\Delta=a^2-4=0$ 给出 $a=\pm2$. 当 $a=2$ 时重根为 -1; 当 $a=-2$ 时重根为 1. 它们都不在开区间 $(0,1)$ 内.

再考虑单根情形. 我们需 $f(0)$ 与 $f(1)$ 异号. 由 $f(0)=1>0$ 可知 $f(1)=a+2<0$, 因此 $a<-2$.

再验证端点. 若 $f(1)=0$, 即 $a=-2$, 则它属于重根情形, 已被排除.

故 $a\in(-\infty,-2)$.

1.5 计算与变形技巧

1.5.1 配方法

配方法把二次式写成完全平方式与常数之和. 我们分两步做. 先提取二次项系数, 再加减一次项系数一半的平方.

练习 1.11　求函数 $y=2x^2-8x+5$ 的最小值.

例题 1.57　求代数式 $f(x,y)=x^2+4y^2-4x+8y+10$ 的最小值, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$.

解　这个表达式含两个变量, 我们分别对 x 与 y 配方. 先将与 x 和 y 相关的项分组.

$$f(x,y)=(x^2-4x)+(4y^2+8y)+10$$

对关于 x 的部分配方, 得

$$x^2-4x=(x^2-4x+4)-4=(x-2)^2-4$$

对关于 y 的部分配方, 注意先提取二次项系数, 得

$$4y^2+8y=4(y^2+2y)=4(y^2+2y+1-1)=4(y+1)^2-4$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将配方后的结果代回原式, 得

$$\begin{aligned} f(x,y) &= [(x-2)^2-4]+[4(y+1)^2-4]+10 \\ &= (x-2)^2+4(y+1)^2+2 \end{aligned}$$

由于平方项的非负性,有 $(x-2)^2 \geq 0$ 和 $(y+1)^2 \geq 0$. 因此, $f(x,y) \geq 0+4(0)+2=2$. 当且仅当 $(x-2)^2=0$ 且 $(y+1)^2=0$, 即 $x=2, y=-1$ 时, 等号成立. 故该代数式的最小值为 2.

知乎@余命数

例题 1.58 证明不等式 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 对任意实数 a,b,c 恒成立.

知乎@余命数

解 移项后乘以 2 再配方, 得

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

等价于

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0.$$

拆项组合得

知乎@余命数

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2) \geq 0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

实数的平方非负, 三非负数之和也非负, 故原不等式成立. 等号成立当且仅当 $a-b=0, b-c=0, c-a=0$, 即 $a=b=c$.

知乎@余命数

例题 1.59 求 $y=\dfrac{12}{x^2-8x+20}$ 的最大值.

解 这是一个分式函数, 分子为正常数. 函数取最大值, 等价于分母取最小值. 我们对分母配方.

知乎@余命数

$$\begin{aligned} \text{分母} &= x^2-8x+20 \\ &= (x^2-8x+16)-16+20 \\ &= (x-4)^2+4 \end{aligned}$$

知乎@余命数

由于 $(x-4)^2 \geq 0$ 对所有实数 x 成立, 所以分母的最小值为 $0+4=4$, 此最小值在 $x=4$ 时取得. 因此, 函数 y 的最大值为

$$y_{\max}=\frac{12}{4}=3$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

该最大值在 $x=4$ 时取得.

例题 1.60　求方程 $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ 的所有整数解 (x,y).

解 配方, 得

$$(x^2-8x)+(y^2+6y)+21=0$$

$$(x^2-8x+16)-16+(y^2+6y+9)-9+21=0$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2-25+21=0$$

$$(x-4)^2+(y+3)^2=4$$

由于 x,y 都是整数, 那么 $x-4$ 和 $y+3$ 也必为整数. 问题转化为求两个整数的平方和为 4. 设 $A=x-4, B=y+3$, 则 $A,B\in\mathbb{Z}$. 方程为 $A^2+B^2=4$. 整数平方的序列为 $0,1,4,9,\ldots$. 为使两个平方数的和为 4, 只有两种可能(不计顺序).

情形一为 $A^2=0$ 且 $B^2=4$. $A=0 \implies x-4=0 \implies x=4$. $B^2=4 \implies B=\pm2 \implies y+3=\pm2 \implies y=-1$ 或 $y=-5$. 得到两组解 $(4,-1)$ 和 $(4,-5)$.

情形二为 $A^2=4$ 且 $B^2=0$. $A^2=4 \implies A=\pm2 \implies x-4=\pm2 \implies x=6$ 或 $x=2$. $B=0 \implies y+3=0 \implies y=-3$. 得到两组解 $(6,-3)$ 和 $(2,-3)$.

故该方程共有四组整数解 $(4,-1),(4,-5),(6,-3),(2,-3)$.

1.5.2 换元法

表达式中某一部分反复出现时, 我们引入新变量替换, 并先确定新变量的取值范围.

练习 1.12　解方程 $4^x-3\cdot2^x+2=0$.

例题 1.61　求函数 $f(x)=\sin x+\cos x-\sin x\cos x$ 的值域.

解 令 $t=\sin x+\cos x$.

确定 t 的范围. 由辅助角公式, $t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, 故 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

用 t 表示原函数. 对 $t=\sin x+\cos x$ 两边平方, 得 $t^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x=1+2\sin x\cos x$. 由此解出 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将 t 与 $\dfrac{t^2-1}{2}$ 代入原函数表达式, 得

$$f(x)=g(t)=t-\frac{t^2-1}{2}=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$$

求二次函数 $g(t)$ 在 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 上的值域. $g(t)=-\dfrac{1}{2}(t^2-2t)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1$. 这是一个开口向下, 对称轴为 $t=1$ 的抛物线.

由于对称轴 $t=1\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, 函数在 $t=1$ 处取得最大值. $g_{\max}=g(1)=1$.

最小值在区间的两个端点 $t=-\sqrt{2}$ 或 $t=\sqrt{2}$ 处取得. $g(\sqrt{2})=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2+1=-\dfrac{1}{2}(3-2\sqrt{2})+1=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$. $g(-\sqrt{2})=-\dfrac{1}{2}(-\sqrt{2}-1)^2+1=-\dfrac{1}{2}(3+2\sqrt{2})+1=-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$. 比较可知 $g(-\sqrt{2})$ 是最小值.

因此, 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2},1\right]$.

例题 1.62 若关于 x 的方程 $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=k$ 有实数解, 求实数 k 的取值范围.

解 根式有意义要求 $x-1\geq 0$ 且 $3-x\geq 0$, 所以 $x\in[1,3]$. 令 $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$, 求 $t(x)$ 在 $[1,3]$ 上的值域.

$t\geq 0$, 先求 t^2 的范围.

$$\begin{aligned}t^2&=(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x})^2\\&=(x-1)+(3-x)+2\sqrt{(x-1)(3-x)}\\&=2+2\sqrt{-x^2+4x-3}\end{aligned}$$

设 $u(x)=-x^2+4x-3$, 求其在 $[1,3]$ 上的范围. 配方得 $u(x)=-(x^2-4x+4-4)-3=-(x-2)^2+1$. 这是一个开口向下, 顶点为 $(2,1)$ 的抛物线. 在区间 $[1,3]$ 上, $u(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值 $u_{\max}=1$. 在端点 $x=1$ 或 $x=3$ 处取得最小值 $u_{\min}=0$. 故 $u(x)$ 的值域为 $[0,1]$.

因此, $\sqrt{u(x)}$ 的值域为 $[0,1]$. 从而, $t^2=2+2\sqrt{u(x)}$ 的值域为 $[2+2(0),2+2(1)]=[2,4]$.

因为 $t\geq 0$, 所以 t 的值域为 $[\sqrt{2},2]$. 故实数 k 的取值范围是 $[\sqrt{2},2]$.

例题 1.63 解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+x+y=8\\xy+x+y=5\end{cases}$.

解 我们观察到方程组由基本对称式 $x+y$ 与 xy 构成. 令 $u=x+y, v=xy$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

我们用新变量表示原方程组. 注意到 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v$. 原方程组即转化为关于 u,v 的方程组, 得

$$\begin{cases}(u^2-2v)+u=8\\ v+u=5\end{cases}$$

解关于 u,v 的方程组. 由第二个方程得 $v=5-u$. 将其代入第一个方程, 得

$$u^2-2(5-u)+u=8$$

$$u^2-10+2u+u=8$$

$$u^2+3u-18=0$$

$$(u+6)(u-3)=0$$

解得 $u=-6$ 或 $u=3$.

回代求解 x,y 并检验范围.x,y 是关于 t 的一元二次方程 $t^2-(x+y)t+xy=0$, 即 $t^2-ut+v=0$ 的两个实数根. 该方程有实数根的充要条件是其判别式 $\Delta\geq 0$, 即 $u^2-4v\geq 0$.

当 $u=3$ 时, $v=5-3=2$. 检验范围, $u^2-4v=3^2-4(2)=9-8=1\geq 0$, 存在实数解. 此时 x,y 是方程 $t^2-3t+2=0$ 的根. 解得 $t=1$ 或 $t=2$. 所以方程组的解为 $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$.

当 $u=-6$ 时, $v=5-(-6)=11$. 检验范围, $u^2-4v=(-6)^2-4(11)=36-44=-8<0$. 此时 $t^2+6t+11=0$ 无实数根, 故此组 u,v 值舍去.

故原方程组的解为 $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$.

例题 1.64　在实数范围内解方程 $6x^4-25x^3+37x^2-25x+6=0$.

解　这是一个系数对称的四次方程, 也称为倒数方程. 代入 $x=0$ 得常数项 $6\neq 0$, 故 $x=0$ 不是方程的根, 可在方程两边同除以 x^2.

$$6x^2-25x+37-\frac{25}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

将系数相同的项结合, 得

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x+\frac{1}{x}\right)+37=0$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$. 确定 t 的范围. 若 x 为非零实数, 则 $|t|=\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\geq 2$. 平方得 $t^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$, 故 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

代入原方程, 得到关于 t 的二次方程, 得

$$6(t^2-2)-25t+37=0$$

$$6t^2-12-25t+37=0$$

$$6t^2-25t+25=0$$

利用十字相乘法, $(2t-5)(3t-5)=0$. 解得 $t=\dfrac{5}{2}$ 或 $t=\dfrac{5}{3}$.

检验 t 的范围并回代.$t=\dfrac{5}{2}=2.5$, 满足 $|t|\geq 2$ 的条件. $t=\dfrac{5}{3}\approx 1.67$, 不满足 $|t|\geq 2$ 的条件, 故舍去.

当 $t=\dfrac{5}{2}$ 时, 解关于 x 的方程, 得

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$2x^2+2=5x$$

$$2x^2-5x+2=0$$

$$(2x-1)(x-2)=0$$

解得 $x=\dfrac{1}{2}$ 或 $x=2$.

因此, 原方程的解为 $x=\dfrac{1}{2},2$.

1.5.3 待定系数法

当已知函数或多项式的结构类型时, 我们先设出含未知系数的标准形式, 再根据已知条件列方程(组)解出系数.

1.5.3.1 典例剖析

我们对下面这道题用三种方法处理.

例题 1.65 因式分解 $P(a,b,c)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

降幂整理

解 把原式看作关于 a 的多项式, 按 a 的降幂排列.

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)\\&=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)\end{aligned}$$

此时, 公因式 $(b-c)$ 显现出来.

$$\begin{aligned}&=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]\\&=(b-c)(a-b)(a-c)\end{aligned}$$

为美观, 常整理为轮换对称形式.

$$-(a-b)(b-c)(c-a)$$

因式定理

解 将原式看作关于 a 的多项式 $P(a)$. 若令 $a=b$ 代入原式, 得

$$P(b)=b^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(b-b)=b^2(b-c)-b^2(b-c)+0=0$$

据因式定理, $P(a)$ 必有因式 $(a-b)$. 由于原式是轮换对称式(a,b,c 轮换后表达式不变), 同理可得, 它也必有因式 $(b-c)$ 和 $(c-a)$. 原式是三次齐次式, $(a-b)(b-c)(c-a)$ 也是三次式, 故它们只相差一个常数倍. 设 $P(a,b,c)=k(a-b)(b-c)(c-a)$. 取特殊值 $a=1,b=2,c=0$ 代入检验, 得左边 $=1^2(2-0)+2^2(0-1)+0=2-4=-2$. 右边 $=k(1-2)(2-0)(0-1)=k(-1)(2)(-1)=2k$. 由 $-2=2k$ 解得 $k=-1$. 故原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

待定系数法

解 原式是关于 a,b,c 的三次齐次式, 在轮换下不变而交换任意两个变量变号. 具有这种性质的最低次式是 $(a-b)(b-c)(c-a)$, 于是设

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a),$$

其中 k 为待定常数. 取 $a=0,b=1,c=2$.

左边 $=0+1\cdot(2-0)+4\cdot(0-1)=2-4=-2$.

右边 $=k(0-1)(1-2)(2-0)=k(-1)(-1)(2)=2k$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 $-2=2k$ 得 $k=-1$. 故原式 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

注 1.9
三种方法各有侧重. 降幂整理直接但繁琐, 通用性强. 因式定理依赖零点观察. 待定系数法从对称结构入手.

例题 1.66 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$, 且 $f(x+1)-f(x)=2x$. 求 $f(x)$ 的解析式.

解 题目已知 $f(x)$ 是二次函数, 故设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 其中 $a\neq 0$.

由 $f(0)=1$ 立得 $c=1$.

接下来利用条件 $f(x+1)-f(x)=2x$. 先计算左边, 得

$$\begin{aligned} f(x+1)-f(x) &= a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c) \\ &= a(x^2+2x+1)+bx+b-ax^2-bx \\ &= 2ax+a+b \end{aligned}$$

此式恒等于 $2x$, 即 $2ax+(a+b)=2x+0$ 对一切 x 成立.

比较两边同次项系数.x 的系数给出 $2a=2$, 即 $a=1$; 常数项给出 $a+b=0$, 即 $b=-1$.

因此 $f(x)=x^2-x+1$.

例题 1.67 将 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 分解为部分分式, 其中 $n\neq 0,-1,-2$.

解 设

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

其中 A,B,C 为待定常数.

将右边通分, 得

$$\frac{A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

故分子满足恒等式

$$A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)\equiv 1$$

由于这是关于 n 的恒等式, 可代入任意 n 值来确定系数.

令 $n=0$ 得 $A\cdot 1\cdot 2=1$, 即 $A=\dfrac{1}{2}$.

令 $n=-1$ 得 $B\cdot(-1)\cdot 1=1$, 即 $B=-1$.

令 $n=-2$ 得 $C\cdot(-2)\cdot(-1)=1$, 即 $C=\dfrac{1}{2}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

注 1.10
部分分式分解用于级数求和与积分. 上例的结果可改写为

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

这一裂项形式使级数求和时相邻项大量抵消, 下一节讨论这种抵消.

1.5.4 裂项相消法

我们把通项分解为两项, 或多项之差, 求和时相邻项抵消, 仅余首尾若干项.

1.5.4.1 常见裂项公式

以下公式均可由待定系数法或直接通分验证.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$n\cdot n!=(n+1)!-n!$$

练习 1.13　求和 $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

例题 1.68　求和 $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 分母是两个根式之和, 我们做有理化. 分子分母同乘 $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

于是

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

例题 1.69 求和 $S=\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$.

解 直接观察通项, 注意到 $k\cdot k!=(k+1-1)\cdot k!=(k+1)!-k!$. 这正是一个裂项结构.

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]\\&=(2!-1!)+(3!-2!)+\cdots+((n+1)!-n!)\\&=(n+1)!-1\end{aligned}$$

例题 1.70 求和 $S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

解 由待定系数法一节的结论,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

设 $a_k=\frac{1}{k(k+1)}$, 则通项为 $\frac{1}{2}(a_k-a_{k+1})$. 于是

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\frac{1}{2}(a_1-a_{n+1})\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

例题 1.71　求和 $S=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$.

解　分母是两个奇数的乘积, 其差为 2. 应用公差为 2 的裂项公式, 得

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n+1}{2n+3}\end{aligned}$$

1.5.5 分离常数法

当分式分子次数不低于分母次数, 或需要分离出整数部分时, 可将其分离, 使剩余部分更易处理. 这一步把分式改写成多项式加真分式, 便于分析其结构.

练习 1.14　化简 $\dfrac{x^2+3x+5}{x+1}$.

例题 1.72　求函数 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}(x>1)$ 的最小值.

解　把分子改写为含 $(x-1)$ 的形式, 得

$$2x+1=2(x-1)+3$$

于是

$$y=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

由于 $x>1$, 故 $x-1>0$, 从而 $\dfrac{3}{x-1}>0$.

$\dfrac{3}{x-1}$ 随 x 增大而减小, 但始终为正, 无最小值; 然而, 当 $x\to+\infty$ 时 $y\to 2$. 故 $y>2$, 函数无最小值, 但有下确界 2.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

若题目改为 $1<x\leq 2$, 则 $0<x-1\leq 1$, 从而 $\dfrac{3}{x-1}\geq 3$. 此时 $y\geq 5$, 且等号在 $x=2$ 时取得, 故最小值为 5.

例题 1.73 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}(x>1)$, 求 $f(x)$ 的最小值.

解 设 $t=x-1$, 则 $x=t+1$, 且 $x>1$ 等价于 $t>0$.

$$f=\frac{(t+1)^2}{t}=\frac{t^2+2t+1}{t}=t+2+\frac{1}{t}$$

对 $t+\dfrac{1}{t}(t>0)$ 应用均值不等式, 得

$$t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$$

等号在 $t=1$ 时成立. 故 $f\geq 2+2=4$, 最小值 4 在 $t=1$, 即 $x=2$ 时取得.

例题 1.74 求 $y=\dfrac{3x^2-4x+5}{x^2+1}$ 的值域.

解 从值域中取 y 反解 x:

$$y(x^2+1)=3x^2-4x+5,$$

即

$$(y-3)x^2+4x+(y-5)=0.$$

此方程有实数解 x 的条件需分类讨论.

若 $y=3$, 方程退化为 $4x+(3-5)=0$, 即 $4x-2=0$, 解得 $x=\dfrac{1}{2}$, 故 $y=3$ 在值域中.

若 $y\neq 3$, 则方程为关于 x 的一元二次方程, 有实根的充要条件是判别式非负.

$$\Delta=16-4(y-3)(y-5)\geq 0$$

$$4-(y-3)(y-5)\geq 0$$

$$4-(y^2-8y+15)\geq 0$$

$$-y^2+8y-11\geq 0$$

$$y^2-8y+11\leq 0$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解这个一元二次不等式, 得

$$y=\frac{8\pm\sqrt{64-44}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{20}}{2}=4\pm\sqrt{5}$$

故 $4-\sqrt{5}\leq y\leq 4+\sqrt{5}$.

结合 $y=3$ 的情形 ($3\in[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$), 函数的值域为 $[4-\sqrt{5},4+\sqrt{5}]$.

1.5.6 整体思想

把表达式中反复出现的部分看作整体, 利用已知条件化简, 避免繁琐展开. 这与换元的思路相通, 只是不强求引入新字母.

知乎@余命数

练习 1.15　已知 $a+b=3, ab=2$, 求 a^2+b^2 的值.

@余命数

例题 1.75　已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$, 求 $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ 的值.

解　设 $t=x+\dfrac{1}{x}=3$. 逐步用 t 表示更高次的对称式.

首先, 平方得

$$t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$$

知乎@余命数

故 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$.

接下来, 利用立方和公式

知乎@余命数

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=t\cdot\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-1\right]=3\times(7-1)=18$$

例题 1.76　化简 $\dfrac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(ab)^2}$, 其中 $ab\neq 0$.

解　分子是两个平方的差, 运用平方差公式, 得

知乎@余命数

$$\begin{aligned}\text{分子}&=[(a^2+b^2)+(a^2-b^2)]\cdot[(a^2+b^2)-(a^2-b^2)]\\&=(2a^2)(2b^2)=4a^2b^2\end{aligned}$$

故原式 $=\dfrac{4a^2b^2}{a^2b^2}=4$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.77 已知 $(x-2)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 求 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 的值.

解 展开 $(x-2)^5$ 可直接读取系数, 也可代入特殊值.

在恒等式中令 $x=1$, 得

$$(1-2)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

$$-1=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

再令 $x=0$, 得

$$(-2)^5=a_0$$

$$a_0=-32$$

两式相减得

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1-(-32)=31$$

例题 1.78 设 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$, 已知 $f(-2)=10$, 求 $f(2)$.

解 设 $g(x)=x^5+ax^3+bx$, 则 $g(x)$ 是奇函数, $g(-x)=-g(x)$.

于是 $f(x)=g(x)-8$, 且

$$f(-x)=g(-x)-8=-g(x)-8$$

将 $f(x)+f(-x)$ 相加, 得

$$f(x)+f(-x)=[g(x)-8]+[-g(x)-8]=-16$$

故 $f(2)+f(-2)=-16$, 即 $f(2)=-16-f(-2)=-16-10=-26$.

1.6 数论进阶

?? 建立了整除、辗转相除、同余与不定方程的基本框架. 本节在此基础上引入素数分解定理、高斯函数、欧拉函数与费马小定理, 这些工具在组合计数、密码学和竞赛数论中反复出现.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

1.6.1 算术基本定理

定义 1.6 (素数) 大于 1 的整数 p 若只有 1 和 p 两个正因数, 则称 p 为**素数**(或质数). 大于 1 的非素整数称为**合数**.

定理 1.8 (算术基本定理) 每个大于 1 的整数都可以唯一地表示为有限个素数的乘积. 即对任意整数 $n>1$, 存在素数 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_k$ 使得

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k$$

且这种分解在不计顺序的意义下唯一.

知乎@余命数

证明 **存在性**. 对 n 作强归纳.$n=2$ 时显然成立. 设 $n>2$, 若 n 为素数则已毕; 若 n 为合数, 则 $n=ab, 1<a,b<n$, 由归纳假设 a 和 b 均可分解为素数乘积, 故 n 亦可.

唯一性. 设 $n = p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_l$ 为两种素数分解. 由素数性质, $p_1 \mid q_1 \cdots q_l$ 蕴含 p_1 整除某个 q_j, 而 q_j 为素数, 故 $p_1 = q_j$. 两边约去 p_1, 对剩余乘积继续此过程, 最终得到 $k=l$ 且两列素数一一相等. □

将相同素数合并, n 的标准分解式可写为

知乎@余命数

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}, \quad \alpha_i > 0$$

由此, n 的正因数个数为

知乎@余命数

$$d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1) \tag{1-1}$$

n 的所有正因数之和为

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1} \tag{1-2}$$

例题 1.79 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, 故 $d(60) = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$, $\sigma(60) = \frac{2^3-1}{2-1} \cdot \frac{3^2-1}{3-1} \cdot \frac{5^2-1}{5-1} = 7 \times 4 \times 6 = 168$.

知乎@余命数

1.6.2 高斯函数

定义 1.7 (高斯函数) 对实数 x, 不超过 x 的最大整数称为 x 的**取整函数**(或高斯函数), 记作 $\lfloor x \rfloor$. 即 $\lfloor x \rfloor$ 是满足

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

的唯一整数.

知乎@余命数

定理 1.9 (高斯函数的基本性质) 对任意实数 x、y 和整数 n:

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;
2. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
3. 若 $x \geq 0$ 且 n 为正整数, 则 $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor$;
4. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

知乎@余命数

证明 (1) 由定义直接给出.(2) 设 $\lfloor x \rfloor = m$, 则 $m \leq x < m+1$, 故 $m+n \leq x+n < m+n+1$, 即 $\lfloor x+n \rfloor = m+n$.(3) 设 $\lfloor x \rfloor = m, m = qn+r, 0 \leq r < n$. 由 $m \leq x < m+1$ 得 $\frac{m}{n} \leq \frac{x}{n} < \frac{m+1}{n}$, 即 $\frac{qn+r}{n} \leq \frac{x}{n} < \frac{qn+r+1}{n}$, 故 $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = q = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$.(4) 由 $x \geq \lfloor x \rfloor$ 和 $y \geq \lfloor y \rfloor$ 得 $x + y \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, 故 $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. 另一方面 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ 和 $\lfloor x+y \rfloor$ 都是整数且差值小于 2. □

定理 1.10 (勒让德定理) 在 $n!$ 的素因数分解中, 素数 p 的指数为

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{1-3}$$

该级数实际上是有限的, 因为当 $p^k > n$ 时各项为零.

证明 在 $1, 2, \ldots, n$ 中, p 的倍数有 $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ 个, 每个贡献一个 p 因子; p^2 的倍数有 $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ 个, 每个额外贡献一个 p 因子; 以此类推. 各层贡献求和即得. □

例题 1.80 求 100! 末尾零的个数. 末尾零的个数等于 10 的因子个数, 即 $\min(v_2(100!), v_5(100!))$. 由勒让德定理:

$$v_5(100!) = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{125} \right\rfloor = 20 + 4 + 0 = 24$$

知乎@余命数

$v_2(100!)$ 远大于 24, 故末尾有 24 个零.

1.6.3 欧拉函数

知乎@余命数

定义 1.8 (欧拉函数) 对正整数 n, 欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示 1 到 n 中与 n 互素的整数个数.

知乎@余命数

定理 1.11 (欧拉函数的计算公式) 若 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$, 则

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) \tag{1-4}$$

证明 先计算 $\varphi(p^k)$. 在 1 到 p^k 中, 与 p 不互素的数恰是 p 的倍数, 共 p^{k-1} 个, 故 $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^{k-1}(p-1)$.

再证积性. 若 $(a,b)=1$, 则 $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$. 这可由中国剩余定理得出: a 的完全剩余系与 b 的完全剩余系的笛卡尔积与 ab 的完全剩余系一一对应, 互素条件保持.

将积性应用于标准分解式即得 (1-4). □

知乎@余命数

例题 1.81 $\varphi(12)=\varphi(2^2\times3)=12\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=4$. 验证: 1 到 12 中与 12 互素的数为 $1,5,7,11$, 共 4 个.

1.6.4 欧拉定理与费马小定理

定理 1.12 (欧拉定理) 若 $(a,n)=1$, 则

$$a^{\varphi(n)}\equiv1\pmod n \tag{1-5}$$

证明 设 $r_1,r_2,\dots,r_{\varphi(n)}$ 是模 n 的一个缩系, 即 1 到 n 中与 n 互素的 $\varphi(n)$ 个整数. 因为 $(a,n)=1$, 所以 $ar_1,ar_2,\dots,ar_{\varphi(n)}$ 也是模 n 的缩系, 其中任意两个模 n 互不同余, 且每个都与 n 互素. 于是

知乎@余命数

$$\prod_{i=1}^{\varphi(n)}r_i\equiv\prod_{i=1}^{\varphi(n)}ar_i=a^{\varphi(n)}\prod_{i=1}^{\varphi(n)}r_i\pmod n$$

知乎@余命数

两边约去 $\prod r_i$(它与 n 互素,可在模 n 下消去)即得 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. □

推论 1.1 (费马小定理) 若 p 为素数且 $(a,p)=1$,则

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \tag{1-6}$$

证明 $\varphi(p) = p-1$,代入欧拉定理即得. □

费马小定理也可写为 $a^p \equiv a \pmod{p}$(对任意整数 a,不要求 $(a,p)=1$).

例题 1.82 (RSA 公钥加密) RSA 加密利用大数分解的困难性保障安全. 选两个大素数 p 和 q,令 $n=pq$. 公开 n 和加密指数 e(满足 $(e,\varphi(n))=1$),保密解密指数 d,它满足 $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. 加密消息 m 为 $c \equiv m^e \pmod{n}$,解密为 $m \equiv c^d \pmod{n}$.
正确性验证:$c^d \equiv m^{ed} \pmod{n}$. 由 $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$,设 $ed = 1 + k\varphi(n)$. 当 $(m,n)=1$ 时,由欧拉定理 $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$,故 $m^{ed} = m \cdot (m^{\varphi(n)})^k \equiv m \pmod{n}$. 当 $(m,n) \neq 1$ 时,利用中国剩余定理分别在模 p 和模 q 下验证可得同一结论.

1.6.5 中国剩余定理

定理 1.13 (中国剩余定理) 设 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ 两两互素,则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \cdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases} \tag{1-7}$$

在模 $M = m_1 m_2 \cdots m_k$ 下有唯一解.

证明 **存在性**. 令 $M_i = M/m_i$,则 $(M_i, m_i)=1$,存在 t_i 使 $M_i t_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. 令

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i M_i t_i$$

对每个 j,当 $i \neq j$ 时 $m_j \mid M_i$,故 $x \equiv a_j M_j t_j \equiv a_j \pmod{m_j}$.

唯一性. 若 x_0 和 x_1 都是解,则 $m_i \mid (x_0 - x_1)$ 对所有 i 成立. 由 m_i 两两互素,$M \mid (x_0 - x_1)$,故 $x_0 \equiv x_1 \pmod{M}$. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.83　求解 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$.

解　$M = 3 \times 5 \times 7 = 105. M_1 = 35, M_2 = 21, M_3 = 15.$

求 $t_1 : 35t_1 \equiv 2t_1 \equiv 1 \pmod 3, t_1 = 2.$ 求 $t_2 : 21t_2 \equiv t_2 \equiv 1 \pmod 5, t_2 = 1.$ 求 $t_3 : 15t_3 \equiv t_3 \equiv 1 \pmod 7, t_3 = 1.$

$$x = 2 \times 35 \times 2 + 3 \times 21 \times 1 + 2 \times 15 \times 1 = 140 + 63 + 30 = 233 \equiv 23 \pmod{105}$$

验证：$23 \equiv 2 \pmod 3, 23 \equiv 3 \pmod 5, 23 \equiv 2 \pmod 7.$ 解为 $x \equiv 23 \pmod{105}$.

中国剩余定理把对大模数 M 的同余问题分解为对若干小模数 m_i 的同余问题，在计算数论中用于简化大模数运算.

知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 2 章

集合与映射



基础语言

「数学的本质在于其自由。」

——康托尔

第二章 集合与映射

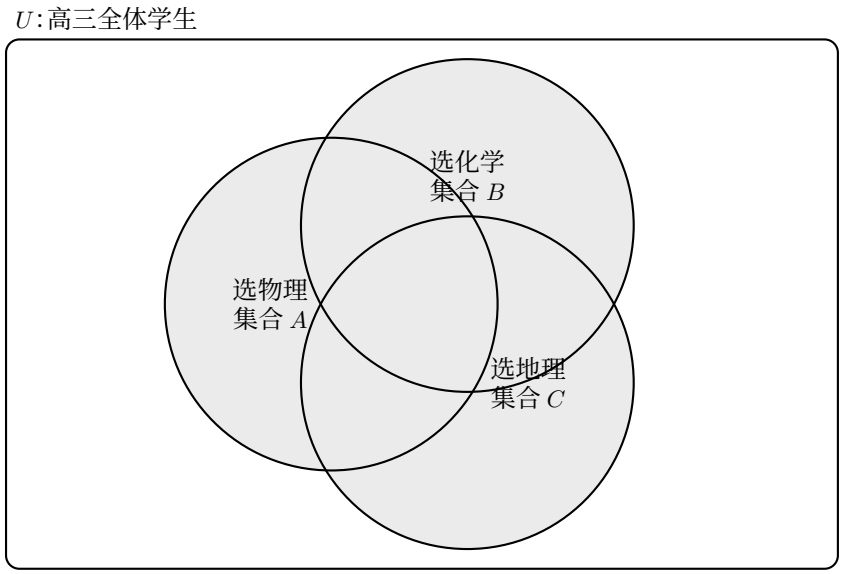


图 2.1 三集合的韦恩图:重叠区域表示交集

新高考选科后,学校要统计学生的选课情况,以便分班和安排教学资源. 设选物理、化学、地理的学生分别构成集合 A、B、C. 已知每个集合的人数,也知道两两交集与三者交集的人数. 至少选了一科的学生总数、只选了物理这一科的学生人数,都能用集合的运算不重不漏地算出.

本章引入集合与映射,用它们统一描述数集、函数定义域、方程解集等对象,并给出严谨表达推理的逻辑用语. 本章依次讨论.

- 集合的定义、表示方法、关系与运算.
- 常用数集及其扩张历程,特别是实数系的完备性.
- 逻辑用语,包括四种命题与量词否定.
- 充要条件与集合包含关系的等价转化.

章首图的选科问题,可以用本章的集合运算解决.

2.1 集合论初步

2.1.1 集合的概念与性质

我们常常把若干对象汇集起来当作一个整体来研究. 动物园里的猫科动物群、一支球队的队员、太阳系中的行星,乃至所有小于 10 的素数,都是这样的例子.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这些例子中的总体、群体或全体,称谓不同,都是指由确定对象构成的整体. 为精确描述这样的整体, 数学引入了集合.

定义 2.1 (集合) 把确定的、可互相区分的事物汇集成的整体称为**集合**. 构成集合的每个事物称为该集合的**元素**.

这个定义给出集合的三条基本性质.

▷ **确定性**　任意对象是否属于给定集合, 答案必须明确. 例如, 所有大于 π 的实数构成集合;世界上所有著名的数学家则不能,因为著名的标准模糊.

▷ **互异性**　集合中元素互不相同. 重复出现只计一次. 例如, 方程 $(x-1)^2=0$ 的解集是 $\{1\}$.

知乎@余命数

▷ **无序性**　集合中元素没有顺序. 例如, $\{1,2,3\}$ 与 $\{3,1,2\}$ 是同一个集合.

通常用大写斜体字母 $A,B,C,\ldots$ 表示集合, 用小写斜体字母 $a,b,c,\ldots$ 表示元素. 若 a 属于集合 A, 记作 $a\in A$, 读作 a 属于 A;若 a 不属于集合 A, 记作 $a\notin A$, 读作 a 不属于 A.

知乎@余命数

2.1.2 集合的表示方法

2.1.2.0.1　列举法　若集合元素有限或规律明显, 可把所有元素一一列出, 并用花括号 {} 包起来. 例如, 所有正偶数的集合写成 $\{2,4,6,8,\ldots\}$.

2.1.2.0.2　描述法　描述法给出集合中元素共同满足的条件, 以此定义集合, 标准形式为 $\{x\mid P(x)\}$. 例如, 方程 $x^2-9=0$ 的解集写成 $\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-9=0\}$.

知乎@余命数

2.1.2.0.3　维恩图法　英国数学家约翰·维恩用平面上的封闭曲线(通常是圆)表示集合及其关系, 这种方法称为维恩图.

例题 2.1　用列举法表示集合 $A=\{d\mid d=\frac{6}{5-a}\in\mathbb{N}^*,a\in\mathbb{Z}\}$.

知乎@余命数

解　集合 A 的元素是 d, 它要同时满足两条.

1. d 是正自然数, 即正整数 ($d\in\mathbb{N}^*$).
2. d 由整数 a 决定, $d=\dfrac{6}{5-a}$.

因为 d 是整数, 分母 $(5-a)$ 必须是 6 的整数因数;又因为 d 为正且分子为 6, 分母 $(5-a)$ 也必须是正数. 于是 $(5-a)$ 是 6 的正因数, 可能取值为 $1,2,3,6$.

我们将 $5-a$ 依次取 $1,2,3,6$ 代入. 当 $5-a=1$ 时 $a=4,d=6$;当 $5-a=2$ 时 $a=3,d=3$;当 $5-a=3$ 时 $a=2,d=2$;当 $5-a=6$ 时 $a=-1,d=1$.

因此 $A=\{1,2,3,6\}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 2.1 (参数与元素的辨析)
这里常见的错误是把满足条件的参数集合 $\{-1,2,3,4\}$ 错当成集合 A. 描述法中, 竖线左侧的变量才是集合的元素; 本例中左侧变量为 d, 参数 a 只是生成元素的工具, 不属于集合.

例题 2.2 用列举法表示集合 $S=\{y \mid y=x^2,-1<x<2,y\in\mathbb{Z}\}$.

解 集合 S 的元素是满足 $y=x^2$ 且 $-1<x<2$ 的整数 y. 求解时可以先去掉整数限制, 求出 y 的连续取值范围, 再从中挑出整数.

函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-1,2)$ 上的变化分三段.

- 当 x 从 -1 趋近 0 时, y 从 1 减小到 0.
- 当 $x=0$ 时, y 取最小值 0.
- 当 x 从 0 增大到 2 时, y 从 0 增大到 4.

于是当 x 遍历 $(-1,2)$ 时, y 的取值范围是 $[0,4)$, 其中 0 可取到, 4 取不到.

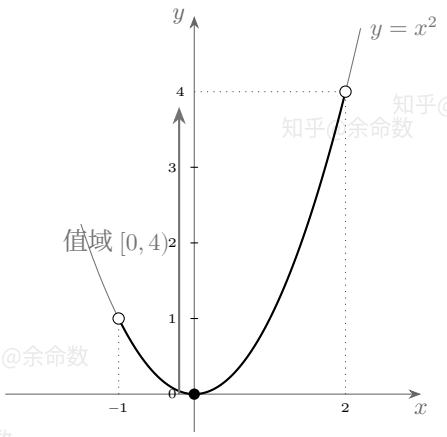


图 2.2 函数 $y=x^2$ 在定义域 $x\in(-1,2)$ 上的图像(加粗曲线). 其值域为 $[0,4)$, 其中整数点已在 y 轴上标出.

再加上 $y\in\mathbb{Z}$ 的限制, $[0,4)$ 中的整数只有 $0,1,2,3$. 因此 $S=\{0,1,2,3\}$.

2.1.3 常用数集与数系的扩张

数学中常出现几类数集, 它们的包含关系对应着数系在运算封闭性驱动下逐次扩张的过程. 所谓封闭性, 是指集合中的元素经过某种运算后, 结果仍属于该集合.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.1.3.1 从自然数到整数与减法封闭

自然数用于计数, 即 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. 在自然数集中, 加法和乘法封闭, 减法却不一定. 例如方程

$$x + 5 = 2$$

在自然数集中无解. 为使任意减法都有意义, 我们引入**负整数**. 把正整数、0、负整数合并, 得到**整数集** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. 记号 $\mathbb{Z}$ 来自德语 Zahlen(意为"数"). 由定义有 $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, 例如 $-1 \in \mathbb{Z}$ 但 $-1 \notin \mathbb{N}$.

2.1.3.2 从整数到有理数与除法封闭

整数集解决了减法封闭问题, 但除法又提出了新的要求. 方程

$$3x = 1$$

在整数集中无解. 为使除法封闭, 即除数不为 0 时封闭, 我们引入**分数**. 能写成两个整数之比的数构成**有理数集** $\mathbb{Q}$, 即

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

记号 $\mathbb{Q}$ 来自德语 Quotient(意为"商"). 整数可看作分母为 1 的分数, 因此 $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$.

2.1.3.3 从有理数到实数(补全数轴的完备性)

有理数集 $\mathbb{Q}$ 在数轴上稠密. 任意两个不同有理数之间都有无穷多个有理数. 但这不意味着有理数填满了整个数轴. 毕达哥拉斯学派发现, 边长为 1 的正方形对角线长度 $\sqrt{2}$ 不能写成两个整数之比. 这类数称为**无理数**. 著名的无理数还有圆周率 π 和自然对数的底 e.

把有理数与无理数合并, 得到能与数轴上的点一一对应的**实数集** $\mathbb{R}$. 这个描述直观但不严格, 既未说明为何不再有空隙, 也未给出实数集的构造. 我们用戴德金分割给出严格定义.

设想捕捉数轴上一个点的精确位置. 我们把有理数集分成两个非空集合 L 和 R, 使得 L 中每个数都小于 R 中每个数, 这个有序对 (L, R) 称为有理数集的一个**分割**. 我们考察分割边界所在的位置.

情况一, 边界落在有理数上. 我们取有理数 $q = 3$, 定义

- $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 3\}$,
- $R = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 3\}$.

在这个分割中, 左集合 L 有最大元素 3, 该元素标记了分割的位置.(我们也可定义 $L = \{x < 3\}, R = \{x \geq 3\}$, 此时右集合有最小元素. 边界点总会被其中一个集合包含.)

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

情况二, 边界落在空隙中. 在 $\sqrt{2}$ 所在的位置无法用有理数表示, 我们只能依有理数的性质定义分割.

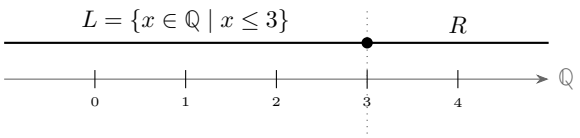
- $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ 或} x^2 < 2\}$,
- $R = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ 且} x^2 > 2\}$.

我们分析这个分割 (L, R) 的边界.

- L 没有最大元素. 任取 $x_0 \in L$ 接近 $\sqrt{2}$, 总可找到 $x_1 \in L$ 使得 $x_0 < x_1$.
- R 没有最小元素. 任取 $y_0 \in R$ 接近 $\sqrt{2}$, 总可找到 $y_1 \in R$ 使得 $y_1 < y_0$.

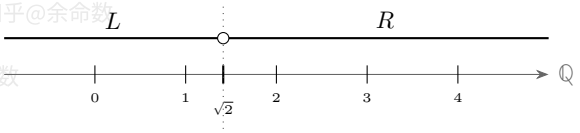
此时边界既不是 L 的最大元素, 也不是 R 的最小元素, 它落在有理数集的一个空隙中.

情况一:边界在有理数 3 处



分割由 L 中的
最大元素 3 确定.

情况二:边界在空隙 $\sqrt{2}$ 处



在 $\mathbb{Q}$ 中, L 无最大元素,
R 无最小元素. 分割
定义了一个**空隙**.

图 2.3 左侧实心点表示该边界点属于 L; 右侧空心点表示边界点在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中不被任何一个集合包含.

十九世纪德国数学家戴德金提出一种构造, 直接用**分割本身定义数**, 无需寻找填补空隙的数.

- 每一个有理数集的分割 (L, R) 就是**一个实数**.
- 若 L 有最大元素或 R 有最小元素, 这个分割定义了一个**有理数**.
- 若 L 没有最大元素**且** R 没有最小元素, 这个分割定义了一个**无理数**.

于是, 实数集 $\mathbb{R}$ 可严格定义为有理数集 $\mathbb{Q}$ 上所有分割的集合. 这个构造保证了实数轴的连续性与**完备性**, 即不存在空隙.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.3 用戴德金分割定义有理数 $q=\frac{2}{3}$, 并说明它与无理数分割的区别.

解 我们按有理数分割的特征构造

$$L=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x\le\frac{2}{3}\right\},\quad R=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x>\frac{2}{3}\right\}.$$

左集合 L 中, 由定义 $\frac{2}{3}\in L$, 且 L 中任意元素 p 都满足 $p\le\frac{2}{3}$, 故 $\frac{2}{3}$ 是 L 的**最大元素**.

右集合 R 中, 假设 R 有最小元素 $r_{\min}$, 则 $r_{\min}>\frac{2}{3}$. 我们取

$$m=\frac{1}{2}\left(r_{\min}+\frac{2}{3}\right).$$

m 是有理数, 且满足 $\frac{2}{3}<m<r_{\min}$, 因此 $m\in R$ 且 $m<r_{\min}$, 这与 $r_{\min}$ 是最小元素矛盾, 所以 R 没有最小元素.

为 $\frac{2}{3}$ 构造的分割 (L,R), 左集合有最大元素 $\frac{2}{3}$, 右集合没有最小元素; 而为 $\sqrt{2}$ 构造的分割, 左右集合都不存在边界元素. 两者的区别在此. 有理数分割的边界被其中一个集合包含, 没有产生空隙; 无理数分割的边界则悬于两个集合之间, 定义了一个空隙.

高中阶段常用的数集按包含关系排成如下链.

$$\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}\subsetneq\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R}$$

2.1.4 集合间的基本关系

定义 2.2 (子集与真子集) 对于两个集合 A 和 B, 若 A 中任意元素都属于 B, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A\subseteq B$.

$$A\subseteq B\iff\forall x,\ (x\in A\implies x\in B).$$

如果 $A\subseteq B$, 且 B 中至少有一个元素不属于 A, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记作 $A\subsetneq B$.

子集概念的两个直接推论是空集的地位与集合相等的判定.

命题 2.1 (空集与相等) 不含任何元素的集合称为**空集**, 记作 $\emptyset$.

- **空集的性质**. 空集是任何集合的子集.
- **集合相等**.$A=B\iff A\subseteq B$ 且$B\subseteq A$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 按子集定义, $\emptyset \subseteq A$ 等价于命题 $\forall x,\ (x \in \emptyset \implies x \in A)$ 为真. 该蕴含命题的前提 $x \in \emptyset$ 恒为假, 因为空集不含任何元素. 在逻辑中, 前提为假的蕴含命题恒为真, 称为**空虚的真**, 故 $\emptyset \subseteq A$ 对任意集合 A 成立.

我们再证集合相等. 若 $A = B$, 则任取 $x \in A$ 都有 $x \in B$, 任取 $x \in B$ 都有 $x \in A$, 所以 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$. 反过来, 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则任意元素 x 满足

$$x \in A \implies x \in B, \qquad x \in B \implies x \in A.$$

因而 $x \in A \iff x \in B$ 对任意 x 成立, 两个集合元素完全相同, 故 $A = B$. □

例题 2.4 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 集合 $B = \{x \mid ax = 2\}$. 若 $A \cup B = A$, 求所有使条件成立的实数 a 构成的集合.

解 $A \cup B = A$ 等价于 $B \subseteq A$, 即 B 的元素已全部在 A 中.

集合 A 由方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解构成, 因式分解得 $(x-1)(x-2) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 2$, 所以 $A = \{1, 2\}$.

再讨论 $B = \{x \mid ax = 2\}$ 成为 A 的子集的条件.

当 $a = 0$ 时, 方程变为 $0 \cdot x = 2$, 无解, 于是 $B = \emptyset$, 而空集是任何集合的子集, 所以 $a = 0$ 是解.

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax = 2$ 有唯一解 $x = \frac{2}{a}$, 即 $B = \{\frac{2}{a}\}$. $B \subseteq A$ 要求 $\frac{2}{a} \in \{1, 2\}$.

- 由 $\frac{2}{a} = 1$ 得 $a = 2$.
- 由 $\frac{2}{a} = 2$ 得 $a = 1$.

因此实数 a 的取值集合为 $\{0, 1, 2\}$.

例题 2.5 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - m \leq x \leq 3 + m\}$. 若 $A \subsetneq B$, 求实数 m 的取值范围.

解 由不等式 $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ 即 $(x-1)(x-3) \leq 0$ 得 $1 \leq x \leq 3$, 于是 $A = [1, 3]$.

$A \subsetneq B$ 表示 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$. 为使区间 $[1, 3]$ 被 $[1 - m, 3 + m]$ 覆盖, 需要

$$\begin{cases} 1 - m \leq 1, \\ 3 + m \geq 3, \\ 1 - m \leq 3 + m, \end{cases}$$

化为 $m \geq 0$、$m \geq 0$、$m \geq -1$, 三者同时成立即 $m \geq 0$.

再排除相等的情形. 若 $A = B$, 则端点重合, 由 $1 - m = 1$ 与 $3 + m = 3$ 解得 $m = 0$, 因此为使 $A \neq B$, 必须 $m \neq 0$.

结合两个条件得 $m > 0$.

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.6　已知集合 $A=\{0,1,a\}$, $B=\{-1,a+1,a^2\}$. 若 $A=B$, 求实数 a 的值.

解　集合相等表示两个集合的元素完全相同, 与顺序无关. 我们从集合 B 中已知的 -1 入手, 确定 a.

因为 $A=B$, 所以 $-1\in A$. 而 $0\neq -1$, $1\neq -1$, 故

$$a=-1.$$

知乎@余命数

这只给出了必要条件, 还需验证充分性. 把 $a=-1$ 代入, 得

$$A=\{0,1,-1\},\qquad B=\{-1,0,1\}.$$

由集合的无序性, 两者元素相同, 所以 $A=B$ 成立.

因此 $a=-1$.

2.1.5 集合的基本运算

知乎@余命数

定义 2.3 (交集) 由所有既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的**交集**, 记作 $A\cap B$.

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且}x\in B\}.$$

交集对应逻辑关系中的且, 即两个集合的公共部分.

例题 2.7　已知集合 $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2-2x-3=0\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$. 求 $A\cap B$.

解　先把集合化为列举法或区间等更直观的形式. 解方程 $x^2-2x-3=0$, 因式分解得 $(x-3)(x+1)=0$, 于是 $x=3$ 或 $x=-1$, 两个都是整数. 因此

$$A=\{-1,3\}.$$

集合 B 是开区间 $(1,+\infty)$.

我们按交集定义检验 A 中的元素.$-1\in A$, 但 $-1\not>1$, 故 $-1\notin B$; $3\in A$, 且 $3>1$, 故 $3\in B$.

同时属于两个集合的元素只有 3, 所以 $A\cap B=\{3\}$.

知乎@余命数

例题 2.8 设集合 $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x\le 5\}$,集合 $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-x-6>0\}$. 求 $A\cap B$.

解 涉及不等式的集合运算, 常在数轴上分析.

集合 A 是闭区间 $[-2,5]$.

解 B 中的二次不等式 $(x-3)(x+2)>0$, 得 $x<-2$ 或 $x>3$. 因此

$$B=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty).$$

知乎@余命数

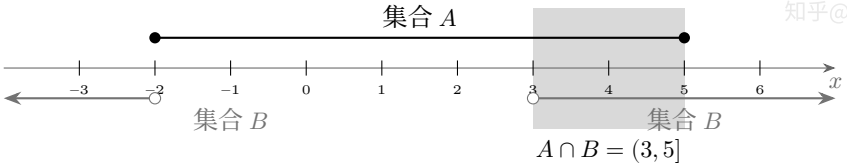


图 2.4 利用数轴求 $A\cap B$.

公共区域位于 3 到 5 之间, 端点单独判断. 左端点 $3\in A$, 但 B 要求 $x>3$, 所以 $3\notin A\cap B$; 右端点 $5\in A$ 且 $5>3$, 所以 $5\in A\cap B$.

于是 $A\cap B=(3,5]$.

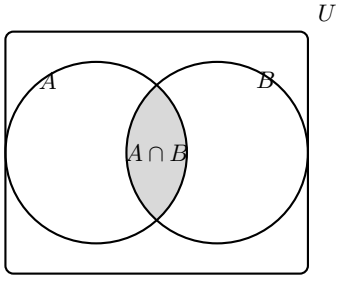


图 2.5 交集 $A\cap B$ 的维恩图示意(阴影部分)

定义 2.4 (并集) 由所有属于 A 或属于 B 的元素构成的集合, 称为 A 与 B 的**并集**, 记作 $A\cup B$.

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或}x\in B\}.$$

这里的或是包容性的, 包含同时属于两者的情况.

例题 2.9 已知集合 $A=\{-1,3\}$, 集合 $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$. 求 $A\cup B$.

解 A 含整数 -1 和 3; B 是区间 $(1,+\infty)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

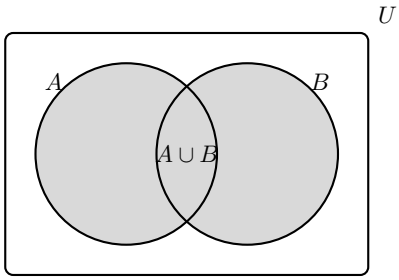


图 2.6　并集 $A \cup B$ 的维恩图示意(阴影部分)

合并时需遵循互异性.3 既属于 A, 又满足 $3 > 1$, 因此已包含在 $(1, +\infty)$ 中, 无需单独列出; -1 只属于 A, 需要单独列出.

于是

$$A \cup B = \{-1\} \cup (1, +\infty).$$

例题 2.10　设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ 或$x > 3\}$. 求 $A \cup B$.

解　在数轴上把两个集合覆盖的区域合并. 集合 $A = [-2, 5]$, 集合 $B = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

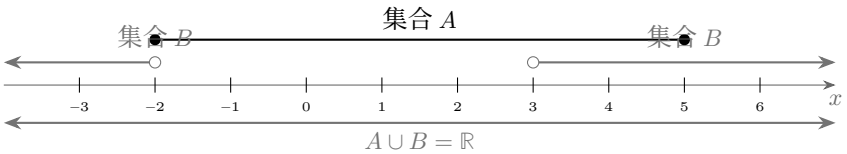


图 2.7　利用数轴求 $A \cup B$. 集合 A 填上了 B 在 $[-2, 3]$ 之间的空缺.

合并后, B 覆盖 $(-\infty, -2)$, $x = -2$ 不属于 B 但属于 A, 故 $-2 \in A \cup B$, 再并上 A 覆盖的 $[-2, 5]$ 与 B 覆盖的 $(3, +\infty)$, 得

$$A \cup B = (-\infty, -2) \cup [-2, 5] \cup (3, +\infty).$$

将 $(-\infty, -2) \cup [-2, 5]$ 合并为 $(-\infty, 5]$, 再与 $(3, +\infty)$ 取并集即得 $\mathbb{R}$.

故 $A \cup B = \mathbb{R}$.

知乎@余命数
知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 2.5 (补集) 若所研究的集合都是某个给定集合 U 的子集, 则称 U 为**全集**. 对于 U 的子集 A, 由 U 中不属于 A 的元素构成的集合, 称为 A 在 U 中的**补集**, 记作 $\complement_U A$.

$$\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且} x \notin A\}.$$

补集对应逻辑关系中的非, 即从全集中去掉 A 的元素.

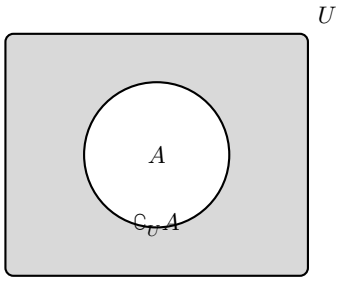


图 2.8 补集 $\complement_U A$ 的维恩图示意(阴影部分)

例题 2.11 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x \mid -1 < x \leq 3\}$. 求 $\complement_U A$.

解 $\complement_U A$ 是所有不满足 $-1 < x \leq 3$ 的实数, 即

$$x \notin (-1, 3] \iff x \leq -1 \text{ 或} x > 3.$$

端点开闭性取反, $x > -1$ 的否定是 $x \leq -1$, $x \leq 3$ 的否定是 $x > 3$.

在数轴上表示如下.

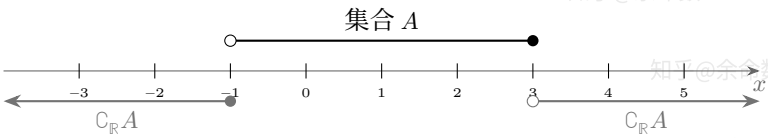


图 2.9 集合 A 与其在 $\mathbb{R}$ 中补集的数轴表示. 补集是数轴上去掉 A 后剩余的部分, 端点开闭性与 A 相反.

因此

$$\complement_U A = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty).$$

例题 2.12 设全集 $U = \mathbb{Z}$, 集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\}$. 求 $\complement_U A$.

解 全集是离散的 $\mathbb{Z}$, 补集也只能由整数组成.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$x^2 \le 9$ 等价于 $-3 \le x \le 3$. 加上 $x \in \mathbb{Z}$, 得

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

因此 $\complement_U A$ 是所有不在 A 中的整数, 即

$$\complement_U A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -3 \text{ 或} x > 3\} = \{\dots, -5, -4\} \cup \{4, 5, \dots\}.$$

注 2.2 (全集)
全集决定了补集的形式. 若在同一条件下取实数全集 $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 9\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A' = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$; 而本题全集是 $\mathbb{Z}$, 补集只能是整数集合.

知乎@余命数

2.1.6 集合的运算律

集合运算满足交换律、结合律、分配律等. 下面证明德摩根定律.

定理 2.1 (德摩根定律) 对于全集 U 及其任意子集 $A, B \subseteq U$, 我们有

$$\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$$
$$\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$$

证明 我们用逻辑等价推导证明. 任取 $x \in U$.

$$\begin{aligned}
x \in \complement_U(A \cup B) &\iff x \notin (A \cup B) && \text{(补集定义)} \\
&\iff \neg(x \in A \text{ 或} x \in B) && \text{(并集定义)} \\
&\iff (x \notin A) \text{ 且} (x \notin B) && \text{(逻辑德摩根律)} \\
&\iff (x \in \complement_U A) \text{ 且} (x \in \complement_U B) && \text{(补集定义)} \\
&\iff x \in (\complement_U A) \cap (\complement_U B) && \text{(交集定义)}
\end{aligned}$$

因此第一式成立. 同理, 对任意 $x \in U$ 我们有

$$\begin{aligned}
x \in \complement_U(A \cap B) &\iff x \notin (A \cap B) && \text{(补集定义)} \\
&\iff \neg(x \in A \text{ 且} x \in B) && \text{(交集定义)} \\
&\iff (x \notin A) \text{ 或} (x \notin B) && \text{(逻辑德摩根律)} \\
&\iff (x \in \complement_U A) \text{ 或} (x \in \complement_U B) && \text{(补集定义)} \\
&\iff x \in (\complement_U A) \cup (\complement_U B) && \text{(并集定义)}
\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两个等式两边都是 U 的子集, 且对任意 $x \in U$ 给出相同的归属关系, 故两式成立. □

例题 2.13 (导出容斥原理相关恒等式) 设 A, B, C 为有限集. 证明仅属于 A 的元素个数为

$$\operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).$$

知乎@余命数

解 我们取包含 $A \cup B \cup C$ 的全集 U. 仅属于 A 的元素满足 $x \in A$ 且 $x \notin B$、$x \notin C$, 即

$$A \cap (\complement_U B) \cap (\complement_U C).$$

由德摩根定律,

$$(\complement_U B) \cap (\complement_U C) = \complement_U (B \cup C),$$

所以上述集合可写成

$$A \cap \complement_U (B \cup C).$$

它的基数等于 A 中去掉 A 与 $B \cup C$ 的交集部分.

$$\operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap (B \cup C)).$$

用分配律, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 我们对右端应用二元容斥原理.

$$\begin{aligned} \operatorname{card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) &= \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A \cap C) \\ &\quad - \operatorname{card}((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

代回得

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(A \cap \complement_U (B \cup C)) \\ &\quad = \operatorname{card}(A) - (\operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B \cap C)) \\ &\quad = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

证毕.

例题 2.14 设全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x - 8 > 0\}$, $B = \{x \mid -1 \le x \le 5\}$. 求 $\complement_U (A \cup B)$.

解 直接算 $A\cup B$ 再求补集较繁琐,用德摩根定律更简单.

$$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B).$$

先求 $\complement_U A$. 由 $x^2-2x-8\le 0$ 得 $(x-4)(x+2)\le 0$, 于是 $-2\le x\le 4$, 即 $\complement_U A=[-2,4]$.

再求 $\complement_U B$. 由 $B=\{x\mid -1\le x\le 5\}$ 取补集得

$$\complement_U B=\{x\mid x<-1 \text{ 或} x>5\}=(-\infty,-1)\cup(5,+\infty).$$

于是

$$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=[-2,4]\cap((-\infty,-1)\cup(5,+\infty))=[-2,-1).$$

例题 2.15 某班级共 50 名学生, 一次考试中有两道压轴题. 答对第一题的有 30 人, 答对第二题的有 28 人, 两题都答对的有 15 人. 问两题都未答对的学生有多少人?

解 设 U 为全班学生, A 为答对第一题的学生集合, B 为答对第二题的学生集合. 题意给出

$$\text{card}(U)=50,\quad \text{card}(A)=30,\quad \text{card}(B)=28,\quad \text{card}(A\cap B)=15.$$

两题都未答对的学生属于 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$. 由德摩根定律,

$$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B).$$

因此所求人数为

$$\text{card}(\complement_U(A\cup B))=\text{card}(U)-\text{card}(A\cup B).$$

用容斥原理得

$$\begin{aligned}\text{card}(A\cup B)&=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)\\&=30+28-15=43.\end{aligned}$$

所以两题都未答对的人数为 $50-43=7$.

例题 2.16 设全集 $U=\mathbb{R}$,集合 $A=\{x\mid x^2-9>0\}$,$B=\{x\mid x^2-5x+4\le 0\}$. 求 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 一种办法是直接计算两个补集再取并集.$\complement_U A$ 满足 $x^2-9\le 0$, 即 $-3\le x\le 3$, 所以 $\complement_U A=[-3,3]$; $\complement_U B$ 满足 $(x-1)(x-4)>0$, 即 $x<1$ 或 $x>4$, 所以 $\complement_U B=(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$. 于是

$$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=[-3,3]\cup(-\infty,1)\cup(4,+\infty)=(-\infty,3]\cup(4,+\infty).$$

另一种办法是先化简再借助德摩根定律. 由 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$, 先把

$$A=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty),\quad B=[1,4]$$

取交集得 $A\cap B=(3,4]$, 再取补集得

$$\complement_U(A\cap B)=(-\infty,3]\cup(4,+\infty).$$

两种办法结果相同.

2.1.7 有限集的计数

定义 2.6 (集合的基数) 有限集合的元素个数称为该集合的**基数**, 记作 $\mathrm{card}(A)$.

基数度量有限集合的元素个数, 由此可计算子集总数.

定理 2.2 若 $\mathrm{card}(A)=n$, 则 A 的子集个数为 2^n.

证明 设 $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. 我们构造 A 的任意子集 S, 对每个元素 a_i 独立地选择 $a_i\in S$ 或 $a_i\notin S$. 把这一组选择编码为长度为 n 的二进制序列 $(b_1,b_2,\dots,b_n)$, 其中

$$b_i=\begin{cases}1, & a_i\in S,\\ 0, & a_i\notin S.\end{cases}$$

这给出了 A 的幂集 $\mathcal{P}(A)$ 到所有长度为 n 的二进制序列之间的双射.

每次选择有 2 种, n 次独立选择共有

$$\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n\text{个}}=2^n$$

种结果, 所以 A 的子集个数为 2^n. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.3 (容斥原理) 对任意有限集合 A, B, C, 我们有

- $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$.
- $$\begin{aligned}&\operatorname{card}(A \cup B \cup C)\\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C)\\ &\quad - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C)\\ &\quad + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

知乎@余命数

证明 二元情形. 把 $A \cup B$ 分成三块互不相交的部分.

知乎@余命数

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B).$$

三集合两两不交, 故

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A \setminus B) + \operatorname{card}(B \setminus A) + \operatorname{card}(A \cap B).$$

又 $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, 所以

$$\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

同理, $\operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$. 代入即得

知乎@余命数　知乎@余命数

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B).$$

三元情形. 令 $D = B \cup C$, 则 $A \cup B \cup C = A \cup D$. 由二元情形,

知乎@余命数

$$\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(D) - \operatorname{card}(A \cap D).$$

对 D 再用二元情形, 得

$$\operatorname{card}(D) = \operatorname{card}(B \cup C) = \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C) - \operatorname{card}(B \cap C).$$

对 $A \cap D$, 由分配律 $A \cap D = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 再用二元情形,

$$\operatorname{card}(A \cap D) = \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(A \cap B \cap C).$$

把 $\operatorname{card}(D)$ 与 $\operatorname{card}(A \cap D)$ 代回并整理, 得到

知乎@余命数

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}(A \cup B \cup C)\\ &= \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) + \operatorname{card}(C)\\ &\quad - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C)\end{aligned}$$

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$+\operatorname{card}(A\cap B\cap C).$$

证毕. □

知乎@余命数

2.2 映射

2.2.1 映射的概念

知乎@余命数

我们先观察数集之间的对应关系. 例如, $f(x)=x^2$ 把每个实数 x 对应到 x^2; 平面上的旋转变换把每个点对应到旋转后的点. 我们把这种对应关系推广到一般集合, 就得到**映射**.

定义 2.7 (映射) 设 A, B 是两个非空集合. 如果存在法则 f, 使得对每个 $x\in A$ 都有唯一确定的 $y\in B$ 与之对应, 那么我们称 f 为从 A 到 B 的一个**映射**, 并记作

$$f: A\to B.$$

其中 A 称为映射的**定义域**, B 称为映射的**陪域**.

这一定义包含三个要素, 即定义域 A、陪域 B 和对应法则 f. 它同时对 f 提出两条要求.

知乎@余命数

- **全域性**定义域中每个元素都有像.
- **单值性**每个元素的像唯一.

若 $x\in A$ 在 B 中对应 y, 则称 y 为 x 在 f 下的**像**, 记作 $y=f(x)$; 称 x 为 y 的一个**原像**. 定义域中所有元素的像构成集合, 称为 f 的**像集**或**值域**, 记作 $f(A)$.

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}.$$

显然 $f(A)\subseteq B$; 陪域 B 包含所有可能的像, 而像集是这些像中实际取到的部分.

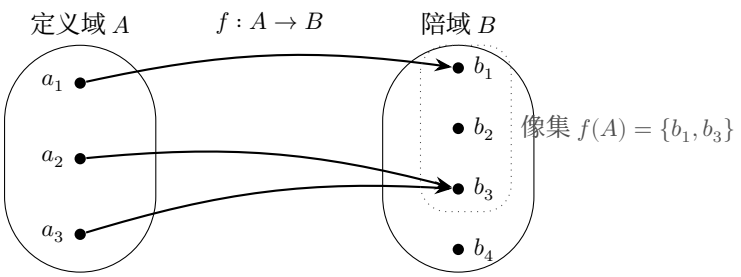


图 2.10 映射图示. 定义域 A 中每个元素都有唯一箭头指向其在陪域 B 中的像. 陪域中 b_2, b_4 没有原像; b_3 有两个原像 a_2, a_3.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.17　我们考察函数 $f(x)=x^2$. 将其视为映射, 分析定义域、陪域和像集对性质的影响.

解　我们先说明, 一个映射的性质由定义域、陪域和对应法则共同决定.

1. 取 $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2$. 像集为 $f_1(\mathbb{R})=[0,+\infty)$, 是陪域的真子集.
2. 取 $f_2:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$, $f_2(x)=x^2$. 对应法则与 f_1 相同, 但陪域缩小为非负实数集. 像集 $f_2(\mathbb{R})=[0,+\infty)$ 与陪域相等.
3. 取 $f_3:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f_3(x)=x^2$. 定义域也被限制为非负实数. 像集仍是 $[0,+\infty)$.
4. 取 $f_4:\mathbb{R}\to(-\infty,-1)$, $f_4(x)=x^2$. 这个定义不合法. 因为对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $x^2\geq 0$, 不属于陪域 $(-\infty,-1)$.

因此, 同一法则配以不同的定义域或陪域, 会得到不同的映射.

2.2.2 特殊映射

我们按像与原像的对应关系, 对映射作进一步分类.

定义 2.8 (单射、满射、双射) 设 $f:A\to B$ 为映射.

- 若对定义域中任意两个不同元素, 像也互不相同, 即

$$\forall x_1,x_2\in A,\ x_1\neq x_2\implies f(x_1)\neq f(x_2),$$

  则称 f 为**单射**或一对一映射.
- 若陪域中每个元素都至少有一个原像, 即像集等于陪域 ($f(A)=B$), 亦即

$$\forall y\in B,\ \exists x\in A,\ f(x)=y,$$

  则称 f 为**满射**或映上映射.
- 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射**或一一对应.

单射意味着不同输入对应不同输出; 满射意味着陪域中的每个元素都被取到; 双射则给出两个集合之间一一对应, 并且是可逆的.

例题 2.18　我们回到 $f(x)=x^2$ 的例子, 判断 f_1,f_2,f_3 各为何种映射.

解　我们逐一对照单射与满射的定义来检验 f_1,f_2,f_3.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 不是单射, 因为 $f_1(-2) = 4 = f_1(2)$ 而 $-2 \neq 2$; 也不是满射, 因为像集 $[0, +\infty) \neq \mathbb{R}$, 例如 -1 没有原像.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ 仍不是单射, 但它是满射. 任意 $y \in [0, +\infty)$ 都有原像 $\sqrt{y}$ 和 $-\sqrt{y}$.
3. $f_3 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是单射. 若 $f_3(x_1) = f_3(x_2)$, 则 $x_1^2 = x_2^2$, 而 $x_1, x_2 \geq 0$, 所以 $x_1 = x_2$. 它也是满射. 任意 $y \in [0, +\infty)$ 都有唯一原像 $\sqrt{y}$.
   因此 f_3 是双射. 平方根函数 $\sqrt{x}$ 取非负实数域为定义域, 正是为了保证它是双射.

知乎@余命数

2.3 逻辑用语初步

我们先说明数学推理所用的语言. 推理要求精确、没有歧义, 这种语言就是逻辑用语.

知乎@余命数

2.3.1 命题及其真值

知乎@余命数

定义 2.9 (命题) 我们称能判断真假的陈述句为**命题**.

我们把一个命题的判断结果称为其**真值**, 真值只有真、假两种.

例如, $3 > 2$ 是真命题, "所有素数都是奇数"是假命题(2 是素数且为偶数), 而 $x > 5$ 在 x 的值确定之前无法判断真假, 不是命题. 我们称含有变量的陈述句为*谓词*或*开命题*.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

2.3.2 逻辑联结词与集合运算

知乎@余命数

我们可以通过逻辑联结词把简单命题组合成复合命题. 这些联结词与集合运算存在对应关系.

定义 2.10 (基本逻辑联结词) 设 p, q 为两个命题.

- **否定**($\neg p$, 读作"非 p").p 真则 $\neg p$ 假, p 假则 $\neg p$ 真. 这对应集合的**补集**运算. 若 P 是使 p 为真的情形集合, 则使 $\neg p$ 为真的情形集合就是 $\complement_U P$.
- **合取**($p \wedge q$, 读作 p 且 q). 仅当 p 和 q 同时为真时, $p \wedge q$ 为真. 这对应集合的**交集** $P \cap Q$.
- **析取**($p \vee q$, 读作 p 或 q). 仅当 p 和 q 同时为假时, $p \vee q$ 为假. 这是包容性的或, 对应集合的**并集** $P \cup Q$.

知乎@余命数

$\neg p \iff \complement_U P$　　$p \wedge q \iff P \cap Q$　　$p \vee q \iff P \cup Q$

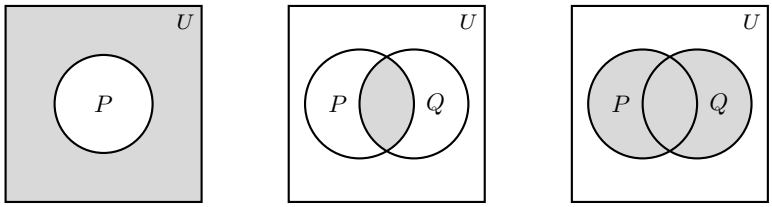


图 2.11　逻辑联结词与集合运算的对应关系

2.3.3 蕴含关系与充要条件

我们讨论条件命题, 数学中的定理大多写成“若 p 则 q”的形式.

定义 2.11 (蕴含命题) 我们称形如 “若 p 则 q” 的命题为**蕴含命题**, 并记作 $p \implies q$. p 称为**前提**或**条件**, q 称为**结论**. 我们规定, $p \implies q$ 的真值如下. **仅在 p 真且 q 假时为假**, 其余情况均为真.

我们在集合论中把蕴含关系对应到**子集关系**. 命题 $p \implies q$ 为真, 当且仅当使 p 为真的情形集合 P 是使 q 为真的情形集合 Q 的子集, 即 $P \subseteq Q$.

- 若前提 p 为假, 即 $x \notin P$, 则 x 是否在 Q 中与 $P \subseteq Q$ 的真假无关. 因此, 前提为假时蕴含命题恒为真, 我们称这种情况为**空虚的真**.

对蕴含命题 $p \implies q$, 我们构造三个关联命题.

- **逆命题** $q \implies p$.
- **否命题** $\neg p \implies \neg q$.
- **逆否命题** $\neg q \implies \neg p$.

定理 2.4　一个蕴含命题与其逆否命题**逻辑等价**, 即真值相同.

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p).$$

逆命题与否命题也逻辑等价.

证明　$p \implies q$ 仅在 p 真且 q 假时为假; 其逆否命题 $\neg q \implies \neg p$ 仅在“$\neg q$ 真且 $\neg p$ 假”时为假, 也就是 q 假且 p 真. 两者同时为假的情形完全相同, 所以真值相同, 即

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p).$$

同理, 逆命题 $q \implies p$ 仅在 q 真且 p 假时为假; 否命题 $\neg p \implies \neg q$ 仅在“$\neg p$ 真且 $\neg q$ 假”时为假, 即 p 假且 q 真. 两者同真假, 所以逆命题与否命题逻辑等价.　□

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这一定理是**反证法**的依据. 要证 $p \implies q$, 我们可以改证其逆否命题, 即由 $\neg q$ 推出 $\neg p$.

如果 $p \implies q$ 成立, 那么我们称 p 是 q 的**充分条件**, q 是 p 的**必要条件**.

- p 成立足以保证 q 成立.
- q 成立是 p 成立的必要前提.

若 $p \implies q$ 与 $q \implies p$ 同时成立, 记作 $p \iff q$, 则称 p 是 q 的**充分必要条件**, 也称充要条件. 这在集合论中对应 $P = Q$.

2.3.4 量词及其否定

为把谓词变成命题, 我们引入量词.

定义 2.12 (量词)
- **全称量词** $\forall$, 读作“对任意”或“所有”. 命题 $\forall x \in M, p(x)$ 为真, 当且仅当 M 中每个元素 x 都使 $p(x)$ 成立.
- **存在量词** $\exists$, 读作“存在”或“有些”. 命题 $\exists x \in M, p(x)$ 为真, 当且仅当 M 中至少存在一个元素 x_0 使 $p(x_0)$ 成立.

在证明与反驳中, 我们需要对量词命题作出正确的否定.

定理 2.5 (量词的否定)

$$\neg(\forall x \in M, p(x)) \iff \exists x \in M, \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x \in M, p(x)) \iff \forall x \in M, \neg p(x)$$

证明 $\forall x \in M, p(x)$ 为假, 当且仅当 M 中存在某个 x_0 使 $p(x_0)$ 不成立, 即 $\exists x \in M, \neg p(x)$.

$\exists x \in M, p(x)$ 为假, 当且仅当 M 中没有元素使 $p(x)$ 成立, 即每个 $x \in M$ 都使 $p(x)$ 不成立, 也就是 $\forall x \in M, \neg p(x)$. □

例题 2.19 我们写出命题“所有正方形的对角线都互相垂直”的否定.

解 设 S 为正方形集合, $p(x)$ 表示“x 的对角线互相垂直”. 原命题符号化为 $\forall x \in S, p(x)$.

由量词否定规则, 其否定为 $\exists x \in S, \neg p(x)$, 即“存在一个正方形, 它的对角线不互相垂直”.

原命题为真, 因此其否定为假.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.4 势与对角线法 *

有限集的大小用元素个数度量. 比较两个有限集合, 只需数一数谁的元素多. 无限集没有元素个数可言, 但 Cantor 发现, 无限集之间仍有大小之分, 有的无限集更大, 有的无限集较小. 区分的工具是*势*, 把双射当作配对的标准, 两个集合能一一配对就视为等势. 本节用对角线法证明实数集比自然数集更大, 并由此引出超越数的存在性.

2.4.1 可数集

定义 2.13 (可数集) 若集合 A 与自然数集 $\mathbb{N}$ 之间存在双射, 则称 A 是**可数集**. 等价地说, A 可数当且仅当它的元素可以排成一个无穷序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

使得每个元素恰好出现一次.

知乎@余命数

有限集也可视为可数集(序列在某项后停止). 按此定义, $\mathbb{N}$ 本身可数. 下面看两个不那么平凡的可数集.

例题 2.20 (整数集可数) 整数集 $\mathbb{Z}$ 是可数集.

证明 把整数按如下顺序排列:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots$$

第 1 项是 0, 第 $2n$ 项是 n, 第 $2n+1$ 项是 $-n (n \geq 1)$. 每个整数恰好出现一次, 这给出了 $\mathbb{N}^+$ 到 $\mathbb{Z}$ 的双射, 故 $\mathbb{Z}$ 可数. □

例题 2.21 (有理数集可数) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集.

证明 每个正有理数可写成既约分数 p/q, 其中 $p, q \in \mathbb{N}^+$. 把所有正有理数排成一张二维表, 第 p 行第 q 列放置 p/q:

沿反对角线 $p+q = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ 依次扫描, 先取 $1/1$, 再取 $1/2,\ 2/1$, 再取 $3/1,\ 2/2,\ 1/3$, 依此类推. 扫描中跳过非既约分数, 如 $2/2$, 每个正有理数恰好被取到一次. 这样得到正有理数集 $\mathbb{Q}^+$ 的一个排列.

负有理数与正有理数一一对应 $(q \mapsto -q)$, 把正、负有理数交替插入并补上 0, 得到 $\mathbb{Q}$ 的一个排列. 故 $\mathbb{Q}$ 可数. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

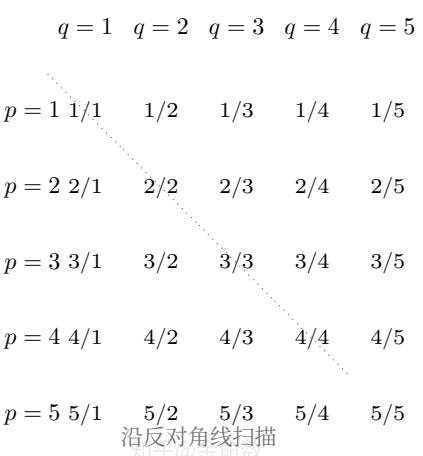


图 2.12 正有理数 p/q 排成二维表, 沿反对角线 $p+q=$ 常数 依次扫描.

可数集的并仍可数, 只要参与合并的可数集本身可枚举.

定理 2.6 (可数集的可数并) 若 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 是一列可数集, 则 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 也是可数集.

证明 把每个 A_k 的元素排成序列 $a_{k,1},\ a_{k,2},\ a_{k,3},\ \ldots$, 再像正有理数那样沿反对角线扫描二维表 $\{a_{k,j}\}$, 跳过重复元素. 每个元素都会被扫到, 合并后的集合可排成序列, 故可数. □

2.4.2 Cantor 对角线法

有理数在数轴上稠密, 任意两个实数之间都有有理数. 稠密似乎意味着元素很多, 但 $\mathbb{Q}$ 仍可数.Cantor 用对角线法证明实数集 $\mathbb{R}$ 不可数.

定理 2.7 (实数集不可数) 开区间 $(0,1)$ 不可数, 因而 $\mathbb{R}$ 不可数.

证明 反证. 假设 $(0,1)$ 可数, 则其元素可排成序列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$. 把每个 r_n 写成十进制小数(统一用不结尾全 9 的表示, 避免 $0.4999\cdots = 0.5000\ldots$ 的歧义):

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.\,d_{11}\,d_{12}\,d_{13}\,\cdots \\
r_2 &= 0.\,d_{21}\,d_{22}\,d_{23}\,\cdots \\
r_3 &= 0.\,d_{31}\,d_{32}\,d_{33}\,\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

其中 d_{nk} 是 r_n 的第 k 位小数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

构造一个新数 $s = 0.c_1\,c_2\,c_3\,\cdots$, 其第 n 位 c_n 取与 d_{nn} 不同的值. 为避开歧义, 规定

$$c_n = \begin{cases} 1, & d_{nn} \neq 1, \\ 2, & d_{nn} = 1. \end{cases}$$

这样 $c_n \in \{1, 2\}$, 不取 9, 小数 s 不以全 9 结尾, 表示唯一.

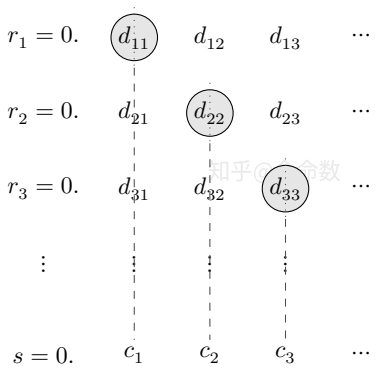


图 2.13　对角线构造:新数 s 的第 n 位 c_n 与 r_n 的第 n 位 d_{nn} 不同(圈出),故 s 与每个 r_n 都在某一位上相异.

对每个 n, s 的第 n 位 $c_n \neq d_{nn}$, 而 r_n 的第 n 位是 d_{nn}, 故 $s \neq r_n$. 序列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ 中没有任何一项等于 s.

但 $s \in (0,1)$,因为 $s = 0.c_1c_2c_3\cdots$ 且每位取 1 或 2,有 $0 < s \leq 0.222\cdots = 2/9 < 1$. 于是 s 属于 $(0,1)$ 却不在序列中, 与序列穷尽 $(0,1)$ 的假设矛盾.

故 $(0,1)$ 不可数. 而 $(0,1) \subset \mathbb{R}$, 若 $\mathbb{R}$ 可数则其子集 $(0,1)$ 亦可数, 矛盾, 故 $\mathbb{R}$ 不可数. □

对角线法的机制是, 给定任意一个枚举, 都能构造出一个不在其中的元素, 只要沿对角线逐位取反. 枚举者无论怎样调整顺序, 对角线数总能逃逸. 这把 $\mathbb{R}$ 比 $\mathbb{N}$ 更大这一断言从直觉提升为定理.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 在数轴上稠密, 却可数; 实数集 $\mathbb{R}$ 不可数. 稠密与不可数是两个独立的性质, 前者描述元素在局部如何分布, 后者描述集合整体的规模.

2.4.3 代数数与超越数

定义 2.14 (代数数与超越数) 若实数 α 是某个整系数多项式方程

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0,\ a_i \in \mathbb{Z})$$

的根, 则称 α 为**代数数**. 不是代数数的实数称为**超越数**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

每个有理数 p/q 都是代数数, 因为它是 $qx-p=0$ 的根.$\sqrt{2}$ 也是代数数, 它是 $x^2-2=0$ 的根.

定理 2.8 (代数数可数) 所有代数数构成的集合是可数集.

证明 整系数多项式 $a_nx^n+\cdots+a_0$ 由系数序列 $(a_n,\ldots,a_0)$ 决定. 固定次数 n 与高度 $h=|a_n|+\cdots+|a_0|$, 满足 h 的多项式只有有限个. 按 n、h 从小到大排列, 所有整系数多项式可排成序列, 故多项式集合可数.

每个多项式只有有限个根, 即次数为 n 的多项式至多 n 个实根. 可数个有限集的并仍可数(由定理 2.6), 故代数数集合可数. □

知乎@余命数

定理 2.9 (超越数的存在性) 超越数存在, 且超越数集合不可数.

证明 实数集 $\mathbb{R}$ 不可数, 代数数集合可数. 若超越数也可数, 则 $\mathbb{R}=$ 代数数 $\cup$ 超越数是两个可数集的并, 仍可数, 与 $\mathbb{R}$ 不可数矛盾. 故超越数集合不可数, 超越数存在. □

这个论证是非构造性的, 它证明了超越数极多, 却没有指出任何一个具体的超越数. 具体判定一个数是否超越, 往往极其困难. 以下两个结论在此只作陈述, 不给证明.

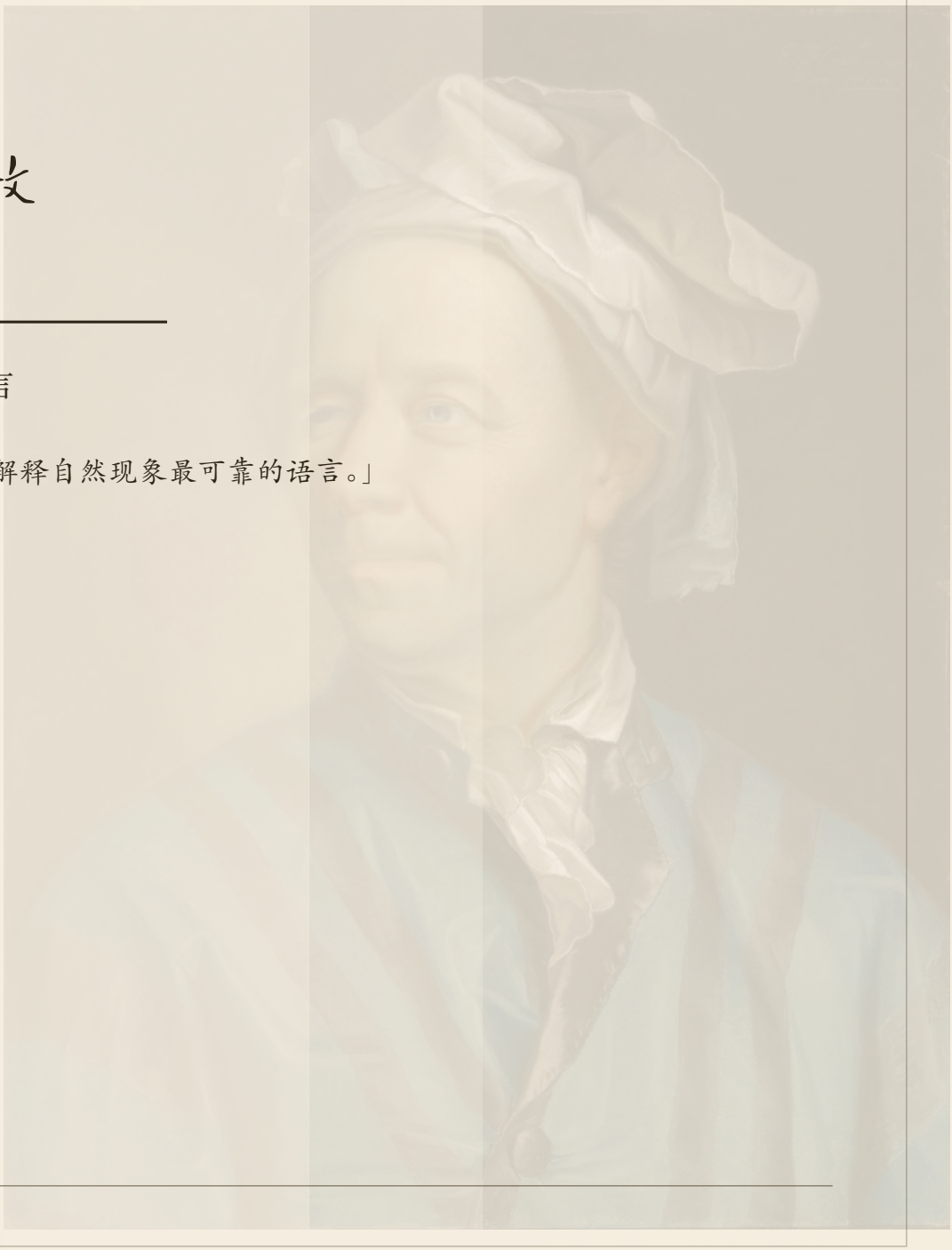
定理 2.10 (e 与 π 的超越性) 自然对数的底 e 和圆周率 π 都是超越数.

Hermite 于 1873 年证明了 e 的超越性, Lindemann 于 1882 年证明了 π 的超越性.Lindemann 的结果同时解决了古希腊三大几何难题之一的“化圆为方”问题, 即尺规作图无法作出与给定圆等积的正方形, 因为 $\sqrt{\pi}$ 是超越数, 而尺规可作的数都是代数数.

知乎@余命数

第 3 章

函数

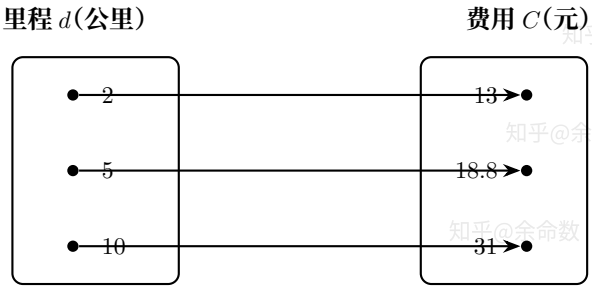


基础语言

「数学是解释自然现象最可靠的语言。」

——欧拉

第三章 函数



对应法则 $f:\ d \mapsto C$

起步价 13 元, 超出 3 公里部分每公里 2.4 元

图 3.1 从出租车计价看函数的对应关系

在物理与社会现象中, 一个量的值常常依赖于另一个量的值. 例如, 出租车的费用由行驶里程决定. 计价规则确保了对于任意给定的里程, 都存在一个**唯一确定**的费用与之对应. 数学的任务是为这类确定性的依赖关系建立一个精确的模型, 用一个普适的数学结构来刻画从一个输入集合到一个输出集合的对应关系.

本章建立函数的理论. 函数为变量之间的依赖关系提供了形式化的语言. 我们从函数作为一种特殊映射的严格定义出发, 研究单调性、奇偶性、周期性等性质, 再分析几类基本初等函数, 进而讨论函数的图像变换, 并把函数模型用于实际问题.

3.1 函数的概念

在数学中, 我们首先定义**映射** (mapping). 一个映射描述从一个集合 A 到另一个集合 B 的元素之间的对应法则. 函数是映射的特例, 其中集合 A 和 B 的元素均为**数**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.1.1 函数的定义

定义 3.1 (函数) 设 A, B 为两个非空的**实数子集**. 一个从 A 到 B 的**函数** (function) f, 是一个为 A 中**每一个**元素 x, 都在 B 中指派**唯一确定**的一个元素 y 的法则.
此函数可记作 $f : A \to B$, 其对应关系通常写作

$$y = f(x), \quad x \in A \tag{3-1}$$

我们称 x 为**自变量**, y 为**因变量**, 集合 A 为函数的**定义域**, 集合 B 为**陪域**.

函数由定义域 A、陪域 B 和对应法则 f 三部分构成. 定义要求两条来自映射的约束.

- **穷尽性**. 法则 f 必须对定义域 A 中的**所有**元素有效.
- **唯一性**.A 中任意元素 x 在 B 中的对应元素 y 是**唯**一的;一个输入不能产生多个输出.

定义允许多个不同的输入 x_1, x_2 对应同一个输出 y_0, 即 $f(x_1) = f(x_2) = y_0$.

记号 $y = f(x)$ 中, f 指整个函数(法则本身), 而 $f(x)$ 是法则 f 作用于自变量 x 后得到的具体数值.

注 3.1 (陪域与值域的辨析)
陪域和值域是两个相关但不同的概念.

- **陪域** B 是函数定义时预先指定的目标集合, 它包含了所有**可能**的输出值.
- **值域** $f(A)$ 是所有**实际**输出值的集合, 由定义域和对应法则完全确定. 其严谨定义为

$$f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\} \tag{3-2}$$

  值域始终是陪域的一个子集, 即 $f(A) \subseteq B$.

例如, 对于函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 其法则为 $f(x) = x^2$. 此函数的陪域是 $\mathbb{R}$, 但其值域是 $[0, +\infty)$.

我们接下来把集合 A, B 限定为数集. 于是函数表达式之间可以进行代数运算, 例如 $h(x) = f(x) + g(x)$. 我们还可以把函数与平面几何对象联系起来. 函数 f 的**图像** $\mathcal{G}_f$ 定义为点集

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in A\} \tag{3-3}$$

我们借助图像在几何直观中研究函数.

知乎@余命数

3.1.2 函数的三要素

我们研究函数时通常关注三个对象, 即**定义域**、**对应法则**和**值域**.

定义域给出函数的合法输入集合. 任何关于函数的讨论都以定义域为前提; 我们把它称为定义域优先. 定义域记作 $\mathrm{D}(f)$ 或 $\mathrm{dom}(f)$. 若函数仅由解析式给出而未明确指定定义域, 则定义域约定为使该解析式在实数范围内有意义的所有 x 的集合, 称为**自然定义域**.

对应法则描述输入与输出之间的具体关系, 通常由**解析式**给出, 如 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. **图像**与**表格**也是表示对应法则的有效形式.

值域是所有函数值构成的集合, 由定义域和对应法则完全决定. 求一个函数的值域, 就是找出它在定义域上的所有输出.

3.2 定义域

我们称函数的**自然定义域** (natural domain) 为使该函数解析式在实数域 $\mathbb{R}$ 内有意义的全体自变量 x 构成的集合. 它通常由解析式中的不等式或方程确定.

3.2.1 基本代数结构的约束

我们先看函数解析式中的基本代数结构会带来哪几类典型约束.

- **分式** $\frac{f(x)}{g(x)}$. 分母不为零, 即 $g(x)\neq 0$.
- **偶次根式** $\sqrt[2n]{f(x)}$ **(**$n\in\mathbb{N}^*$**)**. 被开方数非负, 即 $f(x)\geq 0$.
- **对数** $\log_a f(x)$. 真数大于零, 即 $f(x)>0$.
- **零次幂** $[f(x)]^0$. 底数不为零, 即 $f(x)\neq 0$.

3.2.2 实际问题中的隐性定义域

当函数模型源于实际问题时, 其定义域除受上述代数结构约束外, 还必须符合问题本身的物理或逻辑意义. 例如, 代表时间、长度或数量的变量通常被限制为非负数.

例题 3.1 求函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x-4}$ 的定义域.

解 该函数的定义域受两个约束. 根式 $\sqrt{x-2}$ 要求被开方数非负; 分母 $x-4$ 不得为零. 二者组成不等式组

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-4\neq 0 \end{cases}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

其解为 $x \geq 2$ 且 $x \neq 4$.

因此, 函数的定义域为 $[2,4) \cup (4,+\infty)$.

例题 3.2　求函数 $y = \sqrt{9-x^2} + \log_2(x+1)$ 的定义域.

解　函数的定义域是其所有组成部分均有意义的 x 的集合.

对于根式项 $\sqrt{9-x^2}$, 被开方数必须非负, 即 $9-x^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq x \leq 3$.

对于对数项 $\log_2(x+1)$, 真数必须为正, 即 $x+1>0$, 解得 $x>-1$.

函数的定义域是这两个解集的交集. 联立不等式组

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x > -1 \end{cases}$$

其解集为 $(-1,3]$. 因此, 函数的定义域为 $(-1,3]$.

例题 3.3　求函数 $f(x) = \frac{(x^2-4)^0}{\sqrt{x+1}-2}$ 的定义域.

解　此函数的定义域需同时满足三个条件.

零次幂的底数 x^2-4 不为零, 故 $x \neq 2$ 且 $x \neq -2$.

分母 $\sqrt{x+1}-2$ 不为零, 即 $\sqrt{x+1} \neq 2$, 两边平方得 $x+1 \neq 4$, 故 $x \neq 3$.

分母中的根式要求被开方数 $x+1$ 非负, 即 $x \geq -1$.

综合得 $x \in [-1,+\infty)$ 且 $x \neq 2, x \neq 3$.$x \geq -1$ 已自动排除 $x=-2$.

因此, 定义域为 $[-1,2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$.

例题 3.4　求函数 $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)}$ 的定义域.

解　这是复合函数, 其约束条件由外向内逐层分析. 最外层的根式结构要求其被开方数非负

$$\log_{0.5}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) \geq 0$$

由于对数底数 $0.5 \in (0,1)$, 对数函数 $\log_{0.5} t$ 严格单调递减. 又 $\log_{0.5} 1 = 0$, 于是上述不等式等价于

$$0 < \frac{2x-1}{x+2} \leq 1$$

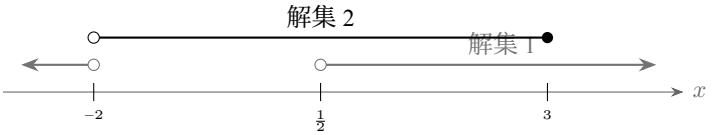
我们把它分解为两个不等式

$$\frac{2x-1}{x+2} > 0 \tag{3-4}$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

$$\frac{2x-1}{x+2} \le 1 \tag{3-5}$$

不等式 (3-4) 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$. 不等式 (3-5) 移项通分得 $\frac{x-3}{x+2}\le 0$, 其解集为 $(-2,3]$.



函数的定义域是这两个解集的交集, 即 $((-\infty,-2)\cup(\frac{1}{2},+\infty))\cap(-2,3]$.

因此, 定义域为 $(\frac{1}{2},3]$.

知乎@余命数

例题 3.5 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,4]$. 求函数 $g(x)=\frac{f(2x-1)}{\sqrt{x}}$ 的定义域.

解 函数 f 的定义域为 $[-1,4]$. 对于 $g(x)=\frac{f(2x-1)}{\sqrt{x}}$, f 的输入量 $2x-1$ 必须落在 $[-1,4]$ 内, 且分母 $\sqrt{x}$ 要求 $x>0$.

由 $-1\le 2x-1\le 4$ 得 $0\le x\le \frac{5}{2}$.

因此, 函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,\frac{5}{2}]$.

知乎@余命数 知乎@余命数

3.3 单调性

我们关心函数值怎样随自变量变化. 图像上升、下降是几何的说法, 本节把它写成一个严格的代数条件, 即单调性. 有了单调性, 我们就能比较函数值的大小, 并讨论不等式与极值问题.

知乎@余命数 知乎@余命数

3.3.1 单调性的定义与判定策略

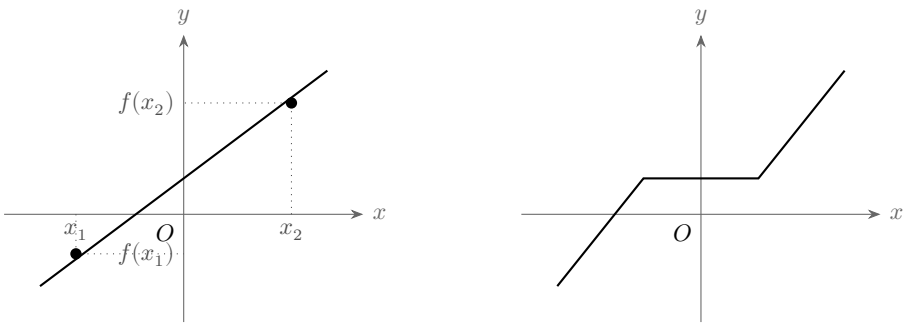
定义 3.2 (单调函数) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subseteq D$.

- 若对于 I 内**任意** x_1,x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, **恒有** $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递增**.
- 若对于 I 内**任意** x_1,x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, **恒有** $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递减**.

若将上述定义中的严格不等号 $<$ 和 $>$ 分别替换为 $\le$ 和 $\ge$, 则得到**单调递增**, 或称**非减**, 和**单调递减**(或称**非增**)的定义. 严格单调函数与单调函数统称为**单调函数**.

知乎@余命数

用代数的语言说, 严格单调递增的函数保持元素的序, 我们称它**保序**; 严格单调递减的函数反转元素的序, 我们称它**逆序**.



严格单调递增　　单调递增(非严格)

图 3.2　单调性的几何直观

知乎@余命数

以严格递增为例, 判定单调性就是证明一个全称命题, 即任取 I 中的 x_1, x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$. 于是问题归结为比较两个任意函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

知乎@余命数

比较大小有两条基本途径. 一条是代数的, 直接考察差 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号; 当函数值恒正时, 也可以考察商 $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 与 1 的大小. 我们称它为**定义法**. 另一条是分析的, 若 f 可导, 单调性由导函数的符号决定. 我们称它为**导数法**(其理论见 第四卷第 16 章).

3.3.2 单调性的判定方法

知乎@余命数

3.3.2.1 定义法

定义法直接应用定义. 任取 $x_1 < x_2$, 作差 $f(x_1) - f(x_2)$, 再通过恒等变形判断它的符号. 操作分四步.

知乎@余命数

1. 在指定区间 I 内, 任取 x_1, x_2, 并设 $x_1 < x_2$.
2. 构造差式 $f(x_1) - f(x_2)$.
3. 对差式进行恒等变形, 目标是将其化为若干符号易于判定的因式的乘积或商.
4. 依据区间 I 的约束条件判定差式的最终符号, 从而确定 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系.

知乎@余命数

例题 3.6　证明函数 $g(x) = x + \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上严格单调递减, 在 $[1, +\infty)$ 上严格单调递增.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 设 x_1, x_2 是定义域中任意两点, 且 $x_1 < x_2$. 作差并通分, 得

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1)}{x_1x_2}$$

由于 $x_1 < x_2$, 因子 $(x_1 - x_2)$ 恒为负. 于是差式的符号由 $(x_1x_2 - 1)$ 与分母 x_1x_2 决定.

若 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 且 $1 \leq x_1 < x_2$, 则分母 $x_1x_2 > 0$, 且 $x_1x_2 > 1$, 故因子 $(x_1x_2 - 1) > 0$. 差式的符号为 $\frac{(-)(+)}{(+)} = (-)$, 即 $g(x_1) < g(x_2)$. 因此, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上严格单调递增.

若 $x_1, x_2 \in (0, 1]$ 且 $0 < x_1 < x_2 \leq 1$, 则分母 $x_1x_2 > 0$, 且 $0 < x_1x_2 < 1$, 故因子 $(x_1x_2 - 1) < 0$. 差式的符号为 $\frac{(-)(-)}{(+)} = (+)$, 即 $g(x_1) > g(x_2)$. 因此, $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上严格单调递减.

注 3.2 (单调区间的表述)
单调性是定义在**单一区间**上的性质. 例如, 函数 $f(x) = 1/x$ 在 $(-\infty, 0)$ 上严格单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上也严格单调递减. 但是, **不能**断言 $f(x)$ 在其定义域的并集 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上是单调递减的.
取 $x_1 = -1, x_2 = 1$ 就能看出原因. 显然 $x_1 < x_2$, 但 $f(x_1) = -1 < f(x_2) = 1$, 这与单调递减的定义矛盾. 因此, 陈述函数的单调区间时, 必须分别列出, 用连词"和"或逗号连接, 不使用并集符号.

知乎@余命数

导数法

导数法(预告)

知乎@余命数

注 3.3
以下用导函数符号判定单调性, 并引用拉格朗日中值定理. **严格定义与证明见第四卷第 16 章**.

当 f 可导时, 我们可以用导函数 f' 的符号判定 f 的单调性.

定理 3.1 (导数与单调性的关系) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, 并在 I 的内部可导.

- 若在 I 的内部恒有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增.
- 若在 I 的内部恒有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调递减.

证明 任取 $x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$. 由于 f 在 $[x_1, x_2]$ 上连续、在 (x_1, x_2) 上可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

若 I 的内部恒有 $f'(x) > 0$, 则右端为正, 从而 $f(x_2) > f(x_1)$, 故 f 在 I 上严格单调递增. 若 I 的内部恒有 $f'(x) < 0$, 则右端为负, 从而 $f(x_2) < f(x_1)$, 故 f 在 I 上严格单调递减. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根据这个定理，判定单调性归结为解不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$.f' 的零点把区间划分为若干单调区间.

例题 3.7　求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 的单调区间.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 其导函数为 $f'(x)=x^2-2x-3$. 令 $f'(x)=0$，即 $x^2-2x-3=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$. 这两个根将实数轴划分为三个区间 $(-\infty,-1)$、$(-1,3)$、$(3,+\infty)$.

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 当 $x\in(-1,3)$ 时，$f'(x)<0$.

由于函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=3$ 处连续，单调区间可扩展至闭区间. 因此，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1]$ 和 $[3,+\infty)$，单调递减区间是 $[-1,3]$.

知乎@余命数

3.3.3 复合函数的单调性

复合函数 $y=f(g(x))$ 的单调性由内层函数 $u=g(x)$ 与外层函数 $y=f(u)$ 的单调性共同决定. 我们把这条规律称为同增异减.

定理 3.2 (复合函数单调性) 设复合函数 $y=f(g(x))$ 在区间 I 上有定义. 若 $u=g(x)$ 在 I 上单调，且 $y=f(u)$ 在对应的值域 $g(I)$ 上单调，则：

- 若 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的**单调性相同**，同为非减或同为非增，则 $f(g(x))$ 在 I 上单调递增，即非减.
- 若 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的**单调性相异**，即一非减一非增，则 $f(g(x))$ 在 I 上单调递减，即非增.

若相应的两个单调性均为严格单调，则结论也相应为严格单调.

证明　设 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$. 令 $u_1=g(x_1),u_2=g(x_2)$.

若 g 和 f 均单调递增（非减），则 $x_1<x_2\implies u_1\le u_2\implies f(u_1)\le f(u_2)$. 复合函数单调递增.

若 g 和 f 均单调递减（非增），则 $x_1<x_2\implies u_1\ge u_2\implies f(u_1)\le f(u_2)$. 复合函数单调递增.

若 g 单调递增而 f 单调递减，则 $x_1<x_2\implies u_1\le u_2\implies f(u_1)\ge f(u_2)$. 复合函数单调递减.

最后一种情况（g 单调递减，f 单调递增）的证明是类似的. 若上述两个单调性均为严格单调，则相应的 $\le,\ge$ 均可替换为严格不等号，结论也相应为严格单调. □

例题 3.8　求函数 $y=\log_{0.5}(x^2-2x-3)$ 的单调区间.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 先求定义域. 由 $x^2-2x-3>0$ 解得 $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

我们把函数分解为外层函数 $y=f(u)=\log_{0.5}u$ 与内层函数 $u=g(x)=x^2-2x-3$.

外层函数 $f(u)$ 因底数 $0.5\in(0,1)$ 在其定义域 $(0,\infty)$ 上严格单调递减.

内层函数 $g(x)$ 是开口向上的二次函数, 对称轴为 $x=1$. 在其定义域的子区间 $(-\infty,-1)$ 上, $g(x)$ 严格单调递减; 在 $(3,+\infty)$ 上, $g(x)$ 严格单调递增.

在区间 $(-\infty,-1)$ 上, $g(x)$ 递减, $f(u)$ 递减. 根据定理, 单调性相同, 故复合函数单调递增.

在区间 $(3,+\infty)$ 上, $g(x)$ 递增, $f(u)$ 递减. 根据定理, 单调性相异, 故复合函数单调递减.

因此, 函数的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$, 单调递减区间是 $(3,+\infty)$.

3.4 奇偶性

我们研究函数图像的对称性. 函数图像关于 y 轴对称或关于原点对称时, 函数值 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 之间成立确定的代数恒等式, 奇偶性就是用这些恒等式描述这两种对称的工具.

3.4.1 定义

我们先关注两种对称, 即关于 y 轴的轴对称和关于原点的中心对称.

定义 3.3 (奇偶性) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是一个**关于原点对称**的数集, 即, 若 $x\in D$, 则必有 $-x\in D$.

- 如果对于任意 $x\in D$, 恒有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 其图像关于 y 轴对称.
- 如果对于任意 $x\in D$, 恒有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 其图像关于原点中心对称.

该定义有两层不可分割的内容. 定义域的对称性确保, 若 x 属于定义域, 则 $-x$ 也属于定义域, $f(-x)$ 有意义. 恒等式 $f(-x)=\pm f(x)$ 是奇偶性的判据, 且需对定义域内每一个 x 成立.

例题 3.9 (1) 下列函数在定义域上是偶函数的是(　)

A. $f(x)=\frac{x^2+x}{x+1}$

B. $f(x)=x\sin x$

C. $f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

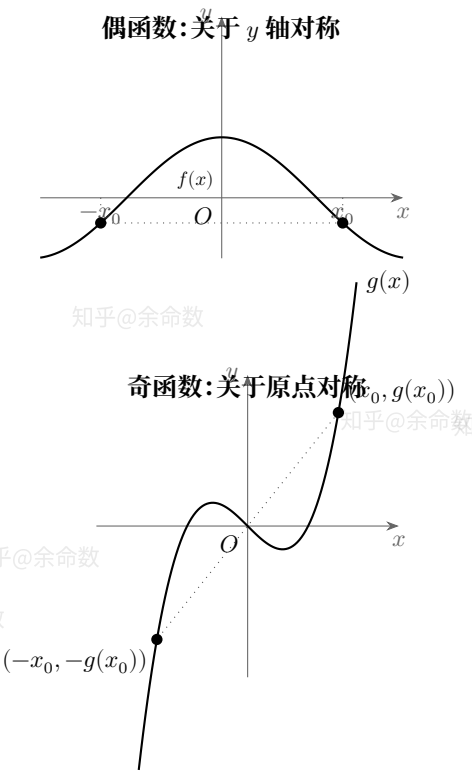


图 3.3　偶函数与奇函数的几何直观

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

D. $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$

(2) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=xf(y)+yf(x)$. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $g(x)$ 满足 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)$, 则(　)

A. $f(x)$ 不是奇函数

B. $f(x)$ 既是奇函数也是偶函数

C. $g(x)$ 是奇函数

D. $g(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

证明 (1) 先确定每个选项的定义域是否关于原点对称, 再检验 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

A. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}$ 的定义域为 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq -1\}$, 不关于原点对称, 故不是偶函数.

B. $f(x)=x\sin x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 关于原点对称. 又

$$f(-x)=(-x)\sin(-x)=(-x)(-\sin x)=x\sin x=f(x),$$

因此 $f(x)$ 是偶函数.

C. 观察 $f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$. 注意到

$$\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x},$$

因此

$$f(x)=\log_2\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\Big)=-\log_2(\sqrt{x^2+1}+x).$$

已知 $\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是奇函数, 故 $f(x)$ 也是奇函数.

D. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 的定义域由 $1-x^2\geq 0$ 与 $|x+2|-2\neq 0$ 决定. 前者给出 $-1\leq x\leq 1$, 后者给出 $x\neq 0$ 且 $x\neq -4$. 故定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$, 关于原点对称. 但

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{|-x+2|-2}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|2-x|-2},$$

一般情况下 $f(x)\neq f(-x)$, 故不是偶函数.

只有 B 选项是偶函数.

(2) 对 $f(x)$, 由 $f(x+y)=xf(y)+yf(x)$ 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立. 令 $x=0$ 得

$$f(y)=yf(0).$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此 $f(x)=kx$, 其中 $k=f(0)$. 把它代回原方程.

$$k(x+y)=x(ky)+y(kx) \implies kx+ky=2kxy.$$

该式对任意 x,y 成立只能通过 $k=0$, 所以 $f(x)\equiv 0$, 它既是奇函数又是偶函数.

对 $g(x)$, 已知 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)$. 令 $t=x+1$, 则 $x=t-1$, 于是

$$\begin{aligned} g(t)&=t((t-1)^2+2(t-1))=t(t^2-2t+1+2t-2)\\ &=t(t^2-1)=t^3-t. \end{aligned}$$

因此 $g(x)=x^3-x$. 于是 $g(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-g(x)$, 故 $g(x)$ 是奇函数.

故正确选项是 B 和 C. □

3.4.2 函数的奇偶分解定理

奇偶性也适用于一般函数. 任意定义在对称区间上的函数都可以唯一地分解为一个偶函数与一个奇函数之和.

定理 3.3 (奇偶分解定理) 任何一个定义在对称区间 D 上的函数 $f(x)$, 都可以**唯**一地表示为一个偶函数 $f_e(x)$ 与一个奇函数 $f_o(x)$ 的和, 即

$$f(x)=f_e(x)+f_o(x)$$

其中,

$$f_e(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad 且 \quad f_o(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

证明 我们先证明, 若分解存在, 则其形式必如定理给出; 再验证该形式确实给出分解.

不妨设 $f(x)$ 可以分解为 $f(x)=f_e(x)+f_o(x)$, 其中 $f_e(x)$ 为偶函数, $f_o(x)$ 为奇函数. 将 x 替换为 $-x$, 得

$$f(-x)=f_e(-x)+f_o(-x)=f_e(x)-f_o(x)$$

现在得到一个关于 $f_e(x)$ 和 $f_o(x)$ 的线性方程组.

$$\begin{aligned} f_e(x)+f_o(x)&=f(x)\\ f_e(x)-f_o(x)&=f(-x) \end{aligned}$$

知乎@余命数

两式相加除以 2, 得 $f_e(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$; 两式相减除以 2, 得 $f_o(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. 故若分解存在, 其形式必如上式. 尚需验证这样构造出的 $f_e(x)$ 与 $f_o(x)$ 分别是偶函数与奇函数. 对 $f_e(x)$, 有

$$f_e(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=f_e(x),$$

故 $f_e(x)$ 是偶函数. 对 $f_o(x)$, 有

$$f_o(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-f_o(x),$$

故 $f_o(x)$ 是奇函数. 并且

$$f_e(x)+f_o(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x).$$

以上推导同时给出存在性与唯一性. 任何满足条件的分解必须满足该线性方程组, 而该方程组有唯一解. 证毕. □

该定理把对称区间上的任意函数分解为偶部 $f_e(x)$ 与奇部 $f_o(x)$.

例题 3.10 将函数 $f(x)=e^x$ 分解为一个偶函数与一个奇函数之和.

证明 函数 $f(x)=e^x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 关于原点对称. 根据奇偶分解定理, 其偶部为

$$f_e(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

其奇部为

$$f_o(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

这两个函数分别称为**双曲余弦函数**和**双曲正弦函数**, 记作 $\cosh x$ 和 $\sinh x$. 于是 $e^x=\cosh x+\sinh x$. □

3.4.3 运算封闭性与对称推广

奇函数与偶函数的奇偶性在加法和乘法下保持稳定. 我们直接验证这些运算法则.

不妨设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个定义在同一个对称区间 D 上的函数.

首先考虑加法. 令 $h(x)=f(x)+g(x)$. 考察 $h(x)$ 的奇偶性. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为偶函数, 那么根据定义, 有 $f(-x)=f(x)$ 和 $g(-x)=g(x)$. 于是,

$$h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=h(x)$$

知乎@余命数

故,两个偶函数的和仍然是一个偶函数. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为奇函数,那么 $f(-x)=-f(x)$ 和 $g(-x)=-g(x)$. 于是,

$$h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f(x)+g(x))=-h(x)$$

故,两个奇函数的和仍然是一个奇函数.

对乘法同理. 令 $p(x)=f(x)g(x)$. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为偶函数,则

$$p(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=p(x)$$

知乎@余命数

乘积是偶函数. 若 $f(x)$ 是偶函数而 $g(x)$ 是奇函数,则

知乎@余命数

$$p(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)g(x)=-p(x)$$

乘积是奇函数. 当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为奇函数时,

$$p(-x)=f(-x)g(-x)=(-f(x))(-g(x))=f(x)g(x)=p(x)$$

故**两个奇函数的乘积是一个偶函数**.

@余命数

这些运算法则与整数的符号法则结构相似. 将偶函数看作正号或 $+1$,将奇函数看作负号或 -1,函数的乘法规则对应于符号的乘法.

知乎@余命数

$$\begin{aligned}
&\text{偶}\times\text{偶}\to\text{偶} \quad &\longleftrightarrow \quad &(+1)\times(+1)=+1\\
&\text{偶}\times\text{奇}\to\text{奇} \quad &\longleftrightarrow \quad &(+1)\times(-1)=-1\\
&\text{奇}\times\text{奇}\to\text{偶} \quad &\longleftrightarrow \quad &(-1)\times(-1)=+1
\end{aligned}$$

知乎@余命数

3.4.3.1 对称性的推广

知乎@余命数

关于 y 轴和原点的对称,分别是关于直线 $x=0$ 和点 $(0,0)$ 的对称. 这一概念可直接推广到任意对称轴与对称中心.

▷ **关于直线 $x=a$ 对称** 若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称,则对任意使 $a\pm t$ 在定义域内的 t,都有

$$f(a-t)=f(a+t).$$

令 $x=a-t$,则 $t=a-x$,于是 $a+t=2a-x$. 代入后得等价判据

$$f(x)=f(2a-x).$$

知乎@余命数

▷ **关于点 (a,b) 对称** 若函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 中心对称，则对任意使 $a\pm t$ 在定义域内的 t，点 $(a-t,f(a-t))$ 与 $(a+t,f(a+t))$ 的中点为 (a,b)，即

$$\frac{f(a-t)+f(a+t)}{2}=b.$$

整理得 $f(a-t)+f(a+t)=2b$. 令 $x=a-t$，则 $a+t=2a-x$，代入后得等价判据

$$f(x)+f(2a-x)=2b.$$

标准的奇偶性正是这些广义对称性的特例. 当对称轴为 $x=0$ $(a=0)$ 时，$f(x)=f(-x)$，这正是偶函数的定义. 当对称中心为 $(0,0)$ $(a=0,b=0)$ 时，$f(x)+f(-x)=0$，即 $f(-x)=-f(x)$，这正是奇函数的定义.

知乎@余命数

3.4.3.2 一个更具操作性的判别方法

在处理具体函数方程以判定对称性时，常遇到 $f(x+a)=f(-x+b)$ 这类表达式. 直接套用 $f(x)=f(2a-x)$ 的形式未必方便. 其共性在于两个自变量 x 与 $2a-x$ 之和为常数 $2a$. 由此可得识别对称性的直接工具.

定理 3.4 (对称性的统一判据) 设函数 $f(x)$ 的定义域在相应对称变换下封闭，并且下列函数方程对所有使式子有意义的自变量恒成立.

1. **轴对称**. 若该方程可化为 $f(X_1)=f(X_2)$ 的形式，且自变量之和 $X_1+X_2=k$(常数)，则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{k}{2}$ 对称.
2. **点对称**. 若该方程可化为 $f(X_1)+f(X_2)=k$ 的形式，其中 k 为常数，且自变量之和 $X_1+X_2=K$(常数)，则函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{K}{2},\frac{k}{2}\right)$ 中心对称.

知乎@余命数

证明 1. 对于 $f(X_1)=f(X_2)$ 且 $X_1+X_2=k$，令 $a=k/2$. 可设 $X_1=a+t$. 那么 $X_2=k-X_1=2a-(a+t)=a-t$. 于是原方程化为 $f(a+t)=f(a-t)$，这正是函数关于 $x=a$ 对称的定义式.

2. 对于 $f(X_1)+f(X_2)=k$ 且 $X_1+X_2=K$，令 $a=K/2,b=k/2$. 同样设 $X_1=a+t$，则 $X_2=K-X_1=2a-(a+t)=a-t$. 于是原方程化为 $f(a+t)+f(a-t)=2b$，这正是函数关于点 (a,b) 对称的定义式. □

该定理把函数方程转化为几何对称性的判定，关键在于检验自变量之和是否为常数.

知乎@余命数

推论 3.1 我们现在可以迅速判定一些常见形式的对称性.

- 若 $f(x+a)=f(-x+b)$, 自变量之和为 $(x+a)+(-x+b)=a+b$. 故对称轴为 $x=\frac{a+b}{2}$. 当 $b=0$ 时, $f(x+a)=f(-x)$, 对称轴为 $x=a/2$.
- 若 $f(x+a)+f(-x+b)=c$, 自变量之和为 $a+b$, 函数值之和为 c. 故对称中心为 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$. 特别地, 若 $f(x+a)=-f(-x)$, 则 $f(x+a)+f(-x)=0$, 自变量之和为 a, 函数值之和为 0, 故对称中心为 $(\frac{a}{2},0)$.

证明 第一条中令 $X_1=x+a$, $X_2=-x+b$, 则 $X_1+X_2=a+b$, 由对称性的统一判据立即得到对称轴 $x=(a+b)/2$. 当 $b=0$ 时即为 $x=a/2$.

第二条中同样令 $X_1=x+a$, $X_2=-x+b$, 则 $X_1+X_2=a+b$, 且函数值之和为常数 c, 由统一判据得到对称中心 $((a+b)/2,c/2)$. 特别地, $f(x+a)=-f(-x)$ 等价于 $f(x+a)+f(-x)=0$, 此时 $b=0,c=0$, 因而对称中心为 $(a/2,0)$. □

知乎@余命数

例题 3.11 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上. 已知 $f(x-1)$ 是一个偶函数, 而 $f(x+1)$ 是一个奇函数. 试证明 $f(x)$ 是一个周期函数.

证明 我们用广义对称性推导周期性. 先把题设写成 $f(x)$ 的对称性.

设 $g(x)=f(x-1)$. 由 $g(x)$ 为偶函数, 有 $g(x)=g(-x)$, 即 $f(x-1)=f(-x-1)$. 这是 $f(X_1)=f(X_2)$ 形式, 自变量之和 $(x-1)+(-x-1)=-2$. 根据上述定理, $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-1$ 对称.

设 $h(x)=f(x+1)$. 由 $h(x)$ 为奇函数, 有 $h(x)=-h(-x)$, 即 $f(x+1)=-f(-x+1)$, 亦即 $f(x+1)+f(-x+1)=0$. 这是 $f(X_1)+f(X_2)=k$ 形式, 自变量之和 $(x+1)+(-x+1)=2$, 函数值之和为 0. 故 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 中心对称.

知乎@余命数

于是 $f(x)$ 满足

$$f(-1+t)=f(-1-t), \qquad \forall t\in\mathbb{R},$$

$$f(1+t)=-f(1-t), \qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

须寻找常数 T 使 $f(x+T)=f(x)$, 即把两条对称性复合使用.

考虑 $f(x+4)$. 为应用关于点 $(1,0)$ 的对称性, 把它写成 $f(1+(x+3))$.

$$f(x+4)=f(1+(x+3))=-f(1-(x+3))=-f(-x-2).$$

再对 $f(-x-2)$ 应用关于直线 $x=-1$ 的对称性, 把它写成 $f(-1+(-x-1))$.

$$f(-x-2)=f(-1+(-x-1))=f(-1-(-x-1))=f(x).$$

知乎@余命数

代回得

$$f(x+4) = -f(x).$$

该式说明函数具有半周期为 4 的反向重复. 再将 x 换为 $x+4$.

$$f(x+8) = -f(x+4).$$

结合两式,

$$f(x+8) = -f(x+4) = -(-f(x)) = f(x).$$

故 $f(x)$ 以 8 为周期.

轴对称与中心对称的复合由此产生平移不变性, 即周期性. □

例题 3.12 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的增函数. 在两种不同的附加条件下讨论其性质.

情形一: 若 $f(x)$ 满足柯西函数方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. 求 $f(0)$ 的值.
2. 求证 $f(x)$ 是奇函数.
3. 若 $f(x^2+1) + f(3x-5) < 0$, 求实数 x 的取值范围.

情形二: 若 $f(x)$ 满足函数方程 $yf(x) - xf(y) = xy(x^2 - y^2)$.

1. 求 $f(0)$ 的值.
2. 求证 $f(x)$ 是奇函数.
3. 若 $f(x^2+1) + f(3x-5) < 0$, 求实数 x 的取值范围.

证明 对函数方程赋值, 先求 $f(0)$, 再推导奇偶性, 最后用单调性解不等式.

这是柯西函数方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(1) 令 $x = y = 0$, 得

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 2f(0),$$

故 $f(0) = 0$.

(2) 令 $y = -x$, 得

$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \implies f(0) = f(x) + f(-x).$$

由 $f(0) = 0$ 得 $f(-x) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(3) 不等式 $f(x^2+1)+f(3x-5)<0$ 可改写为 $f(x^2+1)<-f(3x-5)$. 由奇函数性质,

$$-f(3x-5)=f(5-3x),$$

于是原不等式等价于

$$f(x^2+1)<f(5-3x).$$

又 $f(x)$ 是增函数, 自变量的大小关系与函数值一致, 故

$$x^2+1<5-3x.$$

整理得 $x^2+3x-4<0$, 即 $(x+4)(x-1)<0$. 解得 $x\in(-4,1)$.

情形二的函数方程为

$$yf(x)-xf(y)=xy(x^2-y^2).$$

(1) 求 $f(0)$. 直接令 $y=0$ 会使方程两端皆为 0, 无法分离 $f(0)$. 取 $y=1,x=0$:

$$1\cdot f(0)-0\cdot f(1)=0\cdot 1\cdot(0^2-1^2)\implies f(0)=0.$$

(2) 证明奇偶性. 仍令 $y=-x$, 得

$$(-x)f(x)-xf(-x)=x(-x)(x^2-(-x)^2),$$

$$-x[f(x)+f(-x)]=-x^2(x^2-x^2)=0.$$

因此 $-x[f(x)+f(-x)]=0$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立. 当 $x\neq 0$ 时, 约去 $-x$ 得 $f(x)+f(-x)=0$; 当 $x=0$ 时, $f(0)=0$ 使等式亦成立. 故 $f(-x)=-f(x)$, $f(x)$ 是奇函数.

(3) 解不等式. 情形二虽与情形一的函数方程形式不同, 但推出的奇函数与增函数性质完全相同. 因此不等式 $f(x^2+1)+f(3x-5)<0$ 的求解过程亦相同, 解集仍为 $(-4,1)$.

□

3.4.3.3 构造具有特定对称性的函数

构造具有特定奇偶性的函数, 其规律直接来自 $f(-x)=\pm f(x)$. 我们先以指数函数为例.

3.4.3.4 源于指数函数的对称构造

指数函数 $g(x)=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$ 本身非奇非偶. 奇偶分解定理给出它的偶部与奇部, 我们由此得到两类常见函数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

其偶部为 $f_e(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$, 奇部为 $f_o(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$. 验证, 任意常数 m 与它们的乘积, 即

$$f(x)=m(a^x+a^{-x}) \quad 与 \quad g(x)=m(a^x-a^{-x})$$

分别是偶函数和奇函数的典范. 它们是构造更复杂函数的基础单元.

一个看似不同的常见奇函数模型是 $f(x)=m\frac{a^x-1}{a^x+1}$. 分析其对称性的来源.

证明 其定义域为 $\{x\in\mathbb{R}\mid a^x\neq -1\}$, 即 $\mathbb{R}$. 这是一个对称的定义域. 我们考察 $f(-x)$.

$$f(-x)=m\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}$$

这里的关键技巧是分子分母同乘 a^x, 以此恢复与 $f(x)$ 的联系.

$$f(-x)=m\frac{(a^{-x}-1)a^x}{(a^{-x}+1)a^x}=m\frac{1-a^x}{1+a^x}=-m\frac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$$

故 $f(x)$ 是一个奇函数. 实际上, 经简单代数变形可见, 它与先前导出的双曲函数模型有内在联系. □

3.4.3.5 源于对数函数的对称构造

对于对数函数 $f(x)=\log_a g(x)$, 其奇偶性完全取决于其宗量 $g(x)$ 的性质. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则必须满足

$$f(-x)=\log_a g(-x)=-f(x)=-\log_a g(x)=\log_a\frac{1}{g(x)}$$

这要求其宗量必须满足关系 $g(-x)=\frac{1}{g(x)}$. 若 $f(x)$ 为偶函数, 则必须满足

$$f(-x)=\log_a g(-x)=f(x)=\log_a g(x)$$

这要求其宗量必须是偶函数, 即 $g(-x)=g(x)$.

基于此原理, 可构造出大量的对数型奇偶函数.

例题 3.13 判断函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的奇偶性, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

证明 函数定义域要求 $\sqrt{x^2+1}+x>0$. 注意到 $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$, 因此 $\sqrt{x^2+1}+x>|x|+x$. 当 $x\geq 0$ 时, $|x|+x=2x\geq 0$. 当 $x<0$ 时, $|x|+x=0$. 故 $\sqrt{x^2+1}+x$ 恒为正, 定义域为 $\mathbb{R}$.

考察其宗量 $g(x)=\sqrt{x^2+1}+x$.

$$g(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}-x=\sqrt{x^2+1}-x$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为检验 $g(-x)$ 是否等于 $1/g(x)$, 计算其乘积, 由平方差公式

$$\begin{aligned} g(x)g(-x) &= (\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) \\ &= (\sqrt{x^2+1})^2 - x^2 = (x^2+1) - x^2 = 1. \end{aligned}$$

因此, $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$. 于是

$$f(-x) = \log_a g(-x) = \log_a \frac{1}{g(x)} = -\log_a g(x) = -f(x).$$

故 $f(x) = \log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 是奇函数. □

同理, 形如 $f(x) = \log_a \frac{m+x}{m-x}$ 的函数, 其宗量 $g(x) = \frac{m+x}{m-x}$ 也满足 $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$, 故它也是奇函数.

3.4.3.6 普适的对称性构造法则

除了针对特定函数类型的改造, 还存在一些更为普适的构造方法.

- **绝对值化构造偶函数**. 对于定义域关于原点对称的任意函数 $f(x)$,函数 $h(x) = f(|x|)$ 是偶函数.

  证明 $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$. □

  这个构造的几何意义是, 舍弃 y 轴左侧的图像,然后将 y 轴右侧的图像反射到左侧, 从而强制地创造出关于 y 轴的对称性.

- **复合函数法则**. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性已知. 复合函数 $f(g(x))$ 的奇偶性遵循内偶则偶、内奇看外的原则.
  - 若 $g(x)$ 是偶函数, 则 $f(g(x))$ 必为偶函数(为什么与 $f(x)$ 的奇偶性无关?).
  - 若 $g(x)$ 是奇函数, 则 $f(g(x))$ 的奇偶性与 $f(x)$ 相同.

- **平凡模型**. 最简单的偶函数是常数函数 $f(x) = c$, 最简单(非零)的奇函数是正比例函数 $f(x) = kx$.

给定函数的奇偶性往往可归入上述某种构造原理.

例题 3.14 已知函数 $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$, $g(x) = \cos x$. 判断函数 $h(x) = f(|x|)\cdot g(x)$ 的奇偶性.

证明 $h(x)$ 由两部分相乘而成, 须分别确定其奇偶性.

函数 $f(x)$ 契合奇函数模型 $m\frac{a^x-1}{a^x+1}$(此处 $m=1, a=2$), 故 $f(x)$ 是奇函数.

再看 $f(|x|)$, 此即绝对值化构造偶函数法则的直接应用. 令 $p(x) = f(|x|)$, 则 $p(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = p(x)$, 故 $p(x)$ 是偶函数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

函数 $g(x)=\cos x$ 是基本的偶函数, $g(-x)=\cos(-x)=\cos x=g(x)$.

最终, $h(x)$ 是偶函数 $p(x)=f(|x|)$ 与偶函数 $g(x)=\cos x$ 的乘积. 依运算法则(偶 $\times$ 偶 = 偶), $h(x)$ 是偶函数. □

例题 3.15 求解不等式.$\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)+\log_2(\sqrt{4x^2+1}-2x)>0$.

知乎@余命数

证明 直接解这个不等式并不容易. 我们先把它与已知模型联系起来.

令 $f(x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)$. 已证明, 这是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数.

现在观察不等式中的第二项, $\log_2(\sqrt{4x^2+1}-2x)$. 它的形式与 $f(x)$ 的共轭形式 $\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$ 极其相似. 注意到

$$\log_2(\sqrt{4x^2+1}-2x)=\log_2(\sqrt{(2x)^2+1}-2x)$$

已知 $\sqrt{u^2+1}-u=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}+u}$. 因此,

$$\begin{aligned}\log_2(\sqrt{(2x)^2+1}-2x)&=\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}+2x}\right)\\&=-\log_2(\sqrt{(2x)^2+1}+2x)=-f(2x).\end{aligned}$$

原不等式经上述函数性质化简为

$$f(x)-f(2x)>0\implies f(x)>f(2x)$$

尚需考察 $f(x)$ 的单调性. 函数 $u(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增. 若 $x_1<x_2$, 则

$$u(x_2)-u(x_1)=(x_2-x_1)\left(1+\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}\right)>0,$$

其中分母严格大于 $|x_1+x_2|$. 又因为 $v(u)=\log_2 u$ 是增函数, 根据复合函数单调性法则, $f(x)=v(u(x))$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数.

因为 $f(x)$ 是增函数, 所以由 $f(x)>f(2x)$ 可以直接得到 $x>2x$, 故 $-x>0$, 即 $x<0$.

所以, 原不等式的解集为 $(-\infty,0)$. □

例题 3.16 设 $g(x)=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$, $h(x)=x^3\cos x$. 判断复合函数 $F(x)=g(h(x))$ 的奇偶性.

证明 按先内后外的次序, 先确定内外层函数的奇偶性.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

内层函数 $h(x)=x^3\cos x$. 它是奇函数 x^3 与偶函数 $\cos x$ 的乘积. 根据运算法则(奇 $\times$ 偶 = 奇), $h(x)$ 是奇函数.

外层函数 $g(x)=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$. 其定义域由 $\frac{1+x^2}{1-x^2}>0 \implies 1-x^2>0 \implies -1<x<1$ 给出, 是对称区间. 考察 $g(-x)$:

知乎@余命数

$$g(-x)=\ln\frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}=g(x)$$

故 $g(x)$ 是偶函数.

知乎@余命数

复合函数 $F(x)=g(h(x))$ 的定义域为

知乎@余命数

$$D=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<h(x)<1\}.$$

由于 $h(x)$ 是奇函数, $x\in D$ 当且仅当 $-x\in D$, 故 D 关于原点对称. 现在判断 $F(x)$ 在其定义域 D 上的奇偶性. 对任意 $x\in D$, 考察 $F(-x)$:

$$F(-x)=g(h(-x))$$

因为 $h(x)$ 是奇函数, 所以 $h(-x)=-h(x)$. 代入得

$$F(-x)=g(-h(x))$$

又因为 $g(x)$ 是偶函数, 所以 $g(-u)=g(u)$ 对其定义域内任意的 u 成立. 于是:

知乎@余命数

$$F(-x)=g(-h(x))=g(h(x))=F(x)$$

知乎@余命数

因此, $F(x)$ 是一个偶函数. □

例题 3.17 设定义在 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足, 当 $x>0$ 时, $f(x)=x+\frac{1}{x}-2$. 求解方程 $f(x)=3$.

证明 利用偶函数性质把已知的正半轴解析式推广到负半轴, 再在整个定义域内求解方程.

分两种情况讨论.

情形一: $x>0$ 当 $x>0$ 时, 方程 $f(x)=3$ 直接等价于

$$x+\frac{1}{x}-2=3 \implies x+\frac{1}{x}-5=0$$

两边同乘 x (因为 $x>0, x\neq 0$), 得到 $x^2-5x+1=0$. 利用求根公式, 解得 $x=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. 由于 $\sqrt{16}<\sqrt{21}<\sqrt{25}$, 即 $4<\sqrt{21}<5$, 所以两个根 $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ 和 $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ 均为正数, 符合本情形的假设.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

情形二：$x<0$ 当 $x<0$ 时，不能直接使用给定的解析式. 但已知 $f(x)$ 是偶函数，因此

知乎@余命数

$$f(x)=f(-x)$$

因为 $x<0$，所以 $-x>0$. 故可对 $f(-x)$ 使用已知的解析式.

$$f(x)=f(-x)=(-x)+\frac{1}{-x}-2=-x-\frac{1}{x}-2$$

于是，在 $x<0$ 的区间上，方程 $f(x)=3$ 等价于

知乎@余命数

$$-x-\frac{1}{x}-2=3 \implies -x-\frac{1}{x}-5=0$$

两边同乘 $-x$（注意 $-x>0$），得到 $x^2+5x+1=0$. 解得 $x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$. 两个根 $\frac{-5+\sqrt{21}}{2}$ 和 $\frac{-5-\sqrt{21}}{2}$ 均为负数，符合本情形的假设.

方程 $f(x)=3$ 的所有解为 $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ 和 $\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$. □

例题 3.18 设 $f(x)=\log_a g(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数. 求证：函数 $h(x)=\frac{(g(x))^2-1}{(g(x))^2+1}$ 也是奇函数.

证明 由 $f(x)=\log_a g(x)$ 是奇函数，有 $f(-x)=-f(x)$，即

知乎@余命数

$$\log_a g(-x)=-\log_a g(x)=\log_a\left(\frac{1}{g(x)}\right).$$

对数函数是单射，两边宗量相等，故

$$g(-x)=\frac{1}{g(x)}.$$

这一关系是后续推导的出发点. 据此比较 $h(-x)$ 与 $h(x)$：

$$h(-x)=\frac{(g(-x))^2-1}{(g(-x))^2+1}$$

代入关系 $g(-x)=1/g(x)$，得

$$h(-x)=\frac{\left(\frac{1}{g(x)}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{(g(x))^2}-1}{\frac{1}{(g(x))^2}+1}$$

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将分子分母同乘以 $(g(x))^2$ 化简繁分数:

$$h(-x)=\frac{1-(g(x))^2}{1+(g(x))^2}=-\frac{(g(x))^2-1}{(g(x))^2+1}=-h(x)$$

此式表明 $h(x)$ 是一个奇函数. 证毕.

实际上, 可观察到 $h(x)$ 的结构与典范奇函数模型 $\frac{a^u-1}{a^u+1}$ 极为相似. 若令 $u(x)=\log_a(g(x))^2$, 则 $a^{u(x)}=(g(x))^2$. 于是 $h(x)=\frac{a^{u(x)}-1}{a^{u(x)}+1}$. □

3.5 周期性

知乎@余命数

我们还关心函数的图像在水平平移后是否与自己重合. 这就是周期性, 即函数值每隔一段固定距离重复一次, 于是我们只需研究一个周期内的行为.

3.5.1 周期性的定义

函数图像沿水平方向平移后与自身重合. 下面把它写成严格的代数条件.

知乎@余命数

定义 3.4 (周期函数) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个**非零常数** T, 使得对于任意 $x\in D$, 恒有 $x+T\in D$ 与 $x-T\in D$, 并且满足

$$f(x+T)=f(x) \tag{3-6}$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**, T 称为它的一个**周期**.

此定义蕴含三个必要要素. 其一. 周期 T 必须是非零常数, 否则它描述的不是一种重复模式. 其二. 定义域 D 必须在沿 T 的正、反两个方向平移下封闭, 这保证了周期关系可以反复迭代. 因此, 周期函数的定义域在周期方向上必然是无界的, 例如 $\mathbb{R}$ 或若干等距离散点的集合. 其三. 核心等式 $f(x+T)=f(x)$ 必须对定义域内的**所有** x 成立.

由定义可直接推得, 若 T 是一个周期, 则对任意非零整数 n, nT 也是一个周期. 若 T 是周期, 则 $f(x)=f(x-T)$, 故 $-T$ 也是周期.

定义 3.5 (最小正周期) 若一个周期函数的所有正周期中存在一个最小值, 则称此数为该函数的**最小正周期**. 通常语境下所称的周期即指最小正周期.

知乎@余命数

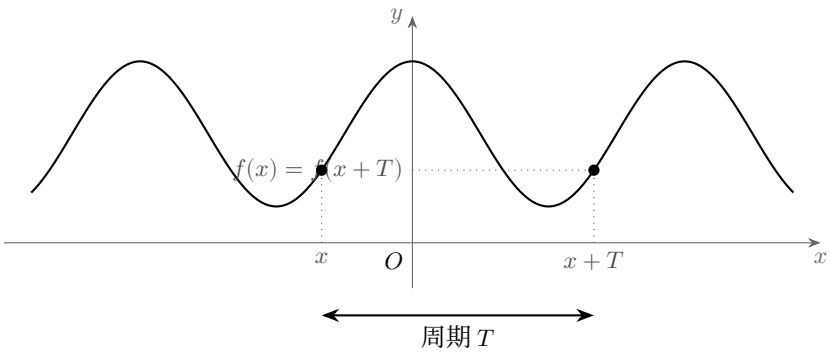


图 3.4 周期函数的几何意义. 图像的平移不变性

有些周期函数没有最小正周期. 例如, 常数函数 $f(x)=c$, 任何非零实数 T 都是它的周期, 故不存在最小的正周期. 一个更典型的例子是狄利克雷函数.

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

对于任意非零有理数 T, 当 x 是有理数时, $x+T$ 也是有理数, 故 $D(x+T)=1=D(x)$; 当 x 是无理数时, $x+T$ 也是无理数, 故 $D(x+T)=0=D(x)$. 因此, 任何非零有理数都是它的周期, 而正有理数集合没有最小值, 故狄利克雷函数不存在最小正周期.

3.5.2 周期性的四则运算

两个独立的周期性现象叠加时, 合成的现象是否仍具有周期性, 取决于两者周期的**公度性**. 例如, 将两个不同频率的纯音(对应两个正弦函数)混合, 混合音仍是周期函数当且仅当两个周期可公度.

定理 3.5 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在同一集合 D 上的两个周期函数, 周期分别为 T_1 和 T_2.

1. 若 T_1 与 T_2 **可公度**, 即其比值为有理数, 则存在非零整数 m,n 使 $mT_1=nT_2$. 此公共非零数 $T=mT_1=nT_2$ 是 $f(x)+g(x)$、$f(x)-g(x)$、$f(x)g(x)$ 的一个周期.
2. 若 T_1 与 T_2 **不可公度**, 则它们的和、差、积不一定是周期函数.

证明 若 T_1/T_2 为有理数, 可设 $T_1/T_2=n/m$, 其中 m,n 为非零整数. 于是 $mT_1=nT_2$, 记这个公共非零数为 T. 由于周期可作整数倍, T 同时是 f 和 g 的周期.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对任意 $x \in D$, 有

$$f(x+T) = f(x), \qquad g(x+T) = g(x).$$

因此

$$(f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

差函数与积函数同理.

$$(f-g)(x+T) = f(x) - g(x), \qquad (fg)(x+T) = f(x)g(x).$$

故 T 是三者的一个周期.

若 T_1 与 T_2 不可公度, 结论只是不保证仍有周期. 例如定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Z}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2, & x \in \sqrt{2}\mathbb{Z}, \\ 0, & x \notin \sqrt{2}\mathbb{Z}. \end{cases}$$

其中 f 有周期 1, g 有周期 $\sqrt{2}$, 且 $1/\sqrt{2}$ 为无理数. 注意 $\mathbb{Z} \cap \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{0\}$, 因为若 $k = \sqrt{2}m$ 且 $k, m \in \mathbb{Z}$, 当 $m \neq 0$ 时会推出 $\sqrt{2} = k/m$ 为有理数.

对 $f+g$ 而言, 函数值 3 只在 $x = 0$ 处取得; 对 $f-g$ 而言, 函数值 -1 只在 $x = 0$ 处取得; 对 fg 而言, 函数值 2 也只在 $x = 0$ 处取得. 若三者中任意一个存在非零周期 T, 将周期等式用于 $x = 0$ 都会迫使该特殊函数值也在 $x = T$ 处取得, 从而 $T = 0$, 矛盾. 因此, 在周期不可公度时, 和、差、积确实不一定仍为周期函数. □

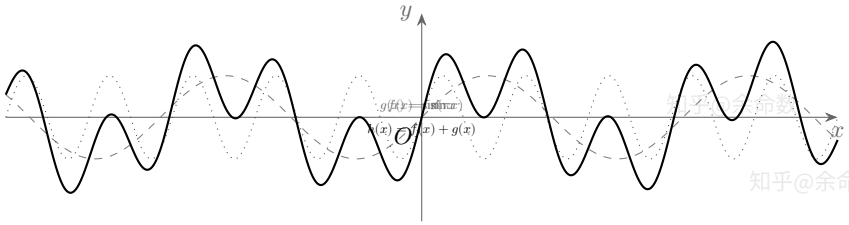


图 3.5　具有不可公度周期的两个函数(虚线与点线)之和, 以粗实线表示, 常呈现复杂的准周期形态.

例题 3.19　求函数 $f(x) = |\sin x| + \cos(2x)$ 的最小正周期.

解　函数 $f(x)$ 为两个周期函数之和: $g(x) = |\sin x|$ 与 $h(x) = \cos(2x)$.

函数 $\sin x$ 的周期为 2π, 经绝对值变换后 x 轴下方的图像翻折到上方, $[\pi, 2\pi]$ 区间的负半周与 $[0, \pi]$ 区间的正半周完全相同, 故 $g(x) = |\sin x|$ 的最小正周期为 $T_1 = \pi$. 又 $h(x) = \cos(2x)$ 的最小正周期为 $T_2 = 2\pi/|2| = \pi$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两周期之比 $T_1/T_2 = 1$ 为有理数, 故周期可公度. 因此 $f(x)$ 是周期函数, $T = \operatorname{lcm}(T_1, T_2) = \operatorname{lcm}(\pi, \pi) = \pi$ 是它的一个周期; 下面的代数变形同时说明它确实是最小正周期.

以代数变形验证此结论. 由二倍角公式,

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2|\sin x|^2$$

故 $f(x) = |\sin x| + 1 - 2|\sin x|^2$, 是关于 $|\sin x|$ 的复合函数, π 为 $f(x)$ 的周期. 尚需排除更小的正周期. 设 T 为 $f(x)$ 的周期, 令 $P(u) = u + 1 - 2u^2$, 由 $x = 0$ 得

$$P(|\sin T|) = P(0) = 1,$$

知乎@余命数

从而 $|\sin T| = 0$ 或 $|\sin T| = \frac{1}{2}$. 若 $|\sin T| = \frac{1}{2}$, 则 $|\cos T| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 代入 $x = \frac{\pi}{2}$ 得 $P(|\cos T|) \neq P(1)$, 矛盾. 故 $|\sin T| = 0$, 即 T 必为 π 的正整数倍, 因此最小正周期为 π.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

例题 3.20 求函数 $h(x) = \sin(3x) + \cos(\frac{5}{2}x)$ 的最小正周期.

解 函数 $h(x)$ 为两个周期函数 $f(x) = \sin(3x)$ 与 $g(x) = \cos(\frac{5}{2}x)$ 的和, 分别确定这两个基函数的最小正周期, 检验其公度性, 再求最小公倍数.

$f(x) = \sin(3x)$ 的角频率为 3, 最小正周期为

$$T_1 = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

知乎@余命数

$g(x) = \cos(\frac{5}{2}x)$ 的角频率为 $\frac{5}{2}$, 最小正周期为

知乎@余命数

$$T_2 = \frac{2\pi}{|5/2|} = \frac{4\pi}{5}$$

知乎@余命数

两周期的公度性由其比值判定:

知乎@余命数

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/3}{4\pi/5} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{5}{4\pi} = \frac{5}{6}$$

由于比值 $5/6$ 是一个有理数, 两个周期是可公度的. 因此, 函数 $h(x)$ 必然是周期函数, 且 T_1 与 T_2 的最小公倍数是它的一个周期; 最小正周期可能比它更小, 需另行验证.

对于两个分数形式的周期 $\frac{p_1}{q_1}\pi$ 和 $\frac{p_2}{q_2}\pi$, 它们的最小公倍数可以通过以下方式计算, 得

$$T = \operatorname{lcm}\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)\pi = \frac{\operatorname{lcm}(p_1, p_2)}{\gcd(q_1, q_2)}\pi$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在本例中,

$$T = \operatorname{lcm}\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right) = \pi \cdot \operatorname{lcm}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$$

依上述法则,

$$T = \pi \cdot \frac{\operatorname{lcm}(2,4)}{\gcd(3,5)} = \pi \cdot \frac{4}{1} = 4\pi$$

因此, 函数 $h(x)$ 的最小正周期为 4π.

例题 3.21　考察函数 $h(x) = \{2x\} - \sin(\pi x)$ 的周期性, 其中 $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ 表示小数部分函数.

解　此函数由两个周期函数 $f(x) = \{2x\}$ 和 $g(x) = \sin(\pi x)$ 的差构成.

基本的小数部分函数 $\{u\}$ 的最小正周期为 1, 故复合函数 $\{kx\}$ 的周期为 $1/|k|$, $f(x) = \{2x\}$ 的最小正周期为 $T_1 = 1/2$. 验证: $f(x+1/2) = \{2(x+1/2)\} = \{2x+1\}$. 加上整数不改变小数部分, 故 $\{2x+1\} = \{2x\} = f(x)$.

又 $g(x) = \sin(\pi x)$ 的角频率为 π, 最小正周期为 $T_2 = 2\pi/|\pi| = 2$.

两周期之比为

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

此为有理数, 故 $h(x)$ 是周期函数, T_1 与 T_2 的最小公倍数是它的一个周期; 对本例可直接验证它也是最小正周期, 计算如下.

$$T = \operatorname{lcm}\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \operatorname{lcm}\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right) = \frac{\operatorname{lcm}(1,2)}{\gcd(2,1)} = \frac{2}{1} = 2$$

因此, 函数 $h(x)$ 的最小正周期为 2.

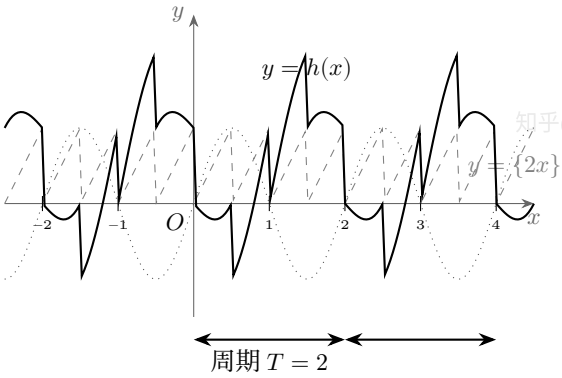


图 3.6　函数 $h(x) = \{2x\} - \sin(\pi x)$ 的图像. 尽管其构成部分周期不同 ($T_1 = 0.5, T_2 = 2$), 合成后的函数呈现出清晰的周期性, 最小正周期为 $T = 2$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.5.3 对称性与周期性的关系

函数的周期性常常由其对称性导出. 两种不同位置的对称性 (轴对称或中心对称)相复合, 可以生成平移对称, 即周期性.

定理 3.6 (对称性向周期性的转化) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

1. **双轴对称**:若 $f(x)$ 的图像关于两条不同的直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=2|a-b|$ 是其一个周期.
2. **双中心对称**: 若 $f(x)$ 的图像关于两个不同的点 (a,c) 和 (b,c) 中心对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=2|a-b|$ 是其一个周期.
3. **轴对称与中心对称**: 若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称, 且关于点 (b,c) 中心对称, 则当 $a\neq b$ 时, $f(x)$ 是周期函数, 且 $T=4|a-b|$ 是其一个周期; 当 $a=b$ 时, $f(x)$ 为常函数 c, 因而也是周期函数.

知乎@余命数

证明 三条结论的证明思路一致, 都是把几何对称操作写成代数恒等式, 再对恒等式复合、迭代, 最终得到 $f(x+T)=f(x)$.

函数 $f(x)$ 的图像关于两条不同的直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称, 故以下两个恒等式对定义域内所有 x 成立:

知乎@余命数

$$f(x)=f(2a-x) \tag{3-7}$$

知乎@余命数

$$f(x)=f(2b-x) \tag{3-8}$$

平移不变性须由这两个对称变换复合产生. 从 $f(x)$ 出发, 先应用关于 $x=a$ 的对称性 (3-7), 得 $f(x)=f(2a-x)$; 再对右端 $f(2a-x)$ 应用关于 $x=b$ 的对称性 (3-8), 即把 (3-8) 中的自变量 x 换为 $2a-x$:

知乎@余命数

$$f(2a-x)=f(2b-(2a-x))=f(x+2b-2a)$$

两步衔接即得

知乎@余命数

$$f(x)=f(x+2(b-a))$$

这正是周期函数的定义. 令 $T=2(b-a)$, 则 $f(x)=f(x+T)$. 因此, $f(x)$ 是周期函数, 且 $2|a-b|$ 是其一个周期.

知乎@余命数

更一般地, 若 $f(x)$ 的图像关于点 (a,c) 和 (b,d) 中心对称, 其代数表述为:

$$f(x)+f(2a-x)=2c \tag{3-9}$$

$$f(x)+f(2b-x)=2d \tag{3-10}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由此解出 $f(2a-x)$ 与 $f(2b-x)$:

$$f(2a-x)=2c-f(x)$$

$$f(2b-x)=2d-f(x)$$

仍以复合变换建立远距离自变量间的联系. 自变量 $x+2(a-b)$ 可写成 $2a-(2b-x)$. 先把 (3-9) 中的自变量 x 换为 $2b-x$:

$$f(2b-x)+f(2a-(2b-x))=2c$$

知乎@余命数

整理得 $f(x+2a-2b)=2c-f(2b-x)$. 再以 (3-10) 替换右端的 $f(2b-x)$:

$$f(x+2(a-b))=2c-(2d-f(x))=f(x)+2(c-d)$$

此式说明 $f(x)$ 在平移 $2(a-b)$ 后函数值产生固定增量 $2(c-d)$, 这种结构称为**准周期性**. 为使 $f(x)$ 成为严格周期函数, 该增量须为零, 即 $2(c-d)=0$, 亦即 $c=d$. 故若 $f(x)$ 关于 (a,c) 与 (b,c)(纵坐标相同)对称, 则 $f(x+2(a-b))=f(x)$, $T=2|a-b|$ 是其一个周期.

若 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称且关于点 (b,c) 中心对称, 其代数恒等式为:

$$f(x)=f(2a-x) \tag{3-11}$$

$$f(x)+f(2b-x)=2c \tag{3-12}$$

此情形先导出反周期关系, 再迭代得到周期关系. 从 $f(x)$ 出发, 先用轴对称 (3-11), 再用中心对称 (3-12):

$$f(x)\overset{(3\text{-}11)}{=}f(2a-x)$$

由 (3-12) 解出 $f(y)=2c-f(2b-y)$, 应用于 $y=2a-x$:

$$f(2a-x)=2c-f(2b-(2a-x))=2c-f(x+2b-2a)$$

两步结合得 $f(x)=2c-f(x+2(b-a))$, 整理为反周期关系:

$$f(x+2(b-a))=2c-f(x)$$

自变量增加 $2(b-a)$ 后, 新函数值与原值关于水平线 $y=c$ 对称. 为消除此对称性并恢复恒等关系, 对该式迭代, 即把 x 换为 $x+2(b-a)$:

$$f([x+2(b-a)]+2(b-a))=2c-f(x+2(b-a))$$

$$f(x+4(b-a))=2c-(2c-f(x))$$

$$f(x+4(b-a))=f(x)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

若 $a \neq b$, 此式正是周期函数的定义, 故 $T = 4|a-b|$ 是函数的一个周期. 若 $a = b$, 则轴对称给出 $f(a+t) = f(a-t)$, 中心对称给出 $f(a+t) + f(a-t) = 2c$, 两式联立得 $f(a+t) = c$. 由于 t 任意, $f(x) \equiv c$, 因而任意非零常数都是它的周期. □

定理 3.7 (由函数方程确定周期性) 对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 若存在非零常数 a, 满足以下关系之一, 则 $f(x)$ 为周期函数.

1. 若 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $T = 2a$ 是一个周期.
2. 若 $f(x+a) = 1/f(x)$ 且 $f(x)$ 的值域不包含零, 则 $T = 2a$ 是一个周期.
3. 若 $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 且 $f(x)$ 的值域不包含 0 和 1, 则 $T = 4a$ 是一个周期.

知乎@余命数

知乎@余命数

证明 证明均通过对给定关系式进行迭代完成, 这是一种探求周期性的基本技巧.

1. $f(x+2a) = f((x+a)+a) = -f(x+a) = -(-f(x)) = f(x)$.
2. $f(x+2a) = f((x+a)+a) = 1/f(x+a) = 1/(1/f(x)) = f(x)$.
3. 这是一个更具挑战性的迭代. 值域不含 0 和 1 保证以下分式在迭代中均有意义.

$$f(x+2a) = f((x+a)+a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}$$
$$= \frac{(1-f(x))+(1+f(x))}{(1-f(x))-(1+f(x))} = \frac{2}{-2f(x)} = -\frac{1}{f(x)}$$

知乎@余命数

知乎@余命数

此即 $f(x+2a) = -1/f(x)$. 再迭代一次, $f(x+4a) = f((x+2a)+2a) = -1/f(x+2a) = -1/(-1/f(x)) = f(x)$. 故 $T = 4a$ 是一个周期. □

例题 3.22 已知函数 $y = f(x)\,(x \in \mathbb{R})$ 不是常函数, 且满足 $f(a+b)+f(a-b) = 2f(a)f(b)$ 及 $f(1) = 1/2$. 求 $f(2024)$.

解 通过对变量 a, b 赋特殊值, 可以分析 $f(x)$ 的对称性与周期性.

首先, 在 $f(a+b) + f(a-b) = 2f(a)f(b)$ 中, 令 $a = x, b = 0$, 得 $f(x) + f(x) = 2f(x)f(0)$, 即 $2f(x) = 2f(x)f(0)$. 此式可化为 $f(x)(1-f(0)) = 0$. 由于 $f(x)$ 不是常函数 (特别地, 不是恒为零的函数), 必存在 x_0 使得 $f(x_0) \neq 0$. 因此, 必然有 $1 - f(0) = 0$, 即 $f(0) = 1$.

知乎@余命数

接着, 分析函数的奇偶性. 令 $a = 0, b = x$, 得 $f(x) + f(-x) = 2f(0)f(x)$. 代入 $f(0) = 1$, 得 $f(x) + f(-x) = 2f(x)$, 这立即导出 $f(-x) = f(x)$. 故 $f(x)$ 是一个偶函数.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

然后, 利用已知条件 $f(1)=1/2$. 令 $a=1, b=x$,

$$f(1+x)+f(1-x)=2f(1)f(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot f(x)=f(x)$$

由于 $f(x)$ 是偶函数, $f(1-x)=f(-(x-1))=f(x-1)$. 于是上式变为 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$.

将 x 换为 $x+1$, 得 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$. 再将 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$ 代入, 得 $f(x+2)+f(x)=f(x)-f(x-1)$, 故 $f(x+2)=-f(x-1)$. 将此式中 x 再换为 $x+1$, 得 $f(x+3)=-f(x)$.

这是反周期关系 $f(x+3)=-f(x)$, 迭代得

$$f(x+6)=f((x+3)+3)=-f(x+3)=-(-f(x))=f(x)$$

因此, $f(x)$ 是周期函数, 一个周期为 $T=6$.

据此求 $f(2024)$. 由周期性, 取 2024 除以 6 的余数:

$$2024=6\times 337+2$$

故 $f(2024)=f(2)$. 为求 $f(2)$, 回到反周期关系 $f(x+3)=-f(x)$, 令 $x=-1$, 得 $f(2)=-f(-1)$. 又 $f(x)$ 是偶函数, $f(-1)=f(1)=1/2$, 故 $f(2)=-f(1)=-1/2$.

因此 $f(2024)=f(2)=-1/2$.

3.6 凹凸性

注 3.4

本节后半使用一阶/二阶导数与中值定理判定凹凸, 并推出詹森不等式. 定义(弦在弧的上方/下方)与中点形式见下文; 导数判定与严格证明见 第四卷第 16 章.

函数的单调性描述了其图像的升降趋势, 这是一个关于**变化率符号**的性质. 然而, 函数图像的形态远比单纯的升降要丰富. 考虑函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$ (在 $x>0$ 时), 它们都是单调递增的, 但它们的增长姿态截然不同. $f(x)=x^2$ 的增长越来越快, 其图像向上弯曲; 而 $g(x)=\sqrt{x}$ 的增长越来越慢, 其图像向下弯曲.

凹凸性正是为了精确刻画函数图像的这种**弯曲方向**而引入的概念. 它所关注的, 是**变化率自身的变化趋势**.

3.6.1 凹凸性的几何直观与定义

要捕捉曲线的弯曲特性, 可从两个等价的几何观点出发.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.6.1.0.1 割线斜率的演变 一个更具动态的观点是考察连接曲线上两点的**割线**斜率如何变化. 设想我们在一个向上弯曲的曲线上固定一点 $P_1(x_1, f(x_1))$, 然后让另一点 $P_2(x_2, f(x_2))$ 沿着曲线从左向右移动. 连接 P_1 和 P_2 的割线, 其斜率是单调递增的.

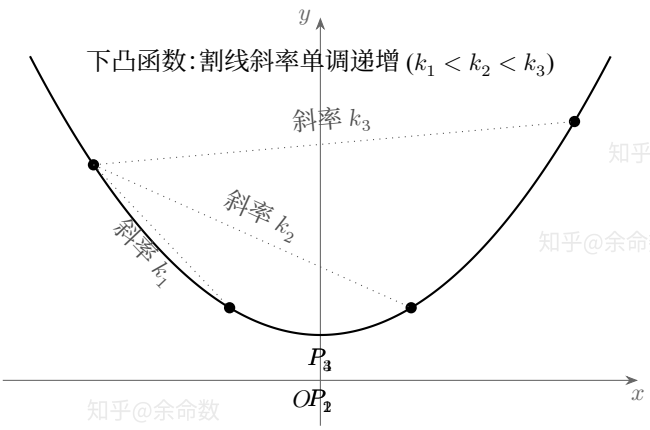


图 3.7 下凸函数割线斜率的单调性

3.6.1.0.2 函数图像与弦的相对位置 另一个等价的、也是更为经典的几何刻画, 是比较函数图像本身与连接其上任意两点的线段的相对位置, 前者称为弧, 后者称为**弦**.

- 对于一个向上弯曲的函数, 其图像总是位于连接其上任意两点的弦的**下方**(或重合).
- 对于一个向下弯曲的函数, 其图像总是位于连接其上任意两点的弦的**上方**或与之重合.

为了将这个几何观察转化为精确的代数语言, 需一种方式来表示弦上的点. 设弦的两个端点为 $A(x_1, f(x_1))$ 和 $B(x_2, f(x_2))$. 对于任意 $t \in [0,1]$, 表达式 $x_t = (1-t)x_1 + tx_2$ 给出了线段 $[x_1, x_2]$ 上的一个点. 对应地, 弦上具有相同横坐标的点的纵坐标, 是端点纵坐标的同权重线性组合, 即 $y_t = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. 而函数图像上对应点的纵坐标是 $f(x_t) = f((1-t)x_1 + tx_2)$. 比较这两个纵坐标的大小, 便得到了凹凸性的严格定义.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

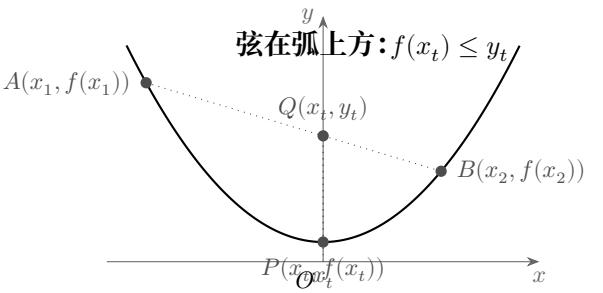


图 3.8　下凸函数的代数定义图解

知乎@余命数

定义 3.6 (凹凸函数) 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上.

- 若对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 和任意 $t \in [0,1]$, 恒有

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

  则称 $f(x)$ 为 I 上的**下凸函数**.

- 若对于任意 $x_1, x_2 \in I$ 和任意 $t \in [0,1]$, 恒有

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \ge (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

  则称 $f(x)$ 为 I 上的**上凸函数**.

若当 $x_1 \ne x_2$ 且 $t \in (0,1)$ 时上述不等式均取严格不等号, 则称函数为**严格**下凸或严格上凸.

知乎@余命数

这个不等式是凸性理论的基础. 特别地, 当取 $t = 1/2$ 时, 它退化为一个极其常用且直观的形式.

- **下凸函数**满足 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (中点的函数值不大于函数值的中点).
- **上凸函数**满足 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (中点的函数值不小于函数值的中点).

凹凸性的导数判定

3.6.1.1 凹凸性的分析判定法

凹凸性的代数定义严谨, 但在实际操作中直接应用不等式进行判定往往十分繁琐. 需一个更具操作性的分析工具. 这一工具的建立, 源于凹凸性的几何直观. **函数图像的弯曲方向, 实质上由其切线斜率的变化趋势所决定**.

知乎@余命数

我们考察一个下凸函数的图像. 当我们从左至右观察其切线时, 会发现切线的倾斜程度在持续增大. 即使在函数递减的部分, 切线的斜率也是从一个较大的负数向一个较小的负数变化, 始终处在增加的过程中. 这一观察是建立分析判定法的关键.

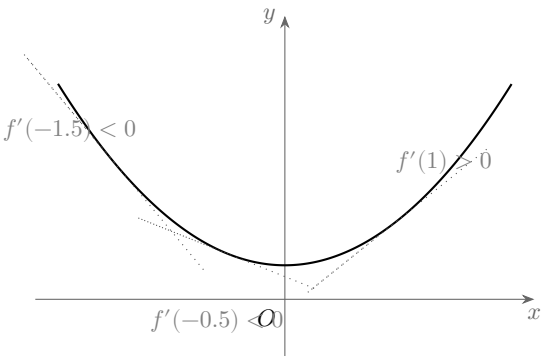


图 3.9 下凸函数: 切线斜率 $f'(x)$ 单调递增

实际上, 函数的凹凸性与其一阶导数的单调性是等价的.

定理 3.8 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 并在 I 的内部可导.

- $f(x)$ 在 I 上是下凸函数的充分必要条件是其导函数 $f'(x)$ 在 I 的内部单调递增.
- $f(x)$ 在 I 上是上凸函数的充分必要条件是其导函数 $f'(x)$ 在 I 的内部单调递减.

证明 仅证明下凸的情形; 上凸情形可对 $-f$ 应用同样结论得到.

先设 f 为下凸函数. 由下凸定义可推出割线斜率的单调性, 即任意满足 $x_1 < x_2 < x_3$ 的三点, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

将 x_2 写成 x_1, x_3 的加权平均并代入下凸定义, 可得

$$f(x_2) \le \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3),$$

整理即可得到上述两边不等式. 对任意 $a, b \in I$ 的内部且 $a < b$, 在上述不等式中令 $x_1 = a, x_3 = b$, 再分别令 $x_2 \to a^+$ 与 $x_2 \to b^-$, 得

$$f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b).$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此 $f'(a) \le f'(b)$, 即 f' 在 I 的内部单调递增.

反过来, 设 f' 在 I 的内部单调递增. 任取 $x_1 < x_2$ 与 $t \in (0,1)$, 令 $x_t = (1-t)x_1 + tx_2$. 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_t)$ 与 $\xi_2 \in (x_t, x_2)$, 使得

$$\frac{f(x_t)-f(x_1)}{x_t-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x_t)}{x_2-x_t} = f'(\xi_2).$$

因为 $\xi_1 < \xi_2$ 且 f' 单调递增, 所以前一割线斜率不大于后一割线斜率. 将 $x_t - x_1 = t(x_2-x_1)$ 与 $x_2 - x_t = (1-t)(x_2-x_1)$ 代入并整理, 得

$$f(x_t) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

当 $t=0$ 或 $t=1$ 时等式显然成立, 故 f 为下凸函数. □

知乎@余命数

这个定理将凹凸性的判定问题, 转化为了已熟悉的**单调性判定问题**, 只不过判定的对象是导函数 $f'(x)$. 已知, 一个函数(此处为 $f'(x)$)的单调性由其自身的导数, 即 $f''(x)$ 的符号所决定. 这便引出了最终的、也是最常用的分析判定法.

定理 3.9 (二阶导数判定法) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 并在 I 的内部二阶可导.

- 若在 I 的内部恒有 $f''(x) \ge 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上是下凸的.
- 若在 I 的内部恒有 $f''(x) \le 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上是上凸的.

知乎@余命数 知乎

证明 若 $f''(x) \ge 0$, 则对任意 $a, b \in I$ 的内部且 $a < b$, 将拉格朗日中值定理用于函数 f' 可得存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a) \ge 0.$$

知乎@余命数

因而 f' 在 I 的内部单调递增, 由上一条定理得 f 在 I 上下凸.

知乎@余命数

若 $f''(x) \le 0$, 同理可得 $f'(b) - f'(a) \le 0$, 即 f' 在 I 的内部单调递减, 从而 f 在 I 上上凸. □

此定理将判断凹凸性的问题最终归结为求解一个不等式, 即判断二阶导数 $f''(x)$ 的符号.

3.6.1.2 拐点

函数从一种弯曲形态过渡到另一种的临界点, 称为拐点.

定义 3.7 (拐点) 若函数 $y = f(x)$ 的图像在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处**凹凸性发生改变**, 则称点 P 为该函数图像的一个**拐点**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根据二阶导数判定法, 拐点的出现意味着二阶导数 $f''(x)$ 在该点两侧的符号发生了改变. 因此, 若函数在拐点 x_0 处二阶可导, 则必然有 $f''(x_0)=0$.$f''(x_0)=0$ 只是拐点的必要条件.(思考: 考虑函数 $f(x)=x^4$, 其在 $x=0$ 处二阶导数为零, 但该点处的凹凸性保持不变.)

例题 3.23 确定函数 $f(x)=x^3-6x^2+5x+1$ 的凹凸区间及拐点.

解 先求导, 一阶与二阶导数为

$$f'(x)=3x^2-12x+5,$$

$$f''(x)=6x-12.$$

令 $f''(x)=0$ 解得 $x=2$, 此为唯一的拐点候选. 以该点为界考察 $f''(x)$ 的符号:

- 当 $x\in(-\infty,2)$ 时, $f''(x)<0$. 根据定理, 函数 $f(x)$ 在此区间上是**上凸**的.
- 当 $x\in(2,+\infty)$ 时, $f''(x)>0$. 根据定理, 函数 $f(x)$ 在此区间上是**下凸**的.

函数在 $x=2$ 两侧的凹凸性发生改变, 因此点 $(2,f(2))$ 是拐点, 其中 $f(2)=2^3-6(2^2)+5(2)+1=8-24+10+1=-5$.

故函数 $f(x)$ 的上凸区间为 $(-\infty,2)$, 下凸区间为 $(2,+\infty)$, 拐点为 $(2,-5)$.

3.6.2 詹森不等式

凹凸性的定义本身蕴含了一个不等式结构. 当将定义中连接两点的弦与弧的关系, 从两个点自然地推广到任意多个点时, 便得到了数学分析中应用广泛的**詹森不等式**.

3.6.2.1 詹森不等式的一般形式

詹森不等式指出: **下凸函数在加权平均点处的函数值, 不大于函数值按同样权重的加权平均**.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

定理 3.10 (詹森不等式) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数.

1. 若 $f(x)$ 为**下凸函数**, 则对于任意正整数 n、任意 $x_1,\dots,x_n \in I$ 以及任意一组满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$ 的非负权重 $\lambda_i \geq 0$, 恒有:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) \tag{3-13}$$

2. 若 $f(x)$ 为**上凸函数**, 则上述不等号方向相反.

对于严格凹凸函数, 等号成立的充分必要条件是所有正权重对应的 x_i 相等.

知乎@余命数

证明 只证明下凸情形; 上凸情形可对 $-f$ 应用下凸结论得到.

对正权重点的个数作归纳. 若只有一个正权重, 则该权重必为 1, 不等式为恒等式. 设结论对正权重点数不超过 $n-1$ 的情形成立, 现考虑有 n 个正权重的情形. 不妨这些正权重为 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, 且 $0<\lambda_n<1$. 令

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} \quad (i=1,2,\dots,n-1), \qquad y = \sum_{i=1}^{n-1}\mu_i x_i.$$

则 $\mu_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i = 1$, 并且

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = (1-\lambda_n)y + \lambda_n x_n.$$

知乎@余命数

由下凸定义与归纳假设,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) &= f((1-\lambda_n)y + \lambda_n x_n) \\ &\leq (1-\lambda_n)f(y) + \lambda_n f(x_n) \\ &\leq (1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i f(x_i) + \lambda_n f(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

因而詹森不等式成立.

若 f 严格下凸, 且至少有两个正权重对应的点不同, 则在上述归纳过程中会出现一次对两个不同点取严格加权平均的步骤, 相应不等号为严格不等号, 故整体为严格不等式. 反之, 若所有正权重对应的 x_i 相等, 两边显然相等. 严格上凸情形同理. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此定理的加权形式是其最完整的表述. 当取所有权重相等, 即 $\lambda_i = 1/n$ 时, 便得到了其更为人熟知的算术平均形式.

推论 3.2 (詹森不等式的算术平均形式) 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数.

1. 若 $f(x)$ 为**下凸函数**, 则对于任意正整数 n 和任意 $x_1, \dots, x_n \in I$, 有:

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \tag{3-14}$$

   此即平均的函数值不大于函数值的平均.

2. 若 $f(x)$ 为**上凸函数**, 则不等号方向相反.

知乎@余命数

证明 (算术平均形式的证明) 在詹森不等式的一般形式中取等权重 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1/n$, 即得

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

对下凸函数成立. 若 f 为上凸函数, 则应用一般形式中的上凸情形, 不等号方向相反. □

用二阶导数验证凸性并推均值

3.6.3 从琴生不等式到均值不等式

知乎@余命数

许多著名不等式是詹森不等式的特例.

例题 3.24 证明算术-几何平均值不等式: 对于正数 $x_1, \dots, x_n$, $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$.

解 考虑函数 $f(x) = \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$. 其二阶导数为 $f''(x) = -1/x^2$. 在 $(0, +\infty)$ 内, $f''(x) < 0$ 恒成立, 故 $f(x) = \ln x$ 是严格上凸函数.

知乎@余命数

由上凸函数的詹森不等式,

$$\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

利用对数性质, 左侧化为

$$\frac{\ln(x_1 \dots x_n)}{n} = \ln\left((x_1 \dots x_n)^{1/n}\right) = \ln(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n})$$

代入原不等式, 得 $\ln(\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}) \leq \ln(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n})$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由于对数函数是严格单调递增的, 上述不等关系等价于其自变量之间的不等关系:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

证毕.

注 3.5 (詹森不等式的应用信号)
在处理多元函数极值问题时, 若目标表达式形如 $\sum f(x_i)$, 例如 $2^{x_1} + 2^{x_2}$ 或 $\sin A + \sin B + \sin C$, 且变量满足和为定值的约束 $\sum x_i = C$, 这便是应用詹森不等式的典型信号.

知乎@余命数

例题 3.25　在 $\triangle ABC$ 中, 求 $S = \sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值.

解 此问题符合上述应用模式. 考虑函数 $f(x) = \sin x$, 定义域为内角范围 $(0, \pi)$, 变量满足 $A + B + C = \pi$.

函数 $f(x) = \sin x$ 的二阶导数为 $f''(x) = -\sin x$. 在区间 $(0, \pi)$ 内, $\sin x > 0$, 故 $f''(x) < 0$. 因此 $f(x)$ 是严格上凸函数.

应用上凸函数的詹森不等式,

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \le \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right)$$

代入约束 $A + B + C = \pi$, 得

$$\frac{S}{3} \le \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

知乎@余命数

故 $S \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

等号成立条件为 $A = B = C = \pi/3$, 此条件可以达到(当 $\triangle ABC$ 为正三角形时). 因此, S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3.7 反函数

知乎@余命数

函数把定义域中的每个 x 唯一地对应到值域中的一个 y. 我们关心的问题是, 能否从 y 唯一地找回 x. 如果可以, 这个把 y 映回 x 的对应法则就称为函数 f 的**反函数**. 反函数的图像把横、纵坐标互换, 因此它与原函数的图像关于直线 $y = x$ 对称.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.7.1 反函数存在的条件

设给定函数 f. 一个从值域回到定义域的对应法则要成为函数, 必须让值域中的每个 y 都唯一对应定义域中的一个 x. 这正好要求 f 把不同的输入映到不同的输出, 即没有两个不同的 x 对应同一个 y.

定义 3.8 (单射) 称一个函数 $f : A \to C$ 是**单射**, 如果对于其定义域 A 内任意两个不同的元素 x_1, x_2, 其对应的函数值也必然不同, 即 $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

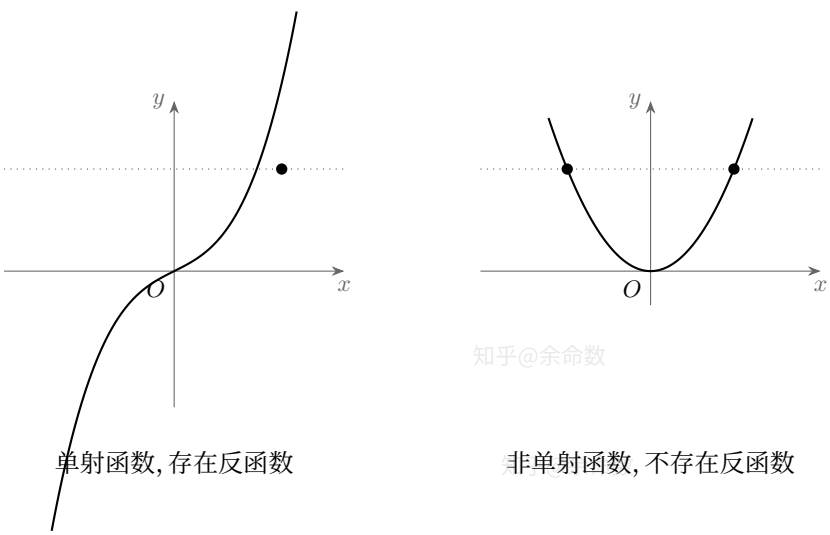
单射性给出了反函数存在的充分必要条件.

定理 3.11 设函数 f 的定义域为 A, 值域为 $C = f(A)$. 则 f 存在从 C 到 A 的反函数的充分必要条件是 f 为单射.

证明 若 f 为单射, 则对任意 $y \in C$, 由值域定义, 至少存在 $x \in A$ 使 $f(x) = y$; 又由单射性, 这样的 x 至多一个. 因此每个 $y \in C$ 都唯一对应一个 $x \in A$, 可定义 $f^{-1}(y) = x$, 这给出了从 C 到 A 的函数.

反过来, 若反函数 $f^{-1} : C \to A$ 存在, 而 f 不是单射, 则存在 $x_1 \neq x_2$ 使 $f(x_1) = f(x_2) = y$. 这会使同一个 $y \in C$ 在逆过程中同时对应 x_1 与 x_2, 与 f^{-1} 是函数矛盾. 故 f 必为单射. □

在几何上, 我们用**水平线检验法**判断一个函数是否为单射. 任取一条水平直线, 若它与函数图像至多只有一个交点, 则该函数是单射, 因而存在反函数. 严格单调函数是单射函数的一个重要子类.



单射函数, 存在反函数　　非单射函数, 不存在反函数

图 3.10 水平线检验法

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.7.2 反函数的定义与求解

定义 3.9 (反函数) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A, 值域为 C, 且 f 为单射. 对于任意 $y\in C$, 方程 $y=f(x)$ 存在唯一的解 $x\in A$. 这个解 x 依赖于 y, 因此可定义一个新函数 $g:C\to A$, 使得 $x=g(y)$. 函数 g 称为 f 的**反函数**, 记作 f^{-1}.

按照惯例, 用 x 表示自变量, y 表示因变量, 故将 $x=f^{-1}(y)$ 写为 $y=f^{-1}(x)$. 此时, 反函数的定义域是原函数的值域 C.

符号 $f^{-1}(x)$ 是反函数的标准记法, 它与 $\frac{1}{f(x)}$ 绝无关系.

确认 f 是单射后, 求解反函数可分三步.

1. **反解**. 从 $y=f(x)$ 中解出 x, 得到 $x=f^{-1}(y)$.
2. **互换**. 将 x 与 y 互换, 得到 $y=f^{-1}(x)$.
3. **注明定义域**. 反函数的定义域是原函数的值域.

例题 3.26 求函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ 的反函数.

解 先确定原函数 $f(x)$ 的值域. 将 $y=\frac{2x-1}{x+3}$ 变形为 $y=2-\frac{7}{x+3}$. 由于 $\frac{7}{x+3}\neq 0$, 故 $y\neq 2$. 原函数的值域为 $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, 此即反函数的定义域.

接着, 从 $y=\frac{2x-1}{x+3}$ 中反解 x:

$$y(x+3)=2x-1$$

$$xy+3y=2x-1$$

$$3y+1=x(2-y)$$

$$x=\frac{3y+1}{2-y}$$

互换 x,y 得到 $y=\frac{3x+1}{2-x}$.

因此, 所求反函数为 $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{2-x}$, 其定义域为 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 2\}$.

3.7.3 反函数的性质

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在代数与几何上互为对偶. 下面给出四条基本性质.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.12 (反函数的性质) 设 $y = f(x)$ 是一个存在反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的函数.

1. **图像对称性**.$y = f(x)$ 的图像与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.
2. **定义域与值域互换**.f 的定义域是 f^{-1} 的值域, f 的值域是 f^{-1} 的定义域.
3. **单调性一致性**. 若 $f(x)$ 在某个区间上单调递增(减),则其反函数 $f^{-1}(x)$ 在对应的区间上单调性相同.
4. **复合抵消性**. 对于 f^{-1} 定义域中的任意 x, $f(f^{-1}(x)) = x$. 对于 f 定义域中的任意 x, $f^{-1}(f(x)) = x$.

证明 对于图像对称性, 若点 $P(a,b)$ 在 $y = f(x)$ 的图像上, 则 $b = f(a)$. 根据反函数的定义,这等价于 $a = f^{-1}(b)$. 故点 $Q(b,a)$ 在 $y = f^{-1}(x)$ 的图像上. 点 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 关于直线 $y = x$ 对称, 此结论对图像上所有点均成立, 故两函数图像关于 $y = x$ 对称.

对于定义域与值域互换, 由反函数的定义, f^{-1} 的自变量取自 f 的值域 C, 而函数值回到 f 的定义域 A, 因此定义域和值域互换.

对于单调性一致性,设 f 在区间 I 上单调递增,且 $y_1 < y_2$ 为反函数定义域中对应的两个值. 令 $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$. 若 $x_1 \geq x_2$, 由 f 递增得 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 即 $y_1 \geq y_2$, 矛盾, 故 $x_1 < x_2$, 反函数递增. 若 f 单调递减, 同理由 $x_1 \leq x_2$ 会推出 $y_1 \geq y_2$ 的矛盾, 因而 $x_1 > x_2$, 反函数递减.

对于复合抵消性, 任取 x 属于 f^{-1} 的定义域, 设 $u = f^{-1}(x)$, 则按反函数定义 $f(u) = x$, 即 $f(f^{-1}(x)) = x$. 任取 x 属于 f 的定义域, 令 $y = f(x)$, 则 $f^{-1}(y) = x$, 即 $f^{-1}(f(x)) = x$. □

例题 3.27 已知 x_1 是方程 $3^x = \frac{4}{x}$ 的根, x_2 是方程 $\log_3 x = \frac{4}{x}$ 的根, 求 $x_1 x_2$.

解 这两个方程无法直接求解. 从函数图像分析.

方程一的根 x_1 是函数 $y_1 = 3^x$ 与 $y_g = 4/x$ 图像交点的横坐标. 方程二的根 x_2 是函数 $y_2 = \log_3 x$ 与 $y_g = 4/x$ 图像交点的横坐标. 这两个交点均唯一. 方程 $3^x = 4/x$ 等价于 $x3^x = 4$,其定义域内必须有 $x > 0$,而 $x3^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增; 方程 $\log_3 x = 4/x$ 等价于 $x \log_3 x = 4$, 其解必须满足 $x > 1$, 而 $x \log_3 x$ 在 $(1, +\infty)$ 上严格递增.

分析这三个函数的对称性. $y_1 = 3^x$ 与 $y_2 = \log_3 x$ 互为反函数, 它们的图像关于直线 $y = x$ 对称. $y_g = 4/x$ 的反函数是其自身, 故其图像也关于直线 $y = x$ 对称.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

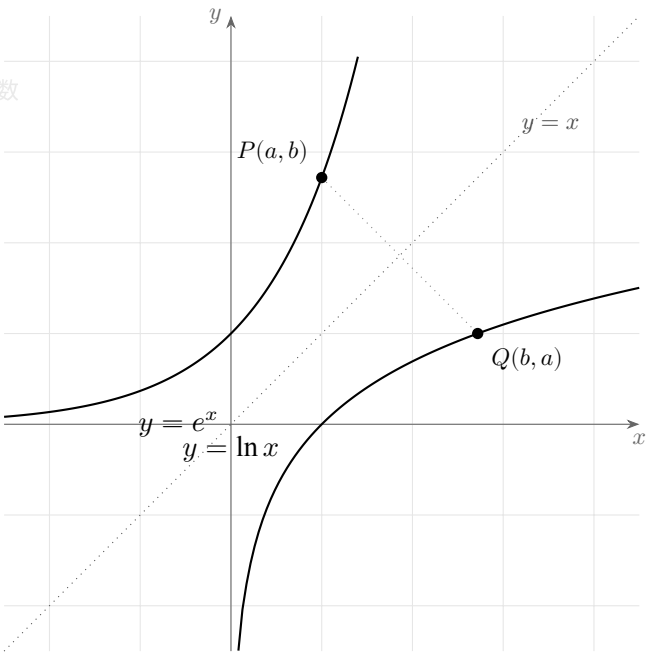


图 3.11　函数与反函数图像关于 $y=x$ 对称

设 $P_1(x_1,y_1)$ 是 $y_1=3^x$ 与 $y_g=4/x$ 的一个交点. 由于 y_1 关于 $y=x$ 对称的图像是 y_2, 而 y_g 关于 $y=x$ 对称的图像仍是 y_g, y_2 与 y_g 的交点 $P_2(x_2,y_2)$ 必然是 $P_1(x_1,y_1)$ 关于直线 $y=x$ 的对称点.

因此, P_2 的坐标为 (y_1,x_1), 即 $x_2=y_1, y_2=x_1$.

由 P_1 点的定义, 有 $y_1=4/x_1$. 结合 $x_2=y_1$, 得 $x_2=4/x_1$.

故 $x_1x_2=4$.

3.8 函数的复合

给定两个函数, 我们希望依次把它们的对应法则作用到同一个输入上. 这种依次作用产生的新函数称为**复合函数**. 我们关心复合函数的定义域、值域, 以及它的单调性与奇偶性如何由内层函数和外层函数决定.

3.8.1 复合函数的定义

设有两个函数 f 和 g. 先让 g 作用于 x, 得到中间值 $u=g(x)$; 再让 f 作用于 u, 得到 $y=f(u)$. 于是从 x 到 y 的对应法则定义了一个新函数.

$$x \xrightarrow{g} u=g(x) \xrightarrow{f} y=f(u)=f(g(x))$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 3.10 (复合函数) 设有函数 $u = g(x)$ 和 $y = f(u)$,则通过代换形成的函数

$$y = f(g(x)) \tag{3-15}$$

称为由函数 g 和 f 构成的**复合函数**. 其中, x 是自变量, u 是**中间变量**. 我们称 g 为**内层函数**, f 为**外层函数**.

复合函数 $y = f(g(x))$ 有定义的前提是, 内层函数 $g(x)$ 的值域包含于外层函数 $f(u)$ 的定义域.

知乎@余命数

3.8.2 复合函数的基本性质

知乎@余命数

3.8.2.1 定义域

复合函数有定义, 当且仅当复合过程的每一步都有意义.

定理 3.13 (复合函数定义域) 设函数 f 的定义域为 D_f, 函数 g 的定义域为 D_g. 则复合函数 $y = f(g(x))$ 的定义域 $D_{f\circ g}$ 是同时满足以下两个条件的自变量 x 构成的集合.

1. $x \in D_g$(内层函数有意义);
2. $g(x) \in D_f$(外层函数有意义).

即 $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

知乎@余命数

证明 复合函数 $f(g(x))$ 有意义, 当且仅当内层函数 $g(x)$ 先有意义且所得值可以作为 f 的输入. 前者等价于 $x \in D_g$, 后者等价于 $g(x) \in D_f$. 因此所有可取的 x 恰为

$$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

□

例题 3.28 已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $[0,1]$, 求函数 $f(\sqrt{x})$ 的定义域.

解 此问题需先确定外层函数 f 的定义域. 由题设, 当 $x \in [0,1]$ 时, $f(2x-1)$ 有意义. 即 f 的输入量, 即中间变量 $u = 2x-1$ 的取值范围由 $x \in [0,1]$ 决定. 当 $x \in [0,1]$ 时, $u = 2x-1 \in [-1,1]$. 因此, 外层函数 $f(u)$ 的定义域为 $D_f = [-1,1]$.

知乎@余命数

知乎@余命数

对于新函数 $f(\sqrt{x})$, 其定义域满足

$$\begin{cases} x \geq 0 & (\text{内层函数}\sqrt{x}\text{ 有意义}) \\ \sqrt{x} \in [-1,1] & (\text{内层函数的值在外层函数的定义域内}) \end{cases}$$

由于 $\sqrt{x} \geq 0$, 第二个条件等价于 $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, 平方得 $0 \leq x \leq 1$. 联立两个条件, 函数 $f(\sqrt{x})$ 的定义域为 $[0,1]$.

3.8.2.2 值域

求解复合函数 $y = f(g(x))$ 的值域, 可以由内向外进行.

1. 先在复合函数的定义域内求出内层函数 $u = g(x)$ 的值域 R_g.
2. 再将 R_g 作为外层函数 $f(u)$ 的新定义域, 在此定义域上求 $f(u)$ 的值域, 即为原复合函数的值域.

知乎@余命数

例题 3.29　求函数 $y = 4^x - 2^{x+1} + 3$ 的值域.

解　我们用换元法识别其复合结构. 令 $u = 2^x$, 则原函数可视为 $y = u^2 - 2u + 3$. 这是一个由内层函数 $u = g(x) = 2^x$ 和外层函数 $y = f(u) = u^2 - 2u + 3$ 构成的复合函数.

内层函数 $u = 2^x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 其值域为 $R_g = (0, +\infty)$.

问题转化为求二次函数 $y = f(u) = (u-1)^2 + 2$ 在定义域 $u \in (0, +\infty)$ 上的值域. 此为开口向上, 对称轴为 $u = 1$ 的抛物线. 由于对称轴 $u = 1$ 位于定义域 $(0, +\infty)$ 内, 函数在 $u = 1$ 处取得最小值 $y_{\min} = f(1) = 2$.

因此, 原函数的值域为 $[2, +\infty)$.

3.8.2.3 单调性与奇偶性

下面讨论复合函数的单调性与奇偶性.

定理 3.14 (复合函数单调性)　设复合函数 $y = f(g(x))$ 在区间 I 上有定义, 且 $u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 在各自对应的定义域区间上单调.

- 若 $f(u)$ 与 $g(x)$ 单调性**相同**, 即同为非减或同为非增, 则 $f(g(x))$ 为**单调递增(非减)**.
- 若 $f(u)$ 与 $g(x)$ 单调性**相异**, 即一非减一非增, 则 $f(g(x))$ 为**单调递减(非增)**.

若相应的两个单调性均为严格单调, 则结论也相应为严格单调.

知乎@余命数

证明 设 $x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$，令 $u_1 = g(x_1)$，$u_2 = g(x_2)$. 若 g 与 f 均非减，则 $u_1 \le u_2$，进而 $f(u_1) \le f(u_2)$，复合函数非减. 若 g 与 f 均非增，则 $u_1 \ge u_2$，由 f 非增得 $f(u_1) \le f(u_2)$，复合函数仍非减. 若 g 非减而 f 非增，则 $u_1 \le u_2$ 推出 $f(u_1) \ge f(u_2)$，复合函数非增. 若 g 非增而 f 非减，同理有 $u_1 \ge u_2$ 推出 $f(u_1) \ge f(u_2)$，复合函数非增. 严格单调情形只需将相应不等号替换为严格不等号. □

定理 3.15 (复合函数奇偶性) 设复合函数 $y = f(g(x))$ 的定义域 D 关于原点对称.

1. 若内层函数 $g(x)$ 是**偶函数**，则 $y = f(g(x))$ 必为**偶函数**.
2. 若内层函数 $g(x)$ 是**奇函数**，且外层函数 $f(u)$ 在 $g(D)$ 上为偶函数或奇函数，则复合函数的奇偶性与外层函数 $f(u)$ 相同.

证明 (奇偶性定理证明) 令 $F(x) = f(g(x))$. 1. 若 g 为偶函数：$F(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = F(x)$. 故 $F(x)$ 为偶函数. 2. 若 g 为奇函数：$F(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x))$. 若 f 为偶函数，$f(-g(x)) = f(g(x)) = F(x)$，故 $F(x)$ 为偶函数. 若 f 为奇函数，$f(-g(x)) = -f(g(x)) = -F(x)$，故 $F(x)$ 为奇函数. □

3.8.3 函数相等

两个函数相等的含义由下面的定义给出.

定义 3.11 (函数相等) 若两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的**定义域相同**，且**对应法则也相同**，则称这两个函数相等，记为 $f(x) = g(x)$.

判断两个函数是否相等，需要同时检查这两个方面. 通常可先把解析式化到最简，再比较化简结果.

例题 3.30 判断 $f(x) = x + 2$ 与 $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ 是否为同一函数.

解 先看定义域. $f(x) = x + 2$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ 的分母不能为零，即 $x \ne 2$. 其定义域为 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ne 2\}$.

由于定义域不同，这两个函数不是同一函数.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

3.9 函数的图像变换

我们从基本函数的图像出发, 通过平移、伸缩、对称等操作构造更复杂函数的图像. 本节建立这些几何操作与代数表示之间的联系.

3.9.1 变换的统一原理

所有图像变换都归结为新旧坐标之间的代换关系.

设原函数图像满足方程 $y_0 = f(x_0)$, 其上任意一点为 (x_0, y_0). 经过变换, 该点移动至新图像上的点 (x, y). 若新旧坐标间的变换关系可表示为

$$x_0 = g(x, y)$$

$$y_0 = h(x, y)$$

知乎@余命数

则将此关系代入原方程 $y_0 = f(x_0)$, 即得新图像的方程 $h(x, y) = f(g(x, y))$.

知乎@余命数

注 3.6 (坐标变换与方程变换的对偶性)
方程的变换与点的坐标变换在形式上互为逆过程. 例如, 将图像上的所有点 (x_0, y_0) 向右平移 a 个单位得到新点 (x, y), 其坐标关系为 $x = x_0 + a, y = y_0$. 为建立新坐标 (x, y) 满足的方程, 必须用新坐标表示旧坐标, 即 $x_0 = x - a, y_0 = y$, 然后代入原方程, 得到 $y = f(x - a)$. 作用于坐标的变换是 $+a$, 而作用于方程中变量的变换是 $-a$.

3.9.2 基本图像变换

知乎@余命数

定理 3.16 (平移与伸缩变换) 设原函数为 $y = f(x)$, a, b, ω, A 均为正实数.

- **水平平移**: $y = f(x - a)$ 的图像由 $y = f(x)$ 向右平移 a 个单位得到.
- **竖直平移**: $y = f(x) + b$ 的图像由 $y = f(x)$ 向上平移 b 个单位得到.
- **水平伸缩**: $y = f(\omega x)$ 的图像由 $y = f(x)$ 上各点的横坐标变为原来的 $1/\omega$ 倍得到(纵坐标不变).
- **竖直伸缩**: $y = Af(x)$ 的图像由 $y = f(x)$ 上各点的纵坐标变为原来的 A 倍得到(横坐标不变).

证明 设原图像上一点为 (x_0, y_0), 则 $y_0 = f(x_0)$. 水平右移 a 后新点满足 $x = x_0 + a, y = y_0$, 即 $x_0 = x - a$, 故新图像方程为 $y = f(x - a)$. 竖直上移 b 后新点满足 $x = x_0, y = y_0 + b$, 即 $y - b = f(x)$, 故 $y = f(x) + b$.

水平伸缩时新点满足 $x = x_0/\omega, y = y_0$, 即 $x_0 = \omega x$, 故新图像方程为 $y = f(\omega x)$. 竖直伸缩时新点满足 $x = x_0, y = Ay_0$, 即 $y/A = f(x)$, 故 $y = Af(x)$. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.17 (对称变换) 设原函数为 $y=f(x)$.

- 关于 **x 轴**对称的图像方程为 $y=-f(x)$.
- 关于 **y 轴**对称的图像方程为 $y=f(-x)$.
- 关于 **原点**对称的图像方程为 $y=-f(-x)$.
- 关于直线 **y=x** 对称的图像方程为 $x=f(y)$; 当 f 存在反函数时, 该图像可写为 $y=f^{-1}(x)$.

证明 关于 x 轴对称时, 新旧点满足 $x=x_0, y=-y_0$, 即 $-y=f(x)$, 故 $y=-f(x)$. 关于 y 轴对称时, 新旧点满足 $x=-x_0, y=y_0$, 即 $y=f(-x)$. 关于原点对称时, 新旧点满足 $x=-x_0, y=-y_0$, 即 $-y=f(-x)$, 故 $y=-f(-x)$.

关于直线 $y=x$ 对称时, 新旧点满足 $x=y_0, y=x_0$. 由 $y_0=f(x_0)$ 得 $x=f(y)$. 若 f 为单射并存在反函数, 则该关系等价于 $y=f^{-1}(x)$. □

上述变换都可由统一原理直接推出.

3.9.3 复合变换

对于形如 $y=Af(\omega x+\phi)+k$ 的函数, 我们须注意其图像变换的顺序. 为建立坐标关系, 先把它改写为标准形式

$$y-k=Af\left(\omega\left(x+\frac{\phi}{\omega}\right)\right)$$

从基函数 $y_0=f(x_0)$ 到目标函数的坐标映射关系为

$$x_0=\omega\left(x+\frac{\phi}{\omega}\right),\quad y_0=\frac{y-k}{A}$$

反解出新坐标 (x,y) 与旧坐标 (x_0,y_0) 的关系, 得

$$x=\frac{1}{\omega}x_0-\frac{\phi}{\omega},\quad y=Ay_0+k$$

此坐标变换过程可分解为伸缩, 或对称变换与平移变换的复合. 我们采用**先伸缩, 后平移**的作图顺序. 水平变换与竖直变换的次序无关, 但各自内部先伸缩后平移的次序不可颠倒.

例题 3.31 叙述由 $y=\sin x$ 的图像变换得到 $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ 图像的过程.

解 将目标函数改写为标准形式 $y-1=-2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. 变换过程如下.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

1. 水平变换. (a) 将 $y=\sin x$ 图像上所有点的横坐标变为原来的 2 倍, 得到 $y=\sin(\frac{1}{2}x)$ 的图像. (b) 再将所得图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 得到 $y=\sin(\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}))$ 的图像.

2. 竖直变换. (a) 将前一步所得图像上所有点的纵坐标变为原来的 -2 倍, 即伸长到 2 倍, 再关于 x 轴对称, 得到 $y=-2\sin(\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}))$ 的图像. (b) 最后将所得图像向上平移 1 个单位, 得到最终图像.

3.9.4 绝对值变换

知乎@余命数

我们讨论含绝对值的函数, 其图像可通过对坐标轴翻折得到.

定理 3.18 (翻折变换) 设原函数为 $y=f(x)$.

1. **函数 $y=f(|x|)$ 的图像**: 由 $f(|x|)=\begin{cases}f(x), & x\geq 0\\ f(-x), & x<0\end{cases}$ 可知, 新函数为偶函数. 其图像按两步构造. 保留 $y=f(x)$ 图像在 y 轴右侧, 含 y 轴的部分, 并将此部分关于 y 轴对称翻折到左侧, 构成完整图像.
2. **函数 $y=|f(x)|$ 的图像**: 由 $|f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\geq 0\\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}$ 可知, 新函数的值域非负. 其图像按两步构造. 保留 $y=f(x)$ 图像在 x 轴上方, 含 x 轴的部分, 并将 x 轴下方的部分关于 x 轴对称翻折到上方.

知乎@余命数

证明 对 $y=f(|x|)$, 当 $x\geq 0$ 时 $|x|=x$, 所以图像与原图像右半部分一致; 当 $x<0$ 时 $|x|=-x$, 因而左侧点 $(x,f(|x|))$ 与右侧点 $(-x,f(-x))$ 关于 y 轴对称. 这说明保留右半部分并关于 y 轴翻折即可得到全图.

对 $y=|f(x)|$, 当 $f(x)\geq 0$ 时图像点不变; 当 $f(x)<0$ 时 $|f(x)|=-f(x)$, 即原来位于 x 轴下方的点 $(x,f(x))$ 被映到关于 x 轴对称的点 $(x,-f(x))$. 因此保留 x 轴上方部分并将下方部分向上翻折即可得到全图. □

导函数对称性

知乎@余命数

3.9.5 导函数的对称性

知乎@余命数

定理 3.19 若可导函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 轴对称, 则其导函数 $y=f'(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 中心对称.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

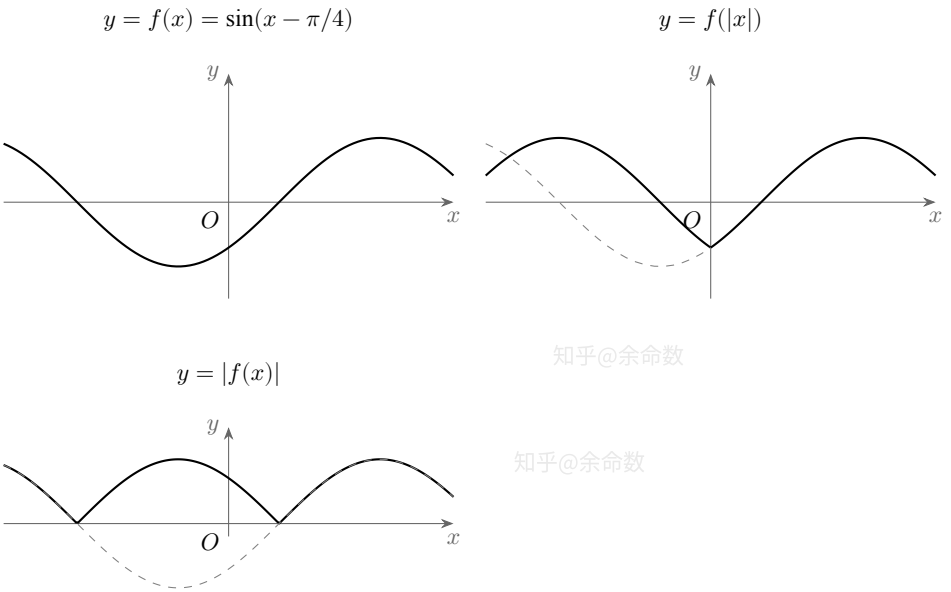


图 3.12 翻折变换示例

证明 函数 $f(x)$ 的图像关于 $x = a$ 对称, 等价于 $f(a - x) = f(a + x)$. 我们把这个恒等式两边关于 x 求导. 由链式法则得

$$[f(a-x)]' = [f(a+x)]'$$
$$f'(a-x)\cdot(a-x)' = f'(a+x)\cdot(a+x)'$$
$$-f'(a-x) = f'(a+x)$$

这正是导函数 $f'(x)$ 的图像关于点 $(a, 0)$ 中心对称的定义. □

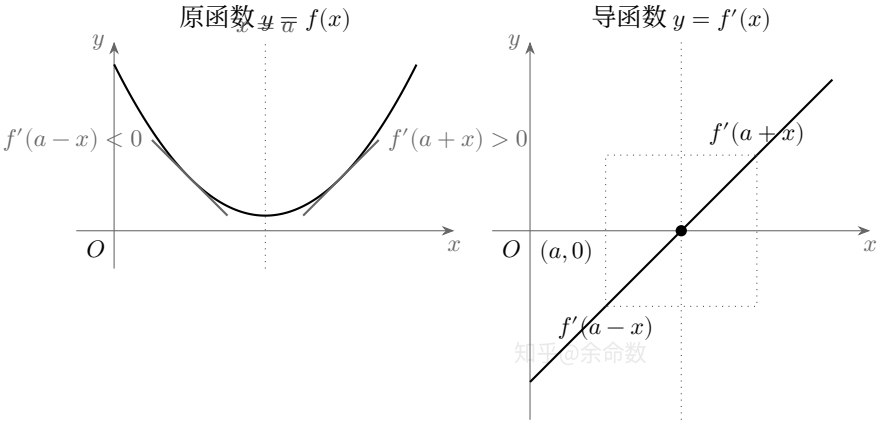


图 3.13 轴对称原函数与中心对称导函数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.10 常见多项式函数

多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 由幂函数通过有限次加法与数乘得到, 其定义域为 $\mathbb{R}$. 我们先回顾一次函数与二次函数的主要性质, 再分析三次函数的对称性、单调性与根.

注 3.7
三次函数的极值、拐点与切线条数讨论使用导数语言, 见第四卷第 16 章.

知乎@余命数

3.10.1 一次与二次函数回顾

知乎@余命数

一次函数 $f(x)=kx+b\ (k\neq 0)$ 的斜率 k 处处相等, 即其变化率恒定(分析语言中即 $f'(x)=k$ 为常数, 见 第四卷第 16 章). 在几何上, 直线是自身在每一点的切线, 并且关于其上任意一点都构成中心对称图形.

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的**变化率的变化率恒定**. 其弯曲方向在整个定义域上保持不变(分析语言中 $f''(x)=2a$ 为非零常数, 见 第四卷第 16 章). 抛物线的基本性质是**轴对称性**, 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$. 这一对称性把函数的几何与代数性质联系起来. 设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 x_1,x_2, 根据韦达定理, $x_1+x_2=-b/a$. 因此对称轴的横坐标 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$ 恰好是两根的算术平均值. 对称轴即为函数零点的几何中心.

三次函数的导数视角

3.10.2 三次函数

知乎@余命数　知乎@余命数

三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ 的形态与性质更丰富, 其一阶导数与二阶导数分别决定单调性、极值与凹凸性、拐点.

知乎@余命数　知乎@余命数

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=6ax+2b$$

一阶导数是二次函数, 决定原函数的单调性与极值; 二阶导数是一次函数, 决定原函数的凹凸性与拐点. 我们通过导函数研究原函数.

3.10.2.1 单调性与极值

三次函数的单调性完全取决于其导函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 的符号. $f'(x)$ 是二次函数, 其符号由判别式 $\Delta=(2b)^2-4(3a)c=4(b^2-3ac)$ 决定.

1. **当 $\Delta>0$ 时**, 即 $b^2-3ac>0$, 方程 $f'(x)=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2. 这两个根是 $f(x)$ 的极值点. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\min\{x_1,x_2\})$ 和 $(\max\{x_1,x_2\},+\infty)$ 上的单调性相同, 在 $(\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\})$ 上单调性相反. 其图像呈 S 形, 有一个极大值点和一个极小值点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. **当 $\Delta = 0$ 时**, 即 $b^2 - 3ac = 0$, 方程 $f'(x) = 0$ 有两个相等的实数根 x_0. 此时 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上除一点外恒为正或恒为负. 函数 $f(x)$ 在整个定义域 $\mathbb{R}$ 上是单调的, 没有极值点. 但在 x_0 处, 其切线斜率为零, 该点是一个水平拐点.
3. **当 $\Delta < 0$ 时**, 即 $b^2 - 3ac < 0$, 方程 $f'(x) = 0$ 无实数根. $f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒为正或恒为负. 函数 $f(x)$ 在整个定义域 $\mathbb{R}$ 上是严格单调的, 既无极值点, 也无水平切线.

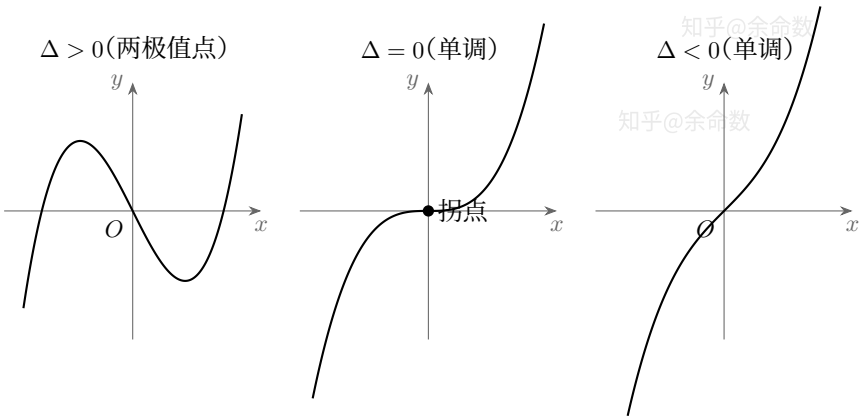


图 3.14 三次函数的三种基本形态 ($a > 0$)

3.10.2.2 对称性

二次函数的图像是轴对称的, 三次函数的图像是中心对称的.

> **定理 3.20** 任何三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ 的图像都是中心对称图形, 其对称中心是唯一的拐点 $(x_0, f(x_0))$.

证明 函数的拐点对应凹凸性的改变, 由二阶导数 $f''(x) = 0$ 确定.

$$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \implies x_0 = -\frac{b}{3a}$$

此即拐点的横坐标. 该点也是导函数 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 这条抛物线的对称轴.

为证明 $(x_0, f(x_0))$ 是对称中心, 我们验证 $f(x_0 + t) + f(x_0 - t) = 2f(x_0)$ 对任意实数 t 恒成立. 将三次函数在 x_0 处展开, 得

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{f''(x_0)}{2}t^2 + at^3.$$

因为 $f''(x_0) = 0$, 有

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + f'(x_0)t + at^3, \qquad f(x_0 - t) = f(x_0) - f'(x_0)t - at^3.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两式相加即得 $f(x_0+t)+f(x_0-t)=2f(x_0)$, 故图像关于 $(x_0,f(x_0))$ 中心对称. 由于三次函数只有一个二阶导数零点, 该拐点唯一. □

由这一对称性可得一个推论. 若三次函数存在两个极值点 x_1,x_2, 则它们关于对称中心的横坐标 x_0 对称, 即 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$. 同时, 两个极值 $f(x_1),f(x_2)$ 也关于对称中心的纵坐标 $f(x_0)$ 对称, 即 $f(x_0)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

3.10.2.3 三次方程实根个数的判定

三次方程 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ 实根的个数, 等于函数图像 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点个数. 我们由极值性质判定这个几何问题.

我们先考察导函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. 其判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$ 给出分类的枢纽.

先看函数不存在极值的情形. 当 $b^2-3ac\le 0$ 时, 导函数 $f'(x)$ 在实数域上至多有一个零点, 从而 $f'(x)$ 恒为非负或恒为非正. 故原函数 $f(x)$ 在整个定义域 $\mathbb{R}$ 上是单调的. 一个连续的单调函数, 其图像与任意水平直线(包括 x 轴)至多有一个交点. 又因 $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ 符号相反, 故必有一个交点. 因此, 在此情形下, 方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根.

当 $b^2-3ac>0$ 时, 函数 $f(x)$ 存在一个极大值与一个极小值, 不妨设它们分别出现在 x_1 与 x_2 处. 函数图像呈升-降-升或降-升-降的形态. 图像与 x 轴的交点个数, 完全取决于两个极值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 相对于 x 轴的位置. 我们考察两个极值的乘积 $f(x_1)\cdot f(x_2)$ 的符号.

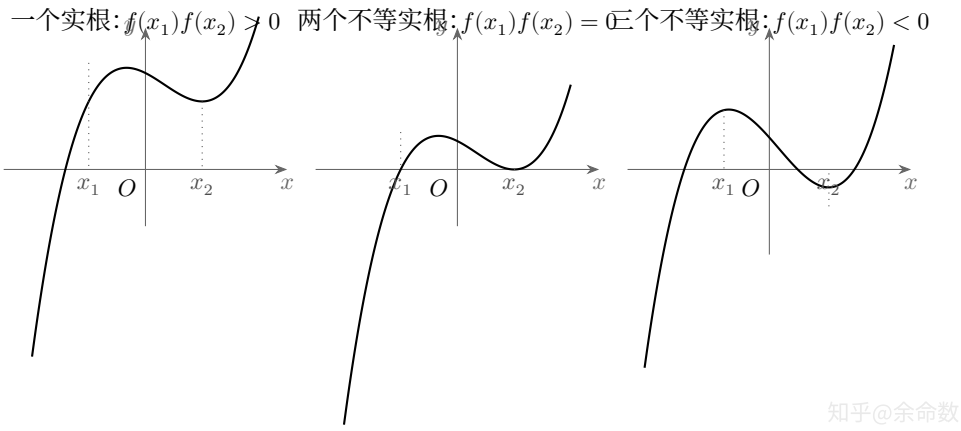
- 若 $f(x_1)\cdot f(x_2)>0$, 即两个极值点均在 x 轴的同一侧(同为正或同为负). 此时, 函数图像在达到一个极值后折返, 但在到达另一个极值前尚未触及 x 轴. 因此, 图像仅与 x 轴有一个交点, 方程仅有一个实根.
- 若 $f(x_1)\cdot f(x_2)=0$, 即其中一个极值点恰好落在 x 轴上. 此时, 函数图像在 x 轴上有一个切点(二重根)和一个穿根点. 因此, 方程有两个不相等的实根.
- 若 $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, 即极大值在 x 轴上方, 而极小值在 x 轴下方. 根据连续函数介值定理, 函数图像在两个极值点之间必然要穿越一次 x 轴. 加上两端趋于无穷的行为, 图像共与 x 轴有三个不同的交点. 因此, 方程有三个不相等的实根.

我们把三次方程实根个数的判定条件总结如下. 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$, 且 x_1,x_2 是其导函数 $f'(x)=0$ 的根.

- **一个实根**的充要条件是 $b^2-3ac\le 0$, 或 $b^2-3ac>0$ 且 $f(x_1)f(x_2)>0$.
- **两个不等实根**的充要条件是 $b^2-3ac>0$ 且 $f(x_1)f(x_2)=0$.
- **三个不等实根**的充要条件是 $b^2-3ac>0$ 且 $f(x_1)f(x_2)<0$.

例题 3.32　确定方程 $2x^3-9x^2+12x-4=0$ 的实根个数.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

图 3.15 三次函数存在极值时, 实根个数的几何情形

解 此问题等价于考察函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-4$ 的图像与 x 轴的交点个数, 策略是先由导数确定单调性与极值, 再依极值与零的位置关系判定根的数目.

求导得

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2)$$

令 $f'(x)=0$, 得临界点 $x_1=1$ 与 $x_2=2$, 故 $f(x)$ 有两个极值点. 两极值为

$$f(1)=2(1)^3-9(1)^2+12(1)-4=2-9+12-4=1$$
$$f(2)=2(2)^3-9(2)^2+12(2)-4=16-36+24-4=0$$

知乎@余命数 知乎@余命数

极小值 $f(2)$ 恰好为零, 即函数图像在点 $(2,0)$ 处与 x 轴相切.

极值之积为 $f(1)\cdot f(2)=1\cdot 0=0$. 依判定准则, 极值之积为零时, 函数图像与 x 轴有一个切点和一个穿根点.

因此, 原方程有两个不相等的实根, 其中一个是二重根.

例题 3.33 讨论关于 x 的方程 $x^3-3x=m$ 的实根个数随参数 m 的变化情况.

解 按参数 m 的取值对三次方程 $x^3-3x-m=0$ 的根的结构作完整分类. 令 $f(x)=x^3-3x-m$, 分析 $f(x)$ 的零点个数.

其导函数为 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 令 $f'(x)=0$ 得极值点 $x_1=-1$ 与 $x_2=1$, 极值点的存在与参数 m 无关. 两极值为

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)-m=-1+3-m=2-m$$
$$f(1)=(1)^3-3(1)-m=1-3-m=-2-m$$

知乎@余命数

实根个数取决于两极值乘积的符号：

$$f(-1)f(1)=(2-m)(-2-m)=(m-2)(m+2)$$

据此对 m 分类：

- **当有三个不等实根时**，须 $f(-1)f(1)<0$，即 $(m-2)(m+2)<0$. 解得 $-2<m<2$.
- **当有两个不等实根时**，须 $f(-1)f(1)=0$，即 $(m-2)(m+2)=0$. 解得 $m=2$ 或 $m=-2$.
- **当仅有一个实根时**，须 $f(-1)f(1)>0$，即 $(m-2)(m+2)>0$. 解得 $m>2$ 或 $m<-2$.

知乎@余命数

注 3.8 (分离参数法)
一个等价且几何直观更强的视角是分离参数. 原方程 $x^3-3x=m$ 的根的个数，等价于函数 $g(x)=x^3-3x$ 的图像与水平直线 $y=m$ 的交点个数. 通过分析 $g(x)$ 的极大值 $g(-1)=2$ 与极小值 $g(1)=-2$，可直观地得出相同的结论.

知乎@余命数

例题 3.34　已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-2a)x$. 若 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内恰有一个极值点，求实数 a 的取值范围.

知乎

解　函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内恰有一个极值点，等价于导函数

$$f'(x)=3x^2-2ax+(a^2-2a)$$

知乎@余命数

在 $(1,2)$ 内恰有一个零点，且该零点处导数符号发生改变. 由于 $f'(x)$ 是开口向上的二次函数，先用端点符号确定根的位置.

计算 $f'(1)$ 与 $f'(2)$，得

$$f'(1)=3-2a+a^2-2a=a^2-4a+3=(a-1)(a-3)$$

$$f'(2)=3(4)-2a(2)+a^2-2a=a^2-6a+12$$

对于 $f'(2)=a^2-6a+12=(a-3)^2+3$，其值恒为正.

因此，条件 $f'(1)\cdot f'(2)<0$ 就等价于 $f'(1)<0$.

$$(a-1)(a-3)<0$$

解得 $1<a<3$. 在此范围内，$f'(1)<0$ 而 $f'(2)>0$，故由连续性可知 $f'(x)$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个零点. 又因为开口向上的二次函数在 $x=1$ 处取负值，$x=2$ 处取正值，所以 $x=2$ 位于两个根的右侧之外，区间 $(1,2)$ 内恰含右侧一个根；该根为单根，导数符号由负变正，对应 $f(x)$ 的一个极小值点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

还需检验边界情况. 若 $f'(1)=0$, 则 $a=1$ 或 $a=3$. 当 $a=1$ 时, $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$. 根为 $x=-1/3$ 和 $x=1$. 区间 $(1,2)$ 内无根, 不符. 当 $a=3$ 时, $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$. 根为 $x=1$(二重根). 区间 $(1,2)$ 内无根, 不符.

若 $f'(2)=0$, 由于 $f'(2)=(a-3)^2+3$ 恒大于零, 此情况不会发生.

故 a 的取值范围是 $(1,3)$.

例题 3.35 设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+1$. 若 $a>2$, 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内的零点个数.

解 先判断 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上的单调性, 再结合端点处函数值的符号确定零点个数.

求导得

$$f'(x)=x^2-2ax=x(x-2a)$$

题设 $a>2$ 给出 $2a>4$. 对任意 $x\in(0,2)$, $x>0$ 且 $x-2a<2-4=-2<0$, 两因子异号, 故 $f'(x)=x(x-2a)<0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上严格单调递减.

再看区间端点: 左端点 $f(0)=1>0$; 右端点 $f(2)=\frac{1}{3}(2)^3-a(2)^2+1=\frac{8}{3}-4a+1=\frac{11}{3}-4a$. 由 $a>2$ 知 $4a>8$, 故 $f(2)=\frac{11}{3}-4a<\frac{11}{3}-8=-\frac{13}{3}<0$.

$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 上严格单调递减, 且两端点的值异号 ($f(0)>0, f(2)<0$). 由连续函数介值定理, $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在唯一零点.

故函数在区间 $(0,2)$ 上恰好有 1 个零点.

例题 3.36 设 a 为实数, 函数 $f(x)=-x^3+3x+a$.

1. 求 $f(x)$ 的极值.
2. 若函数 $y=f(x)$ 恰好有两个零点, 求 a 的值.

解 (1) 极值由导数的零点决定. 求导得

$$f'(x)=-3x^2+3$$

令 $f'(x)=0$, 即 $-3x^2+3=0$, 解得 $x=\pm1$.

依 $f'(x)$ 的符号, 当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ 时, $f'(x)<0$, 函数单调递减; 当 $x\in(-1,1)$ 时, $f'(x)>0$, 函数单调递增.

因此, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值 $f_{极小}=f(-1)=-(-1)^3+3(-1)+a=1-3+a=a-2$, 在 $x=1$ 处取得极大值 $f_{极大}=f(1)=-(1)^3+3(1)+a=-1+3+a=a+2$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(2) 函数 $y=f(x)$ 恰有两个零点, 即图像与 x 轴恰有两个交点. 对既有极大值又有极小值的三次函数, 这当且仅当其中一个极值点恰好落在 x 轴上, 即极大值或极小值之一为零. 故

$$f_{\text{极小}}=a-2=0 \quad \text{或} \quad f_{\text{极大}}=a+2=0$$

解得 $a=2$ 或 $a=-2$.

例题 3.37　已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+b$, 且其在 $x=-2$ 处取得极值.

1. 求函数 $f(x)$ 的单调区间.
2. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-3,3]$ 上有且仅有一个零点, 求实数 b 的取值范围.

解 (I) 极值点是导函数的零点. 求导得

$$f'(x)=x^2-2ax$$

题设 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极值, 故 $f'(-2)=0$, 即 $f'(-2)=(-2)^2-2a(-2)=4+4a=0$, 解得 $a=-1$.

由此 $f'(x)=x^2+2x=x(x+2)$. 令 $f'(x)>0$ 得 $x>0$ 或 $x<-2$; 令 $f'(x)<0$ 得 $-2<x<0$.

故 $f(x)$ 的严格单调递增区间是 $(-\infty,-2)$ 和 $(0,+\infty)$, 严格单调递减区间是 $(-2,0)$.

(II) 由 (I), 所研究函数为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+b$, 在 $(-\infty,-2)$ 上递增, 在 $(-2,0)$ 上递减, 在 $(0,\infty)$ 上递增. 取区间端点及内部极值点处的函数值:

$$f(-3)=\frac{1}{3}(-3)^3+(-3)^2+b=-9+9+b=b$$

$$f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3+(-2)^2+b=-\frac{8}{3}+4+b=b+\frac{4}{3} \quad \text{(区间内的极大值)}$$

$$f(0)=b \quad \text{(区间内的极小值)}$$

$$f(3)=\frac{1}{3}(3)^3+(3)^2+b=9+9+b=b+18$$

函数图像在 $[-3,3]$ 上的形态固定, 仅随 b 竖直平移. 为使函数在此区间上有且仅有一个零点, 图像的最高点与最低点须几乎完全位于 x 轴的一侧. 分两种情形:

情形一: 极大值低于 x 轴, 即 $f(-2)<0$, 亦即 $b<-4/3$. 此时 $f(-3)=b$, $f(-2)$ 与 $f(0)=b$ 均为负. 存在唯一零点须且只需区间右端点的值非负, 即 $f(3)\geq 0$, 亦即 $b\geq -18$. 合并得 $-18\leq b<-4/3$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

情形二：极小值高于 x 轴，即 $f(0)>0$，亦即 $b>0$. 此时 $f(0), f(-2), f(3)$ 均为正. 存在唯一零点须且只需 $f(-3)\le 0$，即 $b\le 0$. 此与 $b>0$ 矛盾，故此情形不可能发生.

再检验边界. 若 $f(-2)=0$ ($b=-4/3$)，则函数在 $x=-2$ 处有二重根，且 $f(3)=-4/3+18>0$，$f(0)=-4/3<0$，故 $(0,3)$ 内还有一根，不符. 若 $f(0)=0$ ($b=0$)，则 $f(x)=x^2(\frac{1}{3}x+1)$，零点为 $x=0$ 与 $x=-3$，在 $[-3,3]$ 内有两个零点，不符.

故实数 b 的取值范围是 $[-18,-4/3)$.

3.10.2.4 根与系数的关系

知乎@余命数

定理 3.21 (三次方程根与系数的关系) 设 $a\neq 0$，方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个根（按重数计算，可能为复数根）为 x_1, x_2, x_3，则：

$$x_1+x_2+x_3=-b/a \tag{3-16}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c/a \tag{3-17}$$

$$x_1x_2x_3=-d/a \tag{3-18}$$

证明 由代数基本定理和因式定理，多项式 ax^3+bx^2+cx+d 可唯一地分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. 展开右侧的表达式，并与左侧的同次项系数比较，即可导出上述三个关系式. □

知乎@余命数

三次函数切线与极值几何

知乎@余命数

3.10.2.5 切线问题

过平面上任意一点，可以作三次函数图像若干条切线，条数随点的位置而变. 设切点为 $(t, f(t))$，则切线方程为 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$. 若该切线经过点 $P(x_0,y_0)$，则

$$y_0-f(t)=f'(t)(x_0-t)$$

知乎@余命数

将 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 的表达式代入，这是一个关于切点横坐标 t 的三次方程. 此方程实根的个数即为过点 P 可作的切线条数. 对此三次方程根的个数分析，可以得到一个几何结论.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.22 (切线条数判定) 三次函数 $y=f(x)$ 的图像及其在拐点处的切线(称之为拐点切线),将整个平面划分为四个区域.

- 若点 $P(x_0,y_0)$ 位于由函数图像与拐点切线所夹的两个开区域内,则过该点可作 **3 条**不同的切线.
- 若点 P 位于函数图像上或拐点切线上(但非拐点本身),则可作 **2 条**切线.
- 若点 P 位于其余两个开区域内,或 P 恰为拐点,则仅可作 **1 条**切线.

证明 经过平移坐标、减去拐点切线对应的一次函数并作非零比例伸缩,可将一般三次函数可逆地化为标准三次曲线 $y=x^3$. 这种可逆仿射变换把直线映为直线、保持相切关系,也保持点相对函数图像和拐点切线所夹区域的位置关系. 因此只需证明 $y=x^3$ 的情形,其拐点为原点,拐点切线为 $y=0$.

设切点为 (t,t^3). 该点处切线为

$$y-t^3=3t^2(x-t),$$

若切线经过 $P(u,v)$,则

$$v=3ut^2-2t^3,\qquad \text{即}\qquad 2t^3-3ut^2+v=0. \tag{1}$$

过 P 的不同切线条数等于方程 (1) 的不同实根个数,但重根对应重合切线需只计一次.

令 $\Phi(t)=3ut^2-2t^3$. 当 $u>0$ 时,$\Phi'(t)=6t(u-t)$,极小值为 $\Phi(0)=0$,极大值为 $\Phi(u)=u^3$. 故方程 $v=\Phi(t)$ 在 $0<v<u^3$ 时有三个不同实根;在 $v=0$ 或 $v=u^3$ 且 P 不是原点时有两个不同实根;在其他情形只有一个不同实根. 当 $u<0$ 时同理,函数图像与 x 轴之间的开区域对应三个不同实根,边界对应两个,其余对应一个. 当 $u=0$ 时,方程为 $2t^3+v=0$,只有一个不同实根.

对 $y=x^3$ 而言,函数图像和拐点切线 $y=0$ 所夹的两个开区域正是上述三实根情形;图像或拐点切线上非拐点的点对应两个不同实根;其余开区域和拐点对应一个不同实根. 由坐标变换可逆,一般三次函数情形随之成立. □

例题 3.38 已知函数 $f(x)=-x^3+2x^2-x$,若过点 $P(1,t)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线,求实数 t 的取值范围.

解 由切线条数判定定理,可作三条切线等价于点 $P(1,t)$ 严格位于函数图像 $y=f(x)$ 与其拐点切线之间,故 t 须介于横坐标 $x=1$ 处函数图像的纵坐标与拐点切线的纵坐标之间.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

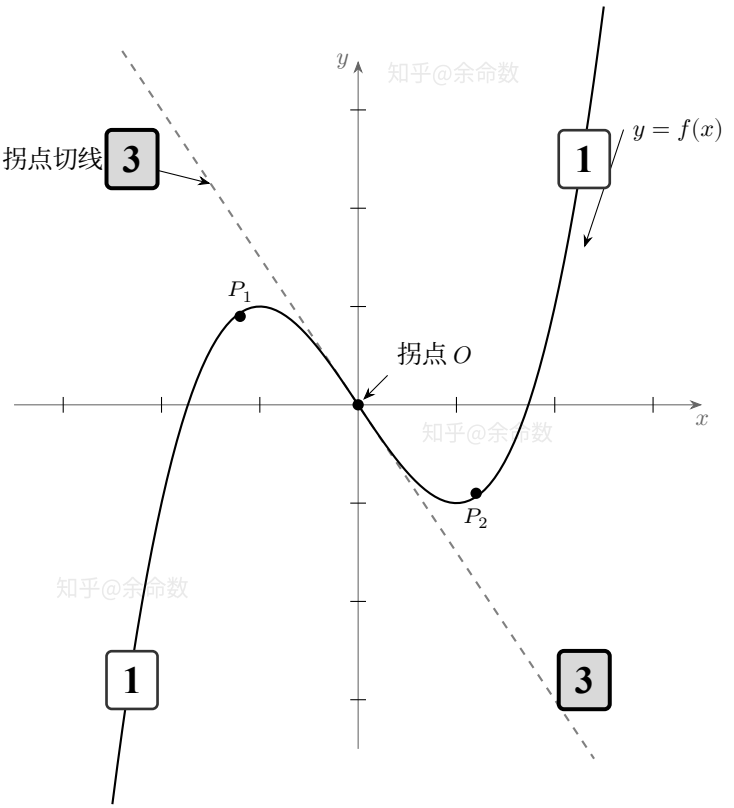


图 3.16 过平面一点作三次函数切线条数的区域划分 ($a > 0$)

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

函数在 $x=1$ 处的值为

$$f(1)=-(1)^3+2(1)^2-1=-1+2-1=0$$

再求拐点切线的方程. 由 $f'(x)=-3x^2+4x-1$ 得 $f''(x)=-6x+4$. 令 $f''(x)=0$, 解得拐点横坐标 $x_0=2/3$, 函数值 $f(2/3)=-(2/3)^3+2(2/3)^2-2/3=-8/27+8/9-2/3=-2/27$, 切线斜率 $k_0=f'(2/3)=-3(2/3)^2+4(2/3)-1=-4/3+8/3-1=1/3$.

由此拐点切线方程为 $y-(-2/27)=(1/3)(x-2/3)$, 化简得 $y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{27}$. 在 $x=1$ 处, 切线上的纵坐标为

$$y_{\text{切线}}=\frac{1}{3}(1)-\frac{8}{27}=\frac{9-8}{27}=\frac{1}{27}$$

$P(1,t)$ 的纵坐标 t 须严格介于 $f(1)=0$ 与 $1/27$ 之间.

故实数 t 的取值范围是 $(0,1/27)$.

3.10.2.6 对称性

函数的对称性与其导函数的对称性之间存在着一种对偶关系.

定理 3.23 设可导函数 $y=f(x)$.

1. 若 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 轴对称, 则其导函数 $y=f'(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 中心对称.
2. 若 $f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 中心对称, 则其导函数 $y=f'(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 轴对称.

证明 先证第一条. 函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=a$ 轴对称的代数表达式为 $f(a-t)=f(a+t)$. 对此恒等式两边关于 t 求导, 应用链式法则:

$$-f'(a-t)=f'(a+t),$$

即 $f'(a+t)+f'(a-t)=0$. 这正是导函数图像关于点 $(a,0)$ 中心对称的定义.

再证第二条. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 (a,b) 对称, 等价于 $f(a+t)+f(a-t)=2b$. 这是关于变量 t 的恒等式. 我们把它两边关于 t 求导. 由链式法则得

$$\frac{d}{dt}[f(a+t)]+\frac{d}{dt}[f(a-t)]=\frac{d}{dt}[2b]$$

$$f'(a+t)\cdot(a+t)'_t+f'(a-t)\cdot(a-t)'_t=0$$

$$f'(a+t)\cdot 1+f'(a-t)\cdot(-1)=0$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由此得 $f'(a+t)=f'(a-t)$. 这正是导函数 $f'(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 轴对称的定义. □

我们回来看三次函数的对称性. 已经证明, 任何三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 都关于其唯一的拐点 $(x_0,f(x_0))$ 中心对称, 其中 $x_0=-b/(3a)$. 由上述定理, 其导函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 的图像关于直线 $x=x_0=-b/(3a)$ 轴对称. 这与二次函数的对称轴公式一致.

知乎@余命数

3.10.2.7 极值点连线的几何性质

当三次函数存在两个极值点时, 我们研究连接这两个点的割线斜率与拐点处切线斜率的关系.

知乎@余命数

定理 3.24 若三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ 存在两个极值点 $(x_1,f(x_1))$ 与 $(x_2,f(x_2))$, 则连接这两点的割线斜率为

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{a}{2}(x_1-x_2)^2$$

并且该斜率与拐点处的切线斜率 $f'(x_0)$ 成正比,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{2}{3}f'(x_0).$$

其中 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$ 是函数拐点的横坐标.

知乎@余命数

证明 我们证明割线斜率与拐点处切线斜率之间的关系.

极值点 x_1,x_2 是导函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$ 的两根, 由韦达定理 $x_1+x_2=-2b/(3a)$, $x_1x_2=c/(3a)$.

割线斜率为

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}&=\frac{(ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d)-(ax_2^3+bx_2^2+cx_2+d)}{x_1-x_2}\\&=a(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+b(x_1+x_2)+c\end{aligned}$$

将 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{4b^2}{9a^2}-\frac{2c}{3a}$ 代入, 得

$$\begin{aligned}\text{斜率}&=a\left(\left(\frac{4b^2}{9a^2}-\frac{2c}{3a}\right)+\frac{c}{3a}\right)+b\left(-\frac{2b}{3a}\right)+c\\&=a\left(\frac{4b^2}{9a^2}-\frac{c}{3a}\right)-\frac{2b^2}{3a}+c\\&=\frac{4b^2}{9a}-\frac{c}{3}-\frac{6b^2}{9a}+c=-\frac{2b^2}{9a}+\frac{2c}{3}=\frac{-2b^2+6ac}{9a}=-\frac{2(b^2-3ac)}{9a}\end{aligned}$$

知乎@余命数

同时，

$$\begin{aligned}-\frac{a}{2}(x_1-x_2)^2 &= -\frac{a}{2}((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)\\ &= -\frac{a}{2}\left(\left(-\frac{2b}{3a}\right)^2-4\frac{c}{3a}\right)\\ &= -\frac{a}{2}\left(\frac{4b^2-12ac}{9a^2}\right)=-\frac{2(b^2-3ac)}{9a}.\end{aligned}$$

故第一个等式成立.

拐点横坐标 $x_0=-b/(3a)$，此处的导数值为

$$\begin{aligned}f'(x_0) &= 3a(x_0)^2+2bx_0+c=3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+2b\left(-\frac{b}{3a}\right)+c\\ &= \frac{b^2}{3a}-\frac{2b^2}{3a}+c=-\frac{b^2}{3a}+c=\frac{-b^2+3ac}{3a}=-\frac{b^2-3ac}{3a}\end{aligned}$$

比较上述斜率与 $f'(x_0)$，得

$$\text{斜率}=-\frac{2(b^2-3ac)}{9a}=\frac{2}{3}\left(-\frac{b^2-3ac}{3a}\right)=\frac{2}{3}f'(x_0).$$

证毕. □

此定理给出如下几何事实. 连接三次函数两个极值点的直线的斜率，恰好是其拐点处切线斜率的 2/3. 拐点处的切线斜率是导函数 $f'(x)$ 的极值，对应原函数变化率最快或最慢的瞬间. 因此，这一关系把函数的宏观起伏，即由极值点决定的起伏，与其局部变化最剧烈处(拐点)联系起来.

3.11 指数函数

注 3.9
自然底 e 的极限定义与 $(e^x)'=e^x$ 见 第四卷第 16 章. 本节把 e 当作连续复利极限给出的常数(约 2.718)，并给出指数运算法则与图像.

在自然界与社会经济现象中，许多系统的增长或衰减过程具有一个共同特征. 其变化率与系统当前的总量成正比. 例如，在理想条件下，一个细胞群落的增殖速率与其现有的细胞数量成正比；放射性元素的衰变速率与其剩余的原子核数量成正比；一笔按复利计息的存款，其利息的增长速率与当前的本利和成正比.

为了精确地刻画这种增长模式，我们把幂运算推广到任意实指数，并由此定义指数函数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.11.1 指数的扩张与指数函数的定义

我们已熟悉整数指数幂的运算, 例如 $a^3 = a \cdot a \cdot a$ 以及 $a^{-2} = 1/a^2$. 现在我们将指数的概念从整数域 $\mathbb{Z}$ 拓展到整个实数域 $\mathbb{R}$, 并确保每一步拓展都与原有运算律相容.

首先, 我们定义有理数指数幂. 对于任意正实数 a 和有理数 p/q ($p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$), 我们定义

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

这一定义保持幂运算律 $(a^x)^y = a^{xy}$.

无理数指数幂的意义需要单独说明. 例如 2^π 不能理解为有限次乘法或开方. 其定义依赖实数系的**完备性**. 取一列有理数 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ 逼近 π, 如 $3, 3.1, 3.14, \ldots$, 数列 $2^{r_1}, 2^{r_2}, 2^{r_3}, \ldots$ 会逼近一个确定的实数. 实数系的完备性保证该极限存在且唯一, 此极限值即定义为 2^π.

通过这种方式, 可将 a^x 的定义域从有理数集 $\mathbb{Q}$ 拓展至整个实数集 $\mathbb{R}$.

定义 3.12 (指数函数) 函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 称为**指数函数**, 其中 x 是自变量. 其定义域为全体实数 $\mathbb{R}$.

底数 a 必须为正数, 否则函数在整个实数域上无定义, 例如, $(-2)^{1/2}$ 在实数域内无意义. 若 $a = 1$, 则 $y = 1^x = 1$ 是常数函数, 其性质退化, 通常不单独作为指数函数研究.

例题 3.39 (指数函数的定义辨析) 若函数 $y = (a^2 - 5a + 7)a^x$ 是指数函数, 求参数 a 的值.

解 要确定参数 a 的值, 我们回归指数函数的定义. 指数函数的标准形式为 $y = b^x$, 它满足两个约束.

1. 函数的系数必须为 1.
2. 底数 b 必须为正数且不等于 1.

将这些约束应用于 $y = (a^2 - 5a + 7)a^x$, 系数部分须为 1.

$$a^2 - 5a + 7 = 1$$

整理得

$$a^2 - 5a + 6 = 0$$

因式分解为 $(a - 2)(a - 3) = 0$, 解得 $a = 2$ 或 $a = 3$.

再检验这两个候选值是否满足 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 当 $a=2$ 时, $2>0$ 且 $2\neq 1$, 条件满足.
- 当 $a=3$ 时, $3>0$ 且 $3\neq 1$, 条件同样满足.

两个候选值均通过检验. 因此, 参数 a 的值为 2 或 3.

例题 3.40 (由点确定指数函数) 已知指数函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $(2,4)$, 求 $f(3)$ 的值.

解 由题设, $f(x)$ 是指数函数, 故可设 $f(x)=a^x$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

函数图像经过点 $(2,4)$, 即 $f(2)=4$. 于是

$$a^2=4$$

解得 $a=2$ 或 $a=-2$.

由指数函数定义, $a>0$, 故舍去 $a=-2$. 因此, 底数 a 被唯一确定为 2, 函数表达式为 $f(x)=2^x$.

于是

$$f(3)=2^3=8.$$

故 $f(3)$ 的值为 8.

3.11.2 指数函数的图像与性质

指数函数的性质由其底数 a 的取值范围决定. 我们分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情形来讨论.

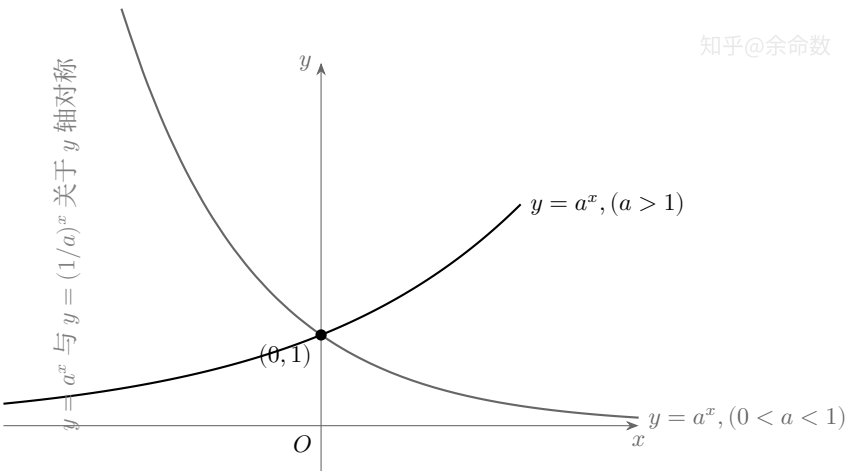


图 3.17　指数函数的图像

指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ 的主要性质如下.

1. **定义域与值域**: 其定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $(0,+\infty)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. **特定点**：无论底数 a 为何值，函数图像恒过定点 $(0,1)$，因为 $a^0=1$.
3. **单调性**：
   - 当 $a>1$ 时，指数函数在 $\mathbb{R}$ 上是**严格单调递增**的.
   - 当 $0<a<1$ 时，指数函数在 $\mathbb{R}$ 上是**严格单调递减**的.
4. **渐近线**：x 轴是指数函数图像的水平渐近线.

我们以 $a>1$ 的情形为例，利用定义法严格证明其单调性.

证明 不妨设 $a>1$. 在定义域 $\mathbb{R}$ 中任取 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$. 考察其函数值的比值

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}.$$

由于 $x_1<x_2$，故 $x_2-x_1>0$. 当底数 $a>1$ 且指数为正数时，幂的值必然大于 1. 即 $a^{x_2-x_1}>1$. 因此，$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}>1$. 又因为指数函数的值域为 $(0,+\infty)$，$f(x_1)$ 恒为正，故可得 $f(x_2)>f(x_1)$. 根据定义，函数 $f(x)=a^x$ 在 $a>1$ 时是严格单调递增的.$0<a<1$ 的情形可类似证明. □

例题 3.41 求解不等式 $4^{x^2+x}<(\frac{1}{2})^{x-5}$.

解 两端底数不同，不能直接比较指数. 我们先把它们化为同底数，再利用指数函数的单调性得到指数部分的不等式.

底数 4 和 $\frac{1}{2}$ 都是 2 的幂，因此统一为底数 2.

$$4=2^2,\quad \frac{1}{2}=2^{-1}$$

代入原不等式，得

$$(2^2)^{x^2+x}<(2^{-1})^{x-5}.$$

由幂的运算法则，上式等价于

$$2^{2(x^2+x)}<2^{-(x-5)}.$$

不等式两端是同一个指数函数 $f(t)=2^t$ 在两个不同点 $t_1=2(x^2+x)$ 和 $t_2=-(x-5)$ 的取值.

由于底数 $2>1$，指数函数 $f(t)=2^t$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增. 因此，$f(t_1)<f(t_2)$ 等价于 $t_1<t_2$，即

$$2(x^2+x)<-(x-5).$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

整理得

$$2x^2+3x-5<0.$$

因式分解得 $(2x+5)(x-1)<0$.

故此不等式的解集为 $(-\frac{5}{2},1)$.

例题 3.42 求解方程 $4^x+6^x=2\cdot 9^x$.

解 方程 $4^x+6^x=2\cdot 9^x$ 含有三个不同底数. 这些底数之间存在代数联系, 它们都可由 2 和 3 的幂次组合而成, $4=2^2, 6=2\cdot 3, 9=3^2$. 因此我们用除法简化方程, 减少底数的种类.

方程两边同除以 9^x(它恒为正, 不改变解集), 得

$$\frac{4^x}{9^x}+\frac{6^x}{9^x}=2.$$

由指数运算法则 $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$, 上式化为

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x+\left(\frac{6}{9}\right)^x=2$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0.$$

令 $t=(\frac{2}{3})^x$. 由于指数函数的值域为正, 有 $t>0$. 上述方程化为

$$t^2+t-2=0$$

因式分解得 $(t+2)(t-1)=0$. 解得 $t=-2$ 或 $t=1$.

结合 $t>0$ 的约束, 我们舍去 $t=-2$. 因此, 唯一有效的解是 $t=1$.

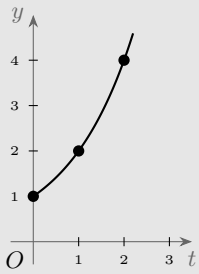
代回 $t=(\frac{2}{3})^x$, 得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1.$$

由任何非零实数的零次幂等于 1, 得 $x=0$. 因此, 原方程的解为 $x=0$.

例题 3.43 (指数增长模型的性质辨析) 某池塘中浮萍的面积 y(单位: m^2)与时间 t 的关系为指数函数模型 $y=f(t)=ka^t$ $(k>0, a>0, a\neq 1)$, 其中 t 以月为单位, 其图像如图所示. 试判断下列说法的正误.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



A. 浮萍每月增加的面积都相等.

B. 第 6 个月时, 浮萍的面积会超过 $30\,\mathrm{m}^2$.

C. 浮萍面积从 $2\,\mathrm{m}^2$ 蔓延到 $64\,\mathrm{m}^2$ 只需经过 5 个月.

D. 若浮萍面积蔓延到 $4\,\mathrm{m}^2, 6\,\mathrm{m}^2, 9\,\mathrm{m}^2$ 所经过的时间分别为 t_1, t_2, t_3, 则 $t_1 + t_3 = 2t_2$.

知乎@余命数

解 我们先从图像中读取参数. 图像经过点 $(0,1)$, 代入 $y = ka^t$ 得

$$1 = k \cdot a^0 \implies k = 1.$$

因此 $y = a^t$. 图像还经过点 $(1,2)$, 代入得 $2 = a$, 即 $a = 2$. 验证点 $(2,4)$.$f(2) = 2^2 = 4$, 与图像吻合. 因此, 浮萍面积的增长模型为 $y = f(t) = 2^t$.

我们逐一分析各个命题.

对于命题 A, 每月增加的面积为 $f(t+1) - f(t)$.

$$f(t+1) - f(t) = 2^{t+1} - 2^t = 2^t.$$

此增量为 2^t, 随 t 变化. 故 A 项错误.

对于命题 B, 第 6 个月末的面积为

$$f(6) = 2^6 = 64\,(\mathrm{m}^2).$$

知乎@余命数

由于 $64 > 30$, 故 B 项正确.

对于命题 C, 由 $2^t = 2$ 得 $t = 1$, 由 $2^t = 64 = 2^6$ 得 $t = 6$. 所需时间为 $\Delta t = 6 - 1 = 5$ 个月. 故 C 项正确.

对于命题 D, 我们检验 $t_1 + t_3 = 2t_2$ 是否成立. 由题意,

$$4 = 2^{t_1}, \quad 6 = 2^{t_2}, \quad 9 = 2^{t_3},$$

等式左侧为

$$t_1 + t_3 = \log_2 4 + \log_2 9 = \log_2(4 \cdot 9) = \log_2 36,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

等式右侧为

$$2t_2 = 2\log_2 6 = \log_2(6^2) = \log_2 36.$$

二者相等, 故 D 项正确.

正确的说法为 B、C、D.

注 3.10 (等比与等差的对偶性)
选项 D 说明了一个性质. 若指数函数的因变量构成等比数列(本例中 $4, 6, 9$ 的公比为 $3/2$), 则其对应的自变量构成等差数列. 这是对数运算将乘法关系转化为加法关系的直接体现.

例题 3.44 (指数衰减模型的建立与求解) 某地区计划对总面积为 A 的老旧房屋进行平改坡工程. 经测算, 若改造模式为每年改造的面积是**当年剩余未改造面积**的一个固定百分比 p, 要在 10 年内完成工程总量的一半, 试估算这个百分比 p 的值.(参考数据: $(1/2)^{1/10} \approx 0.933$)

知乎@余命数

解 我们建立指数衰减模型描述剩余量. 设工程总面积为 A, t 年后剩余未改造的面积为 $R(t)$. 初始状态为 $R(0) = A$.

根据题意, 每年改造的面积是当年剩余面积的百分比 p. 因此第 $t+1$ 年末的剩余面积为

$$R(t+1) = R(t) - p \cdot R(t) = (1-p)R(t).$$

这是公比为 $r = 1-p$ 的递推关系, 其通项公式为 $R(t) = R(0) \cdot r^t = A(1-p)^t$.

知乎@余命数

由题意, 10 年后完成工程总量的一半, 即 $t = 10$ 时 $R(10) = A/2$. 代入模型, 得

$$A(1-p)^{10} = \frac{A}{2}.$$

消去 A, 得 $(1-p)^{10} = \frac{1}{2}$.

由此解得公比 $r = 1-p$ 为

$$1 - p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

知乎@余命数

利用题目给出的参考数据 $(1/2)^{1/10} \approx 0.933$, 得 $1-p \approx 0.933$.

因此, 所求百分比 $p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/10} \approx 1 - 0.933 = 0.067$.

故每年约需改造当年剩余面积的 6.7%.

注 3.11 (指数模型与线性模型的对比)
这种按剩余量百分比进行改造的模式, 理论上永远无法完成 100% 的工程, 因为剩余量总是在不断减小但永不为零. 这与每年改造固定面积, 例如, 总面积的 5% 的线性模型不同. 在线性模型中, 工程将在 20 年后完成.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

自然底 e 与 $(e^x)' = e^x$

3.11.3 自然底数 e 的引入

指数函数 $y = a^x$ 的底数 a 可以是任何不为 1 的正实数. 不同的底数决定函数增长或衰减的剧烈程度. 在所有可能的底数中, 确实存在一个最自然的底数, 它对应的指数函数具有独特的简洁性.

我们先看连续复利这个金融问题.

设想将一笔本金存入银行, 年利率为 r. 若每年计息一次, 一年后本利和为 $P_1 = P_0(1 + r)$. 若每半年计息一次, 则每次计息的利率为 $r/2$, 一年内计息两次. 一年后本利和为 $P_2 = P_0(1 + \frac{r}{2})^2$. 若每月计息一次, 则一年后本利和为 $P_{12} = P_0(1 + \frac{r}{12})^{12}$.

知乎@余命数

一般地, 若一年内计息 n 次, 则每次的利率为 r/n, 一年后本利和为

$$P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

计息周期无限缩短, 即计息频率 n 趋于无穷大时, 本利和会收敛到一个确定的极限值.

为了分析其结构, 我们设本金为 1 单位, 年利率为 100%, 即 $r = 1$, 以剥离无关参数. 此时, 一年后的本利和表达式为

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

知乎@余命数

我们的问题转化为研究当 $n \to \infty$ 时, 此表达式的极限行为. 计算可知, 随着 n 的增大, 这个值确实在增长, 但增长的步伐越来越慢, 并稳定地趋向于一个特定的数值.

- $n = 1$∶$(1 + 1/1)^1 = 2$
- $n = 10$∶$(1 + 1/10)^{10} \approx 2.5937$
- $n = 100$∶$(1 + 1/100)^{100} \approx 2.7048$
- $n = 1000$∶$(1 + 1/1000)^{1000} \approx 2.7169$

这个极限存在且唯一. 其严格证明需要分析工具, 见 第四卷第 16 章. 这个极限值是一个无理数, 用字母 e 表示.

定义 3.13 (自然底数 e) 自然底数 e 定义为如下极限.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\ldots$$

实际上, 对于任意年利率 r, 连续复利下的本利和极限为 $P_0 e^r$. 因此, e 是单位利率下单位本金连续增长的极限倍率.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

连续复利模型给出了 e 的一种来源. 它的另一来源在于分析性质. 我们回到最初提出的问题, 在所有的指数函数 $y=a^x$ 中找出导数与其函数值本身关系最为简洁的那一个. 在微积分中, 自然就是简洁.

可以证明, 指数函数 $f(x)=a^x$ 的导数与其自身成正比, 即 $(a^x)'=(\ln a)\cdot a^x$, 其中比例常数 $\ln a$ 完全由底数 a 决定. 我们要找一个底数 a, 使这个比例常数恰好为 1, 函数的变化率在每一点都精确地等于其函数值.

这个特殊的底数正是自然底数 e.

定理 3.25 (自然指数函数的基本性质) 在全体可导函数中, 以 e 为底的指数函数 $f(x)=e^x$, 称为**自然指数函数**是唯一满足 $f(0)=1$ 且 $f'(x)=f(x)$ 的函数. 它满足

$$(e^x)'=e^x.$$

证明 先证存在性. 由自然底数 e 的定义以及指数函数的导数公式可得 $(e^x)'=e^x$, 且 $e^0=1$, 因而 e^x 满足题设条件.

再证唯一性. 设可导函数 $g(x)$ 满足 $g'(x)=g(x)$ 且 $g(0)=1$. 构造

$$h(x)=g(x)e^{-x}.$$

由乘积求导法则,

$$h'(x)=g'(x)e^{-x}-g(x)e^{-x}=(g'(x)-g(x))e^{-x}=0.$$

因此 $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为常数. 又 $h(0)=g(0)e^0=1$, 故 $h(x)\equiv 1$, 即 $g(x)=e^x$. 于是满足条件的可导函数唯一. □

这个性质使得 e^x 适合描述增长率正比于存量的过程. 因此, e 是最自然的底数.

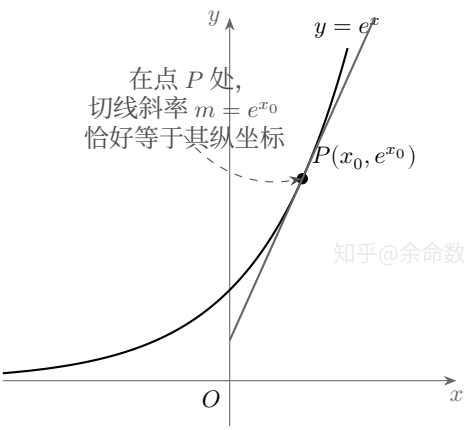


图 3.18　自然指数函数的几何意义. 图像上任意一点的切线斜率等于该点的函数值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.12 幂函数

我们已经研究了变量位于指数位置的函数 $y = a^x$, 即指数函数. 现在, 我们把注意力转向另一类基本函数, 其中变量位于底数位置.

知乎@余命数

3.12.1 定义与辨析

定义 3.14 (幂函数) 形如 $y = x^\alpha$ 的函数称为**幂函数**, 其中 x 是自变量, $\alpha \in \mathbb{R}$ 是一个常数, 称为指数.

我们先用一个例子区分幂函数与指数函数. 两族函数的表达式都出现幂运算, 但变量所处的位置不同. 幂函数 $y = x^\alpha$ 以 x 为底数、α 为常数, 指数函数 $y = a^x$ 则以 x 为指数、a 为常数. 这种差异使它们的定义域、图像形态和单调性都不一样.

- **幂函数** $y = x^\alpha$: 自变量 x 是**底数**, 指数 α 是**常数**.
- **指数函数** $y = a^x$: 自变量 x 是**指数**, 底数 a 是**常数**.

例如, $y = x^2$ 与 $y = 2^x$ 在 $x > 0$ 时都是增函数, 但增长速度完全不同. 当 x 足够大时, 2^x 会远远超过 x^2, 如 图 3.19 所示.

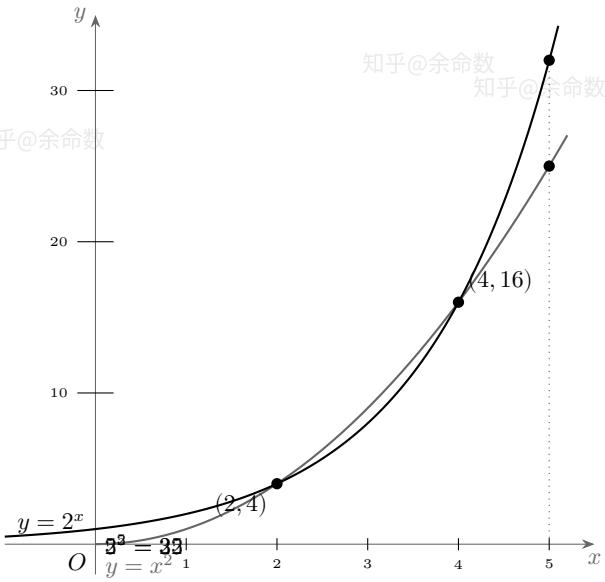


图 3.19 幂函数与指数函数的增长比较. 在 $x > 4$ 后, 指数函数的增长速度远超幂函数.

3.12.2 图像与性质分析

幂函数 $y = x^\alpha$ 的性质由指数 α 决定. 我们取几个典型值, 归纳其图像与性质的异同.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

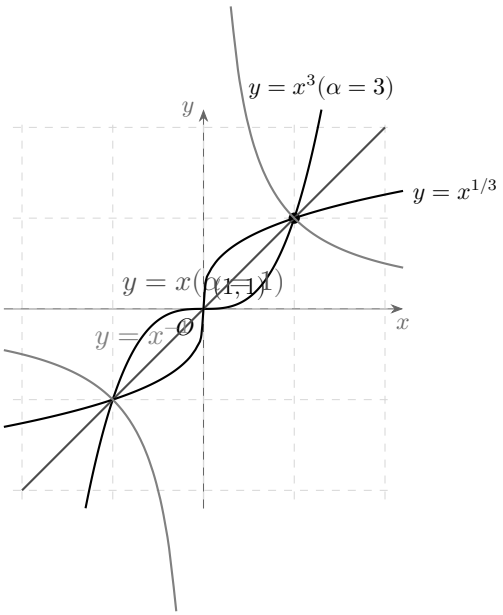


图 3.20　不同指数 α 下幂函数的图像

从图像与代数两方面看, 我们得到幂函数 $y = x^\alpha$ 的一般性质.

1. **定义域**. 定义域依赖于 α. 若 α 为正整数, 定义域为 $\mathbb{R}$. 若 α 为负整数, 定义域为 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. 若 α 为分数, 则需根据分母的奇偶性确定. 例如 $y = x^{1/2}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.
2. **奇偶性**. 奇偶性同样取决于 α. 若 $f(x) = x^\alpha$ 的定义域关于原点对称, 则当 α 是整数时, 其奇偶性与 α 的奇偶性一致. 若 $\alpha = p/q$(最简分数), 则当 q 为奇数时, 其奇偶性与分子 p 的奇偶性一致.
3. **公共点**. 无论 α 为何值 (除 $\alpha = 0$ 外), 幂函数的图像恒过定点 $(1, 1)$, 因为 $1^\alpha = 1$.
4. **单调性**(在第一象限, 即 $x > 0$ 时):
   - 当 $\alpha > 0$ 时, 函数在 $(0, +\infty)$ 上**严格单调递增**.
   - 当 $\alpha < 0$ 时, 函数在 $(0, +\infty)$ 上**严格单调递减**.
5. **凹凸性**(在第一象限, 即 $x > 0$ 时):
   - 当 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 0$ 时, 图像是**下凸**的(向上弯曲).
   - 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 图像是**上凸**的(向下弯曲).

这些性质用于比较大小与求解不等式.

例题 3.45　比较 $0.7^{0.8}, 0.8^{0.7}, 0.8^{0.8}$ 的大小.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 三个数底数、指数都不同, 无法直接比较. 我们用中间量把它们拆成可以直接用单调性处理的比较.

先把 $0.8^{0.7}$ 与 $0.8^{0.8}$ 比较. 这可以视为指数函数 $f(x)=0.8^x$ 在两个不同点上的取值. 由于底数 $a=0.8\in(0,1)$, 此指数函数在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递减. 因为 $0.7<0.8$, 由单调递减的定义得 $f(0.7)>f(0.8)$, 即 $0.8^{0.7}>0.8^{0.8}$.

再把 $0.7^{0.8}$ 与 $0.8^{0.8}$ 比较. 这可以视为幂函数 $g(x)=x^{0.8}$ 在两个不同点上的取值. 由于指数 $\alpha=0.8>0$, 此幂函数在定义域 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增. 因为 $0.7<0.8$, 由单调递增的定义得 $g(0.7)<g(0.8)$, 即 $0.7^{0.8}<0.8^{0.8}$.

故三个数的大小关系为

$$0.7^{0.8}<0.8^{0.8}<0.8^{0.7}.$$

例题 3.46 已知函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m-2}$ 是一个幂函数, 且在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数, 求实数 m 的值.

解 我们先从幂函数的定义提取对 m 的约束, 再用单调性筛选候选值.

根据幂函数的定义, 函数的标准形式为 $y=x^{\alpha}$, 因此自变量 x 前的系数必须为 1. 于是系数必须满足

$$m^2-m-1=1$$

整理得 $m^2-m-2=0$ 因式分解为 $(m-2)(m+1)=0$, 解得 $m=2$ 或 $m=-1$.

再用单调性筛选这两个候选值. 题设函数在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数. 根据幂函数的性质, 当 $x>0$ 时, $y=x^{\alpha}$ 单调递减的充要条件是其指数 $\alpha<0$. 在本题中, 指数为 $m-2$, 故

$$m-2<0 \implies m<2$$

将两个条件得到的解集求交集. 第一个条件给出 $m\in\{2,-1\}$; 第二个条件要求 $m<2$. 唯一同时满足这两个条件的 m 值是 $m=-1$.

故实数 m 的值为 -1.

3.13 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 把自变量 x, 也就是指数, 映为函数值 y, 也就是幂. 这一对应可以逆转, 已知 y 与底数 a 就能唯一确定指数 x.

例如, $2^x=8$ 的解是 $x=3$. 但 $2^x=5$ 的解不是整数. 从 $y=2^x$ 严格单调递增的图像看, 存在唯一实数 x 使 $2^x=5$. 为表示这个数, 我们引入对数.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

3.13.1 对数的定义与对数函数

定义 3.15 (对数) 若 $a^x = N$ $(a > 0, a \neq 1)$, 则数 x 称为以 a 为底 N 的**对数**, 记作

$$x = \log_a N$$

其中, a 称为对数的**底数**, N 称为**真数**.

这个定义表明对数与指数互为逆运算, 即 $a^x = N \iff x = \log_a N$. 于是 $\log_a N$ 就是满足 $a^x = N$ 的那个指数 x.

由此可建立对数函数.

定义 3.16 (对数函数) 函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 称为**对数函数**, 其中 x 是自变量.

对数函数的底数与定义域承袭自指数函数.

- **底数约束 ($a > 0, a \neq 1$)**. 与指数函数相同, 要求 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.
- **定义域(真数约束 $x > 0$)**. 对数函数的自变量 x 是指数函数 $y = a^x$ 的因变量. 由于指数函数的值域为 $(0, +\infty)$, 对数函数的定义域也必须是 $(0, +\infty)$.

3.13.2 对数函数的图像与性质

对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数. 因此它们的图像关于直线 $y = x$ 对称. 其余代数性质都由此导出.

我们列出对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ 的主要性质.

1. **定义域与值域**. 其定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $\mathbb{R}$. 二者恰好是指数函数定义域与值域的互换.
2. **特定点**. 无论底数 a 为何值, 函数图像恒过定点 $(1, 0)$, 因为 $\log_a 1 = 0$.
3. **单调性**:
   - 当 $a > 1$ 时, 对数函数在 $(0, +\infty)$ 上是**严格单调递增**的.
   - 当 $0 < a < 1$ 时, 对数函数在 $(0, +\infty)$ 上是**严格单调递减**的.
4. **渐近线**. y 轴, 即直线 $x = 0$ 是对数函数图像的垂直渐近线.

例题 3.47 (对数与指数的复合应用) 已知对数函数 $f(x)$ 的图像与一次函数 $h(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ 的图像交于 A, B 两点, 且点 B 的横坐标为 4.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

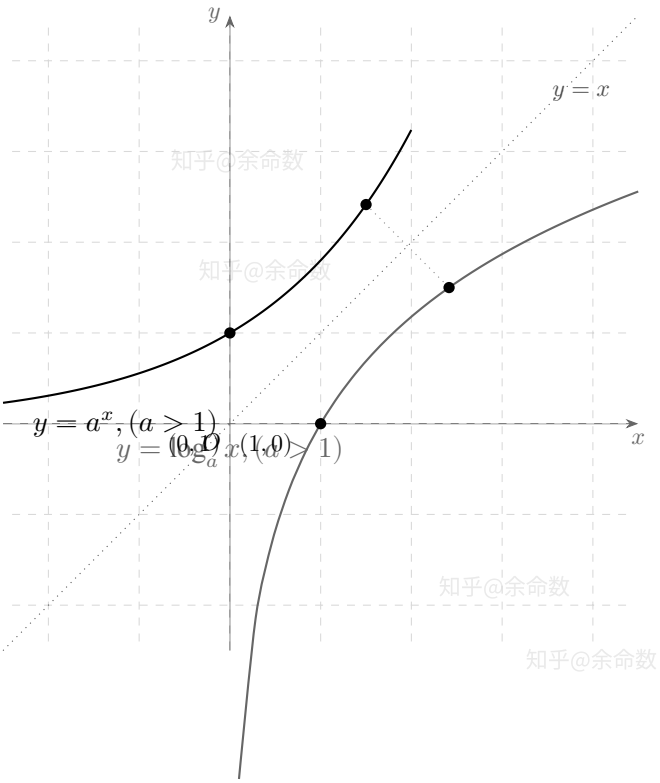
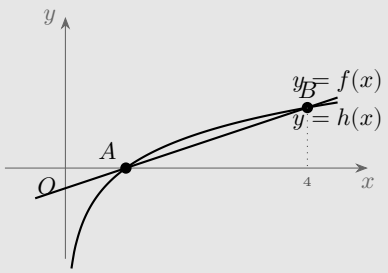


图 3.21 指数函数与对数函数图像的对称性 ($a > 1$)

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数



1. 求 $f(x)$ 的解析式.
2. 若关于 x 的不等式 $4^{f(x)}<k$ 恰有 1 个整数解, 求实数 k 的取值范围.

解 先确定 $f(x)$ 的解析式. 设 $f(x)=\log_a x$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

点 B 是两个函数图像的公共点, 其坐标必须同时满足两个函数的解析式. 已知点 B 的横坐标为 4, 可计算其纵坐标, 得

$$h(4)=\frac{1}{3}(4)-\frac{1}{3}=1$$

因此, 点 B 的坐标为 $(4,1)$.

将点 $B(4,1)$ 的坐标代入 $f(x)=\log_a x$ 中, 得关于底数 a 的方程

$$f(4)=\log_a 4=1$$

根据对数的定义, 此式等价于 $a^1=4$, 故 $a=4$. 因此, 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\log_4 x$.

再分析不等式 $4^{f(x)}<k$. 把 $f(x)=\log_4 x$ 代入, 左侧化简为

$$4^{\log_4 x}<k$$

由对数与指数的互逆关系, $4^{\log_4 x}=x$, 不等式化为

$$x<k$$

讨论必须在 $f(x)$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 内进行.

因此, 不等式的完整解集是 $0<x<k$. 我们要找参数 k 的取值, 使得开区间 $(0,k)$ 内恰好包含一个整数.

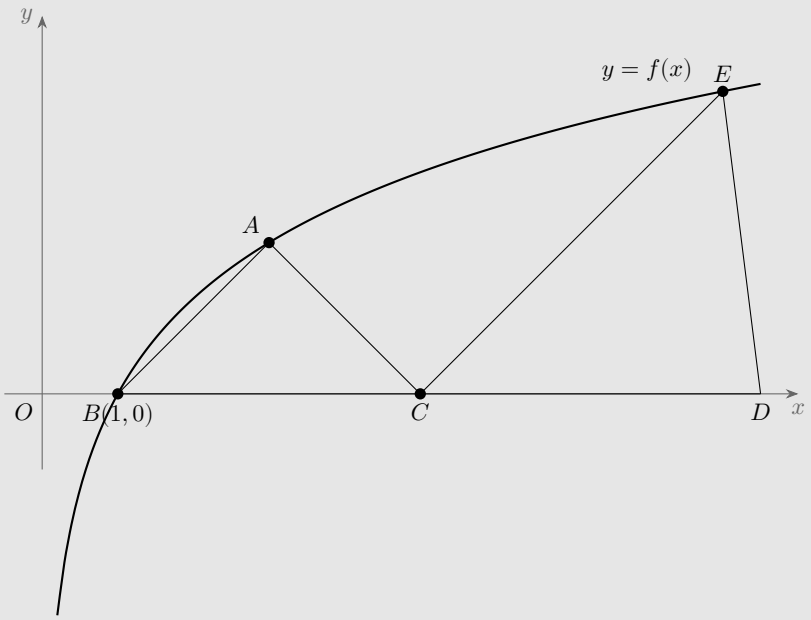
区间 $(0,k)$ 内的整数从小到大依次为 $1,2,3,\ldots$. 要使该区间内恰好包含一个整数, 这个整数只能是 1.

为了让 1 成为解集的一部分, 必须有 $1<k$. 为了让 2 不成为解集的一部分, 必须有 $k\leq 2$.

综合这两个条件, 得 $1<k\leq 2$. 故实数 k 的取值范围是 $(1,2]$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.48 (对数函数图像的几何应用) 如图, 对数函数 $f(x)=\log_a x\ (a>1)$ 图像上的点 A 与 x 轴上的点 $B(1,0)$ 和点 C 构成以 BC 为斜边的等腰直角三角形. 若 $\triangle ECD$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 点 E 在函数 $f(x)$ 的图像上, 点 D 位于点 C 的右侧, 且两个三角形的相似比为 $2:1$, 求底数 a 的值.



解 此问题需将几何条件转化为点坐标之间的代数关系.

设点 A 的坐标为 (x_1,y_1). 因为 $a>1$, 函数 $f(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增, 所以 $y_1>0$. 又因为 $\triangle ABC$ 以 BC 为斜边且为等腰直角三角形, 点 A 在斜边上方, 故 A 到 BC 的垂线长度等于 BC 的一半, 垂足为 BC 的中点.

点 A 的纵坐标 y_1 即为三角形的高. 设 C 点坐标为 $(c,0)$, 则斜边长为 $c-1$. 得关系 $y_1=\frac{1}{2}(c-1)$. 同时, 点 A 的横坐标 x_1 必为 BC 的中点横坐标, 即 $x_1=\frac{1+c}{2}$.

从这两个关于 x_1,y_1,c 的关系式中, 可消去 c. 由 $c=2x_1-1$ 代入前式, 得 $y_1=\frac{1}{2}((2x_1-1)-1)=x_1-1$. 图像上的点 $A(x_1,y_1)$ 必须满足线性关系 $y_1=x_1-1$.

接下来, 引入 $\triangle ECD$ 的信息. 设点 E 的坐标为 (x_2,y_2). 由于 $\triangle ECD\sim\triangle ABC$ 且相似比为 2, 其对应高的比也为 2.$\triangle ECD$ 的高即为点 E 的纵坐标 y_2. 因此, $y_2=2y_1$.

因为点 $A(x_1,y_1)$ 和 $E(x_2,y_2)$ 均在函数 $f(x)=\log_a x$ 的图像上, 有

$$y_1=\log_a x_1,\quad y_2=\log_a x_2$$

结合 $y_2=2y_1$, 得 $\log_a x_2=2\log_a x_1=\log_a(x_1^2)$. 由于对数函数是单射, 此式蕴含了 $x_2=x_1^2$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

还需要一个关于 x_1, x_2 的关系. 同样利用 $\triangle ECD$ 的几何性质, 其底边 CD 的长度是 BC 的两倍, 即 $CD = 2BC = 2(c-1) = 4y_1$. 点 E 的横坐标 x_2 是 CD 的中点横坐标.

$$x_2 = c + \frac{1}{2}CD = c + 2y_1$$

现在拥有一个关于 x_1, y_1, x_2 的方程组

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 1 \\ x_2 = x_1^2 \\ x_2 = c + 2y_1 = (2x_1 - 1) + 2y_1 \end{cases}$$

将第一、二个式子代入第三个式子

$$x_1^2 = (2x_1 - 1) + 2(x_1 - 1) = 4x_1 - 3$$

整理得到一个关于 x_1 的一元二次方程

$$x_1^2 - 4x_1 + 3 = 0$$

因式分解得 $(x_1 - 1)(x_1 - 3) = 0$, 解得 $x_1 = 1$ 或 $x_1 = 3$.

若 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = \log_a 1 = 0$, 这将导致 $\triangle ABC$ 退化为一个线段, 不合题意, 故舍去. 因此, $x_1 = 3$.

当 $x_1 = 3$ 时, $y_1 = x_1 - 1 = 2$. 故点 A 的坐标为 $(3, 2)$.

最后, 将点 $A(3, 2)$ 的坐标代入函数解析式以求解底数 a

$$2 = \log_a 3$$

根据对数的定义, $a^2 = 3$. 由于题设 $a > 1$, 得 $a = \sqrt{3}$.

3.13.3 对数的运算法则

对数的运算法则可直接从指数运算法则导出. 我们把指数式改写成对数语言, 即可逐条得到.

定理 3.26 (对数运算法则) 设 $a > 0, a \neq 1$, 且 $M > 0, N > 0$.

1. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$(积的对数等于对数的和).
2. $\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$(商的对数等于对数的差).
3. $\log_a(M^n) = n \log_a M$ $(n \in \mathbb{R})$(幂的对数等于指数乘以底的对数).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 设 $u=\log_a M, v=\log_a N$. 根据对数定义, $M=a^u, N=a^v$.

对于积的法则

$$MN=a^u a^v=a^{u+v},$$

故 $\log_a(MN)=u+v=\log_a M+\log_a N$.

对于商的法则, 由于 $N>0$, 有

$$\frac{M}{N}=\frac{a^u}{a^v}=a^{u-v},$$

故 $\log_a(M/N)=u-v=\log_a M-\log_a N$.

对于幂的法则, 任取实数 n. 由实指数幂的运算法则

$$M^n=(a^u)^n=a^{un},$$

故 $\log_a(M^n)=un=n\log_a M$. 三条公式均得证. □

实际计算中常需要统一不同对数的底数. 换底公式正是这个工具.

定理 3.27 (换底公式) 设 $a,b>0$ 且 $a,b\neq 1, N>0$. 则

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$$

证明 设 $\log_a N=x$. 则 $a^x=N$. 对此指数式两边取以 b 为底的对数, 得

$$\log_b(a^x)=\log_b N$$

应用幂的运算法则得 $x\log_b a=\log_b N$. 由于 $a\neq 1, \log_b a\neq 0$, 故可解得 $x=\frac{\log_b N}{\log_b a}$. 将 $x=\log_a N$ 代回, 即得公式. □

换底公式有两个很有用的推论.

- $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$(通过令 $N=b$ 得到).
- $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$(通过换底到以 a 为底的对数得到).

例题 3.49 求解不等式 $\log_{0.5}(x^2-2x-3)>\log_{0.5}(x-1)$.

解 由于对数的真数必须为正, 我们先列定义域约束

$$\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

第一个不等式 $(x-3)(x+1)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$. 第二个不等式 $x>1$ 的解集为 $(1,+\infty)$. 两个解集的交集为 $(3,+\infty)$. 这是考虑原不等式时自变量 x 必须满足的范围.

在定义域 $x\in(3,+\infty)$ 内求解原不等式. 不等式两端是同一个对数函数 $f(t)=\log_{0.5}t$ 在两个不同点 $t_1=x^2-2x-3$ 和 $t_2=x-1$ 的取值.

由于底数 $a=0.5\in(0,1)$, 对数函数 $f(t)$ 在其定义域上是严格单调递减的. 因此, $f(t_1)>f(t_2)$ 等价于 $t_1<t_2$

$$x^2-2x-3<x-1$$

整理此一元二次不等式, 得

$$x^2-3x-2<0$$

方程 $x^2-3x-2=0$ 的根为 $x=\frac{3\pm\sqrt{9-4(1)(-2)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. 故不等式 $x^2-3x-2<0$ 的解集为 $(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{3+\sqrt{17}}{2})$.

最后, 须将此解集与先前确定的函数定义域 $(3,+\infty)$ 求交集. 注意到 $4<\sqrt{17}<5$, 因此 $\frac{3+4}{2}<\frac{3+\sqrt{17}}{2}<\frac{3+5}{2}$, 即 $3.5<\frac{3+\sqrt{17}}{2}<4$. 同时, $3=\frac{6}{2}=\frac{\sqrt{36}}{2}<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

因此, 原不等式的解集为 $(3,\frac{3+\sqrt{17}}{2})$.

例题 3.50　已知函数 $f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$ $(a>0,a\neq1)$.

1. 求 $f(x)$ 的定义域.
2. 判断 $f(x)$ 的奇偶性.

解　函数的定义域要求其真数为正, 即

$$\frac{1+x}{1-x}>0$$

此分式不等式等价于 $(1+x)(1-x)>0$, 即 $(x+1)(x-1)<0$. 解得 $-1<x<1$. 故 $f(x)$ 的定义域为开区间 $(-1,1)$.

再判断奇偶性. 定义域 $(-1,1)$ 关于原点对称, 因此可以讨论奇偶性. 由

$$f(-x)=\log_a\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\log_a\frac{1-x}{1+x}$$

为了与 $f(x)$ 建立联系, 我们利用对数运算法则. 注意到 $\frac{1-x}{1+x}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}$. 因此

$$\begin{aligned}f(-x)&=\log_a\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right)\\&=-1\cdot\log_a\frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= -f(x)$$

此关系对定义域内的所有 x 成立, 故 $f(x)$ 是奇函数.

注 3.12
更一般地, 若 $g(-x) = 1/g(x)$, 则函数 $f(x) = \log_a g(x)$ 必为奇函数.

3.14 函数模型与应用

数学不仅研究抽象结构, 也可用来描述自然、社会、经济中的数量关系. 把一个实际问题抽象为数学结构的过程称为**数学建模**. 建模时, 我们根据问题的内在规律与经验数据, 从已知函数类型中选择候选模型, 估算参数, 并通过比较确定与数据最吻合的表达式.

一个完整的建模过程通常包括以下几个环节.

- **数据分析与模型初选**. 审视经验数据的变化趋势是增长还是衰减、变化速率是加速、匀速还是减速等特征, 据此筛选出具有相似理论行为的函数类型作为候选模型.
- **参数估计**. 利用数据中的若干关键信息 (通常是特定的数据点), 建立关于模型待定参数的方程组, 并求解这些参数.
- **模型检验与优化**. 将拟合出的具体函数模型用于预测其他数据点, 并比较预测值与真实值的差异, 即误差, 以评估模型的优劣. 若误差过大, 则可能需要更换模型或修正参数.

以下通过实例说明.

例题 3.51 (函数模型的选择与拟合) 某养殖场随着技术的进步和规模的扩大, 肉鸡产量在不断增加. 现收集到 2020 年前 10 个月该养殖场上市的肉鸡数量 W(单位:万只)与月份 m 的数据如下表:

月份 m	1	2	3	4	5
数量 W	1.020	2.000	2.578	2.997	3.313
月份 m	6	7	8	9	10
数量 W	3.578	3.804	4.000	4.173	4.329

数量 W 和月份 m 之间可能存在以下四种函数关系:

① $W(m) = b \cdot a^m$

② $W(m) = b \cdot m^c$

③ $W(m) = b + \log_a m$

④ $W(m) = a - \frac{b}{m}$ $(a > 0, b > 0)$

1. 请从这四个函数模型中去掉一个与表格中数据不吻合的函数模型, 并说明理由.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. 请从表格中选择 2 月份和 8 月份的数据, 再从第 (1) 问剩下的三个模型中任选两个函数模型进行建模, 求出其函数表达式, 再分别求出这两个模型下 4 月份的肉鸡数量, 并说明哪个函数模型更好. (参考数据: $\sqrt[3]{16} \approx 2.519, \sqrt{2} \approx 1.414$)

解 (1) 先分析数据趋势. 由表格可知, W 随 m 增加而增加, 但增长的速率在变化. 相邻月份的增量如下

$$W(2)-W(1) \approx 0.980$$

$$W(3)-W(2) \approx 0.578$$

$$W(4)-W(3) \approx 0.419$$

$$\cdots$$

$$W(10)-W(9) \approx 0.156$$

每月增加的数量递减, 因此这是减速增长.

再分析四个候选模型的理论行为.

- 模型 ① $W(m)=b\cdot a^m$ 是一个指数增长模型. 为保证增长, 必须有 $a>1$. 在此条件下, 其增量为 $W(m+1)-W(m)=b\cdot a^m(a-1)$, 这是一个随 m 增加而严格递增的量. 故指数模型描述的是加速增长过程.
- 模型 ② $W(m)=b\cdot m^c$ 是一个幂函数模型. 为保证增长, 需 $b>0, c>0$. 若 $0<c<1$, 其增长率是递减的; 若 $c>1$, 其增长率是递增的.
- 模型 ③ $W(m)=b+\log_a m$ 是一个对数函数模型. 为保证增长, 需 $a>1$. 对数函数的增长率是递减的.
- 模型 ④ $W(m)=a-b/m$ 是一个反比例函数平移后的模型. 其增长率也是递减的.

比较二者可知, 模型 ① 描述加速增长, 与数据的减速增长矛盾. 因此应去掉模型 ①.

(2) 选取 2 月份的数据 $(2, 2.000)$ 和 8 月份的数据 $(8, 4.000)$. 我们选择模型 ② 和 ③ 进行拟合.

对模型 ②. 设 $W(m)=b\cdot m^c$.

将数据点 $(2,2)$ 和 $(8,4)$ 代入, 得到关于参数 b, c 的方程组

$$\begin{cases} 2=b\cdot 2^c \\ 4=b\cdot 8^c \end{cases}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两式相除以消去 b, 得

$$\frac{4}{2}=\frac{b\cdot 8^c}{b\cdot 2^c}\implies 2=\left(\frac{8}{2}\right)^c=4^c$$

解得 $c=1/2$. 将 $c=1/2$ 代回第一个方程得 $2=b\cdot 2^{1/2}=b\sqrt{2}$, 解得 $b=\sqrt{2}$. 因此, 幂函数模型为 $W_2(m)=\sqrt{2}\cdot m^{1/2}=\sqrt{2m}$.

利用此模型预测 4 月份的肉鸡数量

$$W_2(4)=\sqrt{2\cdot 4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\approx 2\times 1.414=2.828(\text{万只})$$

对模型 ③. 设 $W(m)=b+\log_a m$.

将数据点 $(2,2)$ 和 $(8,4)$ 代入, 得到关于参数 a,b 的方程组

$$\begin{cases}2=b+\log_a 2\\ 4=b+\log_a 8\end{cases}$$

两式相减, 以消去参数 b

$$4-2=(\log_a 8)-(\log_a 2)\implies 2=\log_a(8/2)=\log_a 4$$

根据对数的定义, $a^2=4$. 由于底数 $a>0,a\neq 1$, 故 $a=2$. 将 $a=2$ 代回第一个方程得 $2=b+\log_2 2=b+1$, 解得 $b=1$. 因此, 对数函数模型为 $W_3(m)=1+\log_2 m$.

利用此模型预测 4 月份的肉鸡数量

$$W_3(4)=1+\log_2 4=1+2=3.000(\text{万只})$$

比较两模型.

把两个模型的预测值与表格中 $W(4)=2.997$ 比较.

模型 ② 的预测误差为 $|2.828-2.997|=0.169$. 模型 ③ 的预测误差为 $|3.000-2.997|=0.003$.

对数函数模型的误差远小于幂函数模型, 因此在本题中模型 ③ 更好.

例题 3.52 人耳对响度的感知与声强 I 的对数有关, 其中 I 的单位是 W/m^2. 科学家用声强级 Y(单位分贝)刻画响度, 公式为

$$Y=10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

其中 $10^{-12}\ \text{W/m}^2$ 是人耳能听到的阈值声强.

1. 平常人交谈时的声强约为 $10^{-6}\ \text{W/m}^2$, 求其声强级.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. 一般常人能听到的最低声强级是 0 分贝, 求能听到的最低声强为多少?
3. 比较理想的睡眠环境要求声强级 $Y \le 50$ 分贝. 已知熄灯后两位同学在宿舍说话的声强为 $5\times10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$, 问这两位同学是否会影响其他同学休息?(参考数据:$\lg 2 \approx 0.301$)

解 声强级 Y 与声强 I 由对数模型联系.

(1) 平常交谈 $I = 10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$

$$Y = 10\lg\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10\lg(10^6) = 60(\text{分贝}).$$

知乎@余命数

(2) 最低可听对应 $Y = 0$. 由 $10\lg(\frac{I}{10^{-12}}) = 0$, 得 $\frac{I}{10^{-12}} = 1$, 故 $I = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$, 恰为模型中的基准声强.

(3) 宿舍谈话 $I = 5\times10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$

$$Y = 10\lg\left(\frac{5\times10^{-7}}{10^{-12}}\right) = 10\lg(5\times10^5) = 10(\lg 5 + 5).$$

知乎@余命数

由 $\lg 5 = \lg(10/2) = 1 - \lg 2$

$$Y = 10(6 - \lg 2) \approx 10(6 - 0.301) = 56.99(\text{分贝}),$$

知乎@余命数

高于 50 分贝的睡眠上限, 故会影响他人休息.

注 3.13 (对数标度的意义)
声学、地震学(里氏震级)、化学 (pH) 等广泛采用对数标度, 因为相关物理量的跨度极大, 而感知更依赖数量级. 对数把乘法型的数量级变化变为加法型的标度变化, 将巨大动态范围压缩到可处理的尺度.

3.15 函数的零点(一)

函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的实数根, 也是图像 $y = f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标. 零点、方程的根、横截距这三种说法指同一个对象. 本节研究方程 $f(x) = 0$ 的解是否存在、有多少个、落在何处.

3.15.1 零点的存在性

我们要回答的是,如何确信一个函数存在零点,尤其是在无法直接解出 $f(x) = 0$ 时. 答案蕴含在连续性中.

知乎@余命数

设想一条连续曲线, 一端在 x 轴下方, 另一端在 x 轴上方. 当它从一端连到另一端时, 必然穿过 x 轴. 这就是零点存在性定理的直观背景.

注 3.14
零点存在性的严格证明依赖连续函数的介值定理, 见 第四卷第 16 章. 图像连续且两端异号则必有交点, 是介值定理的几何表述.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

零点存在性 (介值定理)

定理 3.28 (零点存在性定理) 若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图像是一条连续不断的曲线, 并且其在区间端点处的函数值异号, 即 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则在开区间 (a,b) 内, 函数 $y=f(x)$ 至少存在一个零点.

证明 我们用介值定理. 由 $f(a)f(b)<0$ 可知 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 因此 0 严格介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间.

因为 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 由介值定理, 存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=0$. 又 $f(a)$ 与 $f(b)$ 均不为 0,所以 c 不可能是端点 a 或 b,从而 $c\in(a,b)$. 因此函数在 (a,b) 内至少存在一个零点. □

知乎@余命数

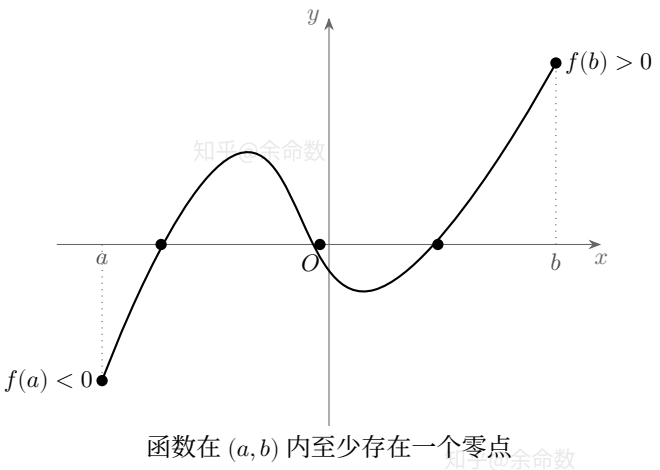


图 3.22 零点存在性定理的几何直观. 由于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 连续曲线必然穿越 x 轴.

条件 $f(a)\cdot f(b)<0$ 只是函数在 (a,b) 内存在零点的一个**充分条件**. 函数完全可能在区间内存在零点, 但不满足该条件. 例如 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点 $x=0$, 而 $f(-1)f(1)=1>0$. 这通常发生在图像与 x 轴相切, 或穿越 x 轴偶数次时.

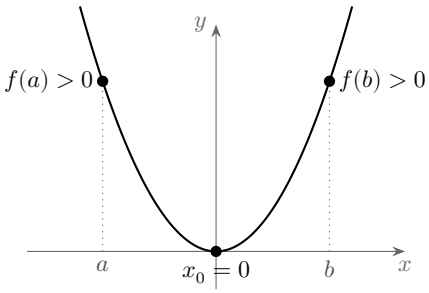
导数辅助判定零点

例题 3.53 函数 $f(x)=\ln x+x^2-2$ 的零点所在的区间是(　).

A.$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　B.$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$　　C.$(1,\sqrt{2})$　　D.$(\sqrt{2},2)$

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 方程 $\ln x+x^2-2=0$ 没有显式根, 我们用零点存在性定理定位零点. 该定理只保证存在性, 因此先考察单调性以判定零点是否唯一.

知乎@余命数



$f(a)f(b)>0$, 但函数仍存在零点

图 3.23　零点存在性定理条件的非必要性

导函数 $f'(x)=\frac{1}{x}+2x$. 对一切 $x>0$ 有 $\frac{1}{x}>0$ 且 $2x>0$, 故 $f'(x)>0$, f 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增, 至多一个零点. 问题化为在四个选项中定位这唯一的零点.

先看 $x=1$

$$f(1)=\ln 1+1^2-2=-1<0.$$

由严格递增, 零点 x_0 必在 1 的右侧, 因此 $x_0>1$, 排除 A、B.

再看选项 C 的右端点 $x=\sqrt{2}$

$$f(\sqrt{2})=\ln(\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2-2=\frac{1}{2}\ln 2>0.$$

于是 $f(1)<0$, $f(\sqrt{2})>0$. 由零点存在性定理, $(1,\sqrt{2})$ 内至少有一个零点; 结合单调性, 该零点唯一, 恰落在区间 $(1,\sqrt{2})$ 内.

故选 C.

3.15.2 零点的求解与个数判定

零点存在之后, 我们进一步确定它的位置与个数. 常用的做法是把代数分析与几何直观结合起来.

3.15.2.1 代数变换与图像分析

对于复杂方程 $f(x)=0$, 一个常用做法是把它们**等价变形**为 $g(x)=h(x)$, 其中 g,h 是我们更熟悉的函数. 于是 $f(x)=0$ 的根与 $g(x)=h(x)$ 的根相同. 这样, 求根问题就变成判断两条曲线交点个数的问题.

例题 3.54　判断函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2}{x}$ 的零点个数.

知乎@余命数

解 直接分析 $f(x)$ 比较复杂. 我们把它等价地写成

$$\ln(x+1)=\frac{2}{x}.$$

于是原问题等价于考察函数 $y_1=\ln(x+1)$ 与函数 $y_2=\frac{2}{x}$ 的图像的交点个数.

分别分析.$y_1=\ln(x+1)$ 由 $y=\ln x$ 向左平移 1 个单位得到，定义域为 $(-1,+\infty)$，严格递增，且经过原点. $y_2=\frac{2}{x}$ 为反比例函数，图像在第一、三象限. 在同一坐标系中画出草图, 见 图 3.24.

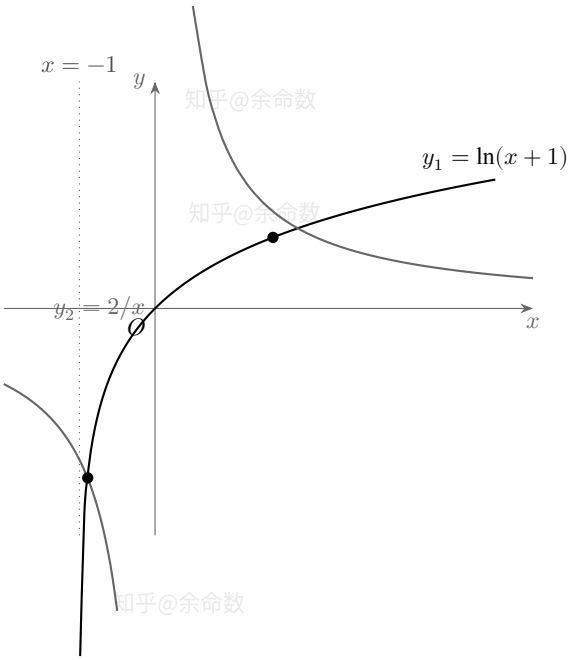


图 3.24 函数 $y_1=\ln(x+1)$ 与 $y_2=2/x$ 的图像

图像显示两条曲线在第一象限和 $(-1,0)$ 内各有一个交点. 下面严格证明这一点.

在 $(0,+\infty)$ 上, $y_1=\ln(x+1)$ 严格递增, $y_2=2/x$ 严格递减. 因此它们的图像在此区间内至多有一个交点.

只需验证存在性.$y_1(1)=\ln 2<1<2=y_2(1)$, 而 $y_1(2)=\ln 3>1=y_2(2)$, 故 $(1,2)$ 内必有交点.

在区间 $(-1,0)$ 内, $y_1=\ln(x+1)$ 的值域为 $(-\infty,0)$, $y_2=2/x$ 的值域也为 $(-\infty,0)$. 直接看图还不确定, 因此我们考虑辅助函数 $F(x)=\ln(x+1)-2/x$. 其导数 $F'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2}>0$, 故 $F(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增. 又 $\lim_{x\to-1^+}F(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0^-}F(x)=+\infty$, 由零点存在性定理, 此区间内也恰有一个零点.

两个函数图像共有两个交点, 故原函数 $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

用导数判定零点个数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.15.2.2 单调性与极值分析

对于不能拆成两个简单函数的 $f(x)$, 判定零点个数通常先研究其单调性. 单调区间由 $f'(x)$ 的符号决定;极值点处的函数值则是判断零点是否存在的关键.

判定时依次做三件事.

1. 求导数 $f'(x)$, 并求解 $f'(x)=0$ 得到所有临界点.
2. 根据临界点划分函数的单调区间.
3. 计算函数在所有极值点处的函数值, 并考察函数在无穷远处的极限行为.
4. 结合单调性与上述关键点的函数值符号, 在每个单调区间内应用零点存在性定理, 最终确定零点的总个数.

知乎@余命数

例题 3.55 讨论函数 $f(x)=e^x-ax$ $(a\in\mathbb{R})$ 的零点个数.

知乎@余命数　知乎@余命数

解 我们先从 $f(x)$ 的单调性入手. 该问题等价于判断 $e^x=ax$ 的根的个数, 亦即曲线 $y=e^x$ 与直线 $y=ax$ 的交点个数.

其导函数为 $f'(x)=e^x-a$.

令 $f'(x)=0$, 得 $e^x=a$. 这个方程是否有解, 取决于 a 的值.

情形一 ($a<0$). 若 $a<0$, 则 $e^x=a$ 无解, 且 $f'(x)=e^x-a>0$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立. 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增. f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且严格递增, 因此与 x 轴至多有一个交点. 又 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 由介值定理, 函数至少有一个零点. 因此, $a<0$ 时 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点.

当 $a=0$ 时, $f(x)=e^x>0$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立, 因而没有零点.

情形二 ($a>0$). 在此情形下, $f'(x)=0$ 有唯一解 $x_0=\ln a$. 当 $x<\ln a$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减. 当 $x>\ln a$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. 因此, 函数在 $x=\ln a$ 处取得唯一的极小值, 也是最小值.

$$f_{\min}=f(\ln a)=e^{\ln a}-a\ln a=a-a\ln a=a(1-\ln a)$$

函数零点的个数, 完全取决于这个最小值与零的大小关系.

知乎@余命数

- 若 $f_{\min}>0$, 即 $a(1-\ln a)>0$. 由于 $a>0$, 这等价于 $1-\ln a>0$, 即 $\ln a<1$, 解得 $0<a<e$. 此时, 函数的最小值大于零, 图像恒在 x 轴上方, 故函数**没有零点**.
- 若 $f_{\min}=0$, 即 $a(1-\ln a)=0$. 由于 $a>0$, 这等价于 $1-\ln a=0$, 即 $\ln a=1$, 解得 $a=e$. 此时, 函数的最小值恰好为零, 图像与 x 轴仅有一个切点, 故函数有且仅有 **1 个零点**.
- 若 $f_{\min}<0$, 即 $a(1-\ln a)<0$. 由于 $a>0$, 这等价于 $1-\ln a<0$, 即 $\ln a>1$, 解得 $a>e$. 此时, 函数的最小值小于零. 考虑到 $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, 函数图像在极小值点左侧和右侧必然各与 x 轴相交一次. 故函数有 **2 个零点**.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

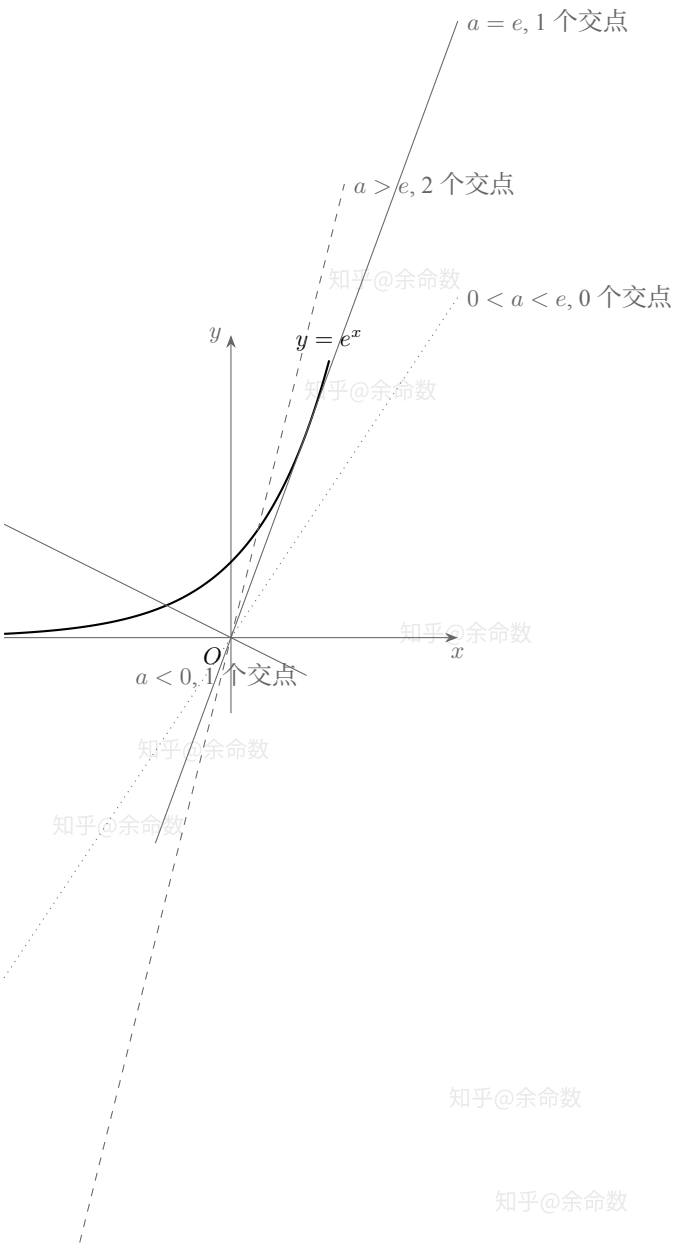


图 3.25 方程 $e^x = ax$ 根的个数的几何解释

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

函数 $f(x)=e^x-ax$ 的零点个数为

- 当 $a\in(-\infty,0)\cup\{e\}$ 时, 有 1 个零点.
- 当 $a\in[0,e)$ 时, 有 0 个零点.
- 当 $a\in(e,+\infty)$ 时, 有 2 个零点.

3.16 分段函数

知乎@余命数

我们看一类函数. 它的对应法则在定义域的不同部分并不相同. 例如, 所得税的税率随收入水平分级变化, 物体在不同介质中运动遵循不同的物理定律. 单一解析表达式往往无法写出这种关系, 于是我们引入分段函数. 分析分段函数时, 我们先分别考察各片段上的局部性质, 再考察这些性质在拼接点处如何衔接, 从而判断其整体行为.

注 3.15
分段点处的连续性与可导性使用极限语言, 严格定义见第四卷第 16 章. 图像上可先判断分段点是否连续、是否有尖角.

3.16.1 定义与基本示例

定义 3.17 (分段函数) 一个**分段函数**是指在其定义域的不同子集上, 分别由不同的解析式所定义的函数. 其一般形式为:

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in D_1\\ f_2(x), & x\in D_2\\ \vdots & \\ f_n(x), & x\in D_n\end{cases}$$

其中, 各个子集 D_i 互不相交, 即 $D_i\cap D_j=\varnothing$ 对任意 $i\neq j$, 且它们的并集 $\bigcup_{i=1}^{n}D_i$ 构成了函数 $f(x)$ 的完整定义域 D.

我们以出租车计费为例. 设乘客乘坐的里程为 x, 支付的车费为 $f(x)$, 则计费规则可以写成

$$f(x)=\begin{cases}13, & 0\le x\le 3\\ 13+2.4(x-3), & x>3\end{cases}$$

其中, 第一段表示里程不超过 3 公里时车费固定为 13 元, 第二段表示里程超过 3 公里时车费为 13 元加上超出部分每公里 2.4 元. 对于任意给定的里程 x, 我们先判断它属于哪个计价区间, 再用该区间对应的公式计算费用. 上述规则是一个单一且明确的函数.

现在回头审视定义中的各个部分.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

▷ $D_1, D_2, \ldots$ (**定义域的划分**) 这些子集对应于出租车计费的各个里程区间. 它们将整个定义域分割成若干个互不重叠的部分.

▷ $f_1(x), f_2(x), \ldots$ (**不同的法则**) 这些解析式对应于每个里程区间所使用的不同计价公式. 它们给出函数在各自区域的行为.

▷ **互不相交** ($D_i \cap D_j = \emptyset$) 这是分段函数成为**函数**的根本. 它意味着任意输入值 x 只能落入**唯一一个**子定义域 D_i 中. 这就保证了对于一个输入, 只会有一个计价公式被激活, 从而产生唯一的输出值. 一次 5 公里的行程不能同时适用 3 公里内和 3 公里外的规则.

▷ **并集构成完整定义域** 这保证了规则的完备性. 对于任意允许的输入值, 系统中都存在一个对应的规则来处理它, 不会出现无法计价的情况.

因此, 分段函数是一**个**定义完整的函数. 它的特殊之处在于其对应法则是**有条件的**, 需要根据自变量的取值来选择执行.

分段函数与普通函数的区别在于, 它的定义域被**划分**成若干子集. 函数在某一点 x_0 的取值, 完全取决于 x_0 属于哪个子定义域. 绘制分段函数的图像时, 我们在同一坐标系中把各个函数片段 $y = f_i(x)$ 在其各自的定义域 D_i 上的图像拼接起来. 在此过程中, 需要特别关注各个分段的**端点**. 这些点是函数性质可能发生突变的地方, 我们称之为**分段点**. 在分段点处, 我们要仔细判断该点属于前一段还是后一段, 并在图像上用实心点与空心点加以区分, 以保证函数的单值性.

例题 3.56 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$. 求 $f(0)$ 与 $f(f(0))$ 的值.

解 为求 $f(0)$, 我们先判断自变量 0 所在的区间. 由于 $0 \le 1$, $f(0)$ 适用第一个解析式, 故 $f(0) = 0 + 2 = 2$.

为求 $f(f(0))$, 我们需计算 $f(2)$. 自变量 2 满足 $2 > 1$, 适用第二个解析式, 故 $f(2) = 3$. 因此, $f(f(0)) = 3$.

例题 3.57 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \ge 0 \\ 2x+1, & x < 0 \end{cases}$. 求 $f(3)$ 的值.

解 为求 $f(3)$, 我们先确定自变量 $x = 3$ 属于哪个子定义域.

由于 $3 \ge 0$, 自变量 $x = 3$ 满足第一个条件.

于是, 应用第一个解析式 $f(x) = x^2 + 1$ 来计算函数值.

$$f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故 $f(3)$ 的值为 10.

例题 3.58　设函数 $g(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ x-1, & x\le 1\end{cases}$. 求 $g(g(1))$ 的值.

解　求解复合函数值 $g(g(1))$ 需要从里向外逐步计算.

先计算内层函数的值 $g(1)$. 自变量 $x=1$ 满足条件 $x\le 1$. 因此, 应用第二个解析式 $g(x)=x-1$.

$$g(1)=1-1=0$$

再将此结果作为外层函数的自变量, 计算 $g(0)$. 自变量 $x=0$ 满足条件 $x\le 1$. 因此, 再次应用第二个解析式.

$$g(g(1))=g(0)=0-1=-1$$

故 $g(g(1))$ 的值为 -1.

例题 3.59　已知函数 $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\ge 1\\ x+1, & x<1\end{cases}$. 若 $h(x)=3$, 求 x 的值.

解　我们需寻找一个自变量 x, 使其函数值为 3. 由于函数的解析式是分段的, 我们在每个子定义域上分别讨论.

情形一: 假设 $x\ge 1$. 在此条件下, 函数的解析式为 $h(x)=\sqrt{x}$. 令 $\sqrt{x}=3$, 两边平方得 $x=9$. 我们检验此解是否满足本情形的假设. 由于 $9\ge 1$, 该解有效.

情形二: 假设 $x<1$. 在此条件下, 函数的解析式为 $h(x)=x+1$. 令 $x+1=3$, 解得 $x=2$. 我们检验此解是否满足本情形的假设. 由于 2 并不小于 1, 该解无效, 必须舍去.

综合以上两种情形, 唯一有效的解是 $x=9$.

分段点连续与可导

3.16.2　连续性与可导性

分析分段函数时, 我们关注其在分段点处的行为.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 3.18 (分段点的连续性) 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个分段点.$f(x)$ 在 x_0 处**连续**的充要条件是其在该点的左极限、右极限均存在且等于该点的函数值, 即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

若此条件不满足, 则称函数在 x_0 处**间断**.

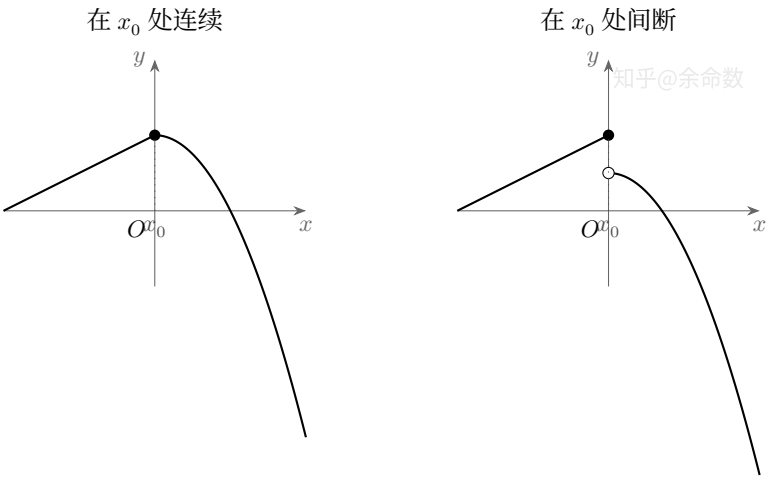


图 3.26 分段点处的连续与间断

定义 3.19 (分段点的可导性) 函数 $f(x)$ 在分段点 x_0 处**可导**的充要条件是其左导数与右导数存在且相等, 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

若左右导数不相等, 则函数在 x_0 处不可导, 其图像在该点形成**尖点**或**角点**.

例题 3.60 分析函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 函数 $f(x)=|x|$ 可写为分段函数形式 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$.

在 $x=0$ 处, 左极限 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$. 右极限 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$. 函数值为 $f(0)=0$. 由于左极限、右极限与函数值都等于 0, 函数在 $x=0$ 处连续.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

左导数为 $f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-h}{h}=-1$. 右导数为 $f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1$. 由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, 函数在 $x=0$ 处不可导.

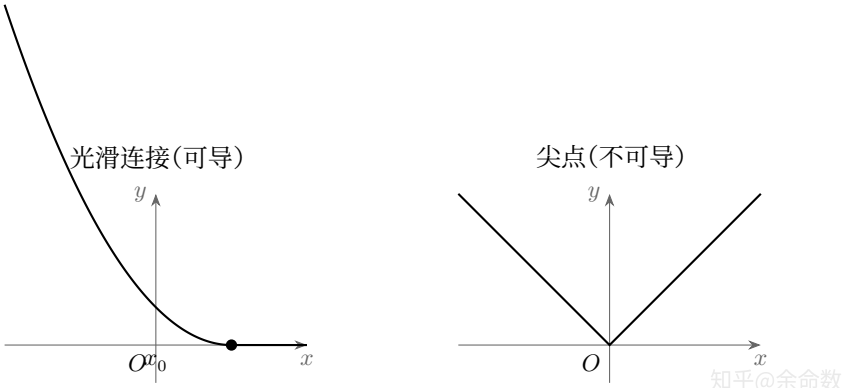


图 3.27　分段点处的光滑与尖点

3.16.3 整体性质的判定

一个函数在各分段区间上具有某种性质, 例如单调性, 并不能保证它在整个定义域上都具有此性质. 判定整体性质时, 我们还需考察函数在分段点处的衔接行为.

例如, 一个分段函数若要在整个定义域上单调递增, 必须满足以下两个条件.

1. 函数在每个子定义域上均单调递增.
2. 在任意相邻的两个子定义域 D_i, D_{i+1} (设 D_i 在 D_{i+1} 左侧) 的分界点 x_0 处, 有 $\lim_{x\to x_0^-}f(x)\leq f(x_0)$.

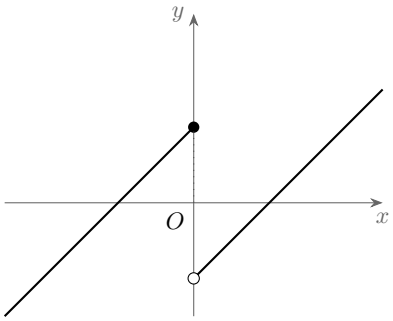


图 3.28　一个在各分段区间均递增, 但整体非单调的函数.

知乎@余命数

例题 3.61 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(2a-1)x+7a-2, & x<1\\ a^x, & x\geq 1\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

解 为使函数 $f(x)$ 在整个定义域 $\mathbb{R}$ 上单调递减，必须同时满足三个条件.

条件一是，函数在左侧子定义域 $(-\infty,1)$ 上必须单调递减. 此段为线性函数，其单调性由斜率决定.

$$2a-1<0 \implies a<\frac{1}{2}$$

条件二是，函数在右侧子定义域 $[1,+\infty)$ 上必须单调递减. 此段为指数函数，其单调性由底数决定.

$$0<a<1$$

条件三是，在分段点 $x=1$ 处，左侧区间的终点值必须不小于右侧区间的起点值，以保证单调递减趋势得以延续.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)\geq f(1)$$

计算得

$$(2a-1)(1)+7a-2\geq a^1$$

$$9a-3\geq a \implies 8a\geq 3 \implies a\geq\frac{3}{8}$$

将这三个条件联立，求解其交集.

$$\begin{cases}a<1/2\\ 0<a<1\\ a\geq 3/8\end{cases}$$

注意到 $3/8=0.375$ 且 $1/2=0.5$，因此三个区间的公共部分为 $[\frac{3}{8},\frac{1}{2})$.

故实数 a 的取值范围是 $[\frac{3}{8},\frac{1}{2})$.

例题 3.62 讨论方程 $f(x)=k$ 的根的个数，其中 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, & x\leq 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$.

解 此问题等价于考察函数 $y=f(x)$ 的图像与水平直线 $y=k$ 的交点个数. 我们分析函数 $f(x)$ 的图像，特别是其单调性、极值与端点行为.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

分段分析函数 $f(x)$.

当 $x \le 0$ 时, $f(x) = -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1$. 这是一个开口向下、对称轴为 $x = -1$ 的抛物线. 在区间 $(-\infty, -1]$ 上, 函数单调递增. 在区间 $[-1, 0]$ 上, 函数单调递减. 函数在 $x = -1$ 处取得极大值 $f(-1) = 1$. 在分段点 $x = 0$ 处, $f(0) = 0$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln(x+1)$. 这是一个严格单调递增的对数函数. 它在 $x \to 0^+$ 时的极限为 $\lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) = \ln 1 = 0$.

综合两段的信息, 我们可以绘制出函数的草图. 函数在 $x = 0$ 处连续. 它从 $-\infty$ 增长到极大值 1, 然后下降到 0, 再从 0 开始无限增长.

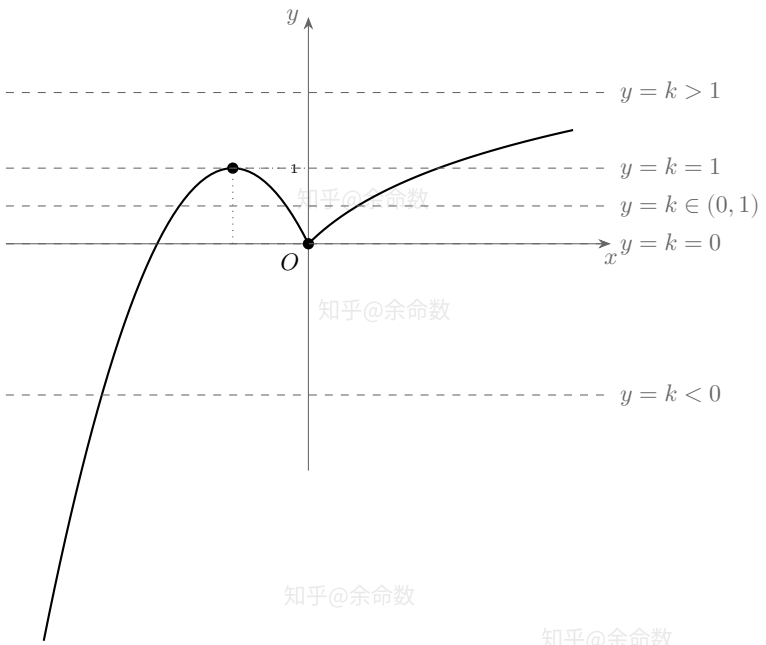


图 3.29　函数 $y = f(x)$ 与水平直线 $y = k$ 的交点情况

观察图像与水平直线 $y = k$ 的交点个数可知.

- 当 $k > 1$ 时, 直线不与第一段相交, 只与第二段有一个交点, 共 1 个交点.
- 当 $k = 1$ 时, 直线与图像在 $x = -1$ 处相切, 并在第二段有一个交点, 共 2 个交点.
- 当 $0 < k < 1$ 时, 直线与图像在第一段的两个分支以及第二段各有一个交点, 共 3 个交点.
- 当 $k = 0$ 时, 直线与图像在 $x = 0$ 和 $x = -2$ 处相交, 共 2 个交点.
- 当 $k < 0$ 时, 直线仅与图像在第一段有一个交点, 共 1 个交点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此, 方程 $f(x)=k$ 的根的个数为

$$\text{根的个数}=\begin{cases}1, & k<0 \text{ 或} k>1\\ 2, & k=0 \text{ 或} k=1\\ 3, & 0<k<1\end{cases}$$

上述分析表明, 方程 $f(x)=k$ 的根的个数由常数 k 与函数的关键值(极大值 1 与连接点值 0)之间的关系决定.

3.16.4 函数的基本要素分析

分段函数的定义域、值域与单调性等基本性质, 由其各个组成部分的性质以及它们在分段点处的衔接方式共同决定.

知乎@余命数

3.16.4.1 定义域与值域

3.16.4.1.1 定义域 分段函数的定义域是其所有子定义域的并集.

$$D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$$

这通常在函数定义时已经明确给出.

3.16.4.1.2 值域 分段函数的值域是其在各个子定义域上取得的值的集合的并集. 求解过程分为两步.

1. 分别求出函数 $y=f_i(x)$ 在其对应定义域 D_i 上的值域 R_i.
2. 将所有这些局部值域合并, 即求其并集 $R=R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_n$.

例题 3.63 求函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le -1\\ x^2, & -1<x<2\\ 2, & x\ge 2\end{cases}$ 的值域.

解 我们分别考察函数在每一个子定义域上的取值范围, 然后将这些范围合并.

- 当 $x\in(-\infty,-1]$ 时, $f(x)=x+2$. 这是一个单调递增的线性函数. 其在该区间上的值域为 $(-\infty,f(-1)]$, 即 $(-\infty,1]$.
- 当 $x\in(-1,2)$ 时, $f(x)=x^2$. 这是一个二次函数, 在区间 $(-1,0]$ 上递减, 在 $[0,2)$ 上递增. 其在该区间上的值域为

$$[f(0),\max(\lim_{x\to -1^+}x^2,\lim_{x\to 2^-}x^2))=[0,4).$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 当 $x \in [2,\infty)$ 时, $f(x)=2$. 这是一个常数函数, 其值域为单点集 $\{2\}$.

函数 $f(x)$ 的总值域是这三个部分值域的并集.

$$(-\infty,1]\cup[0,4)\cup\{2\}=(-\infty,4)$$

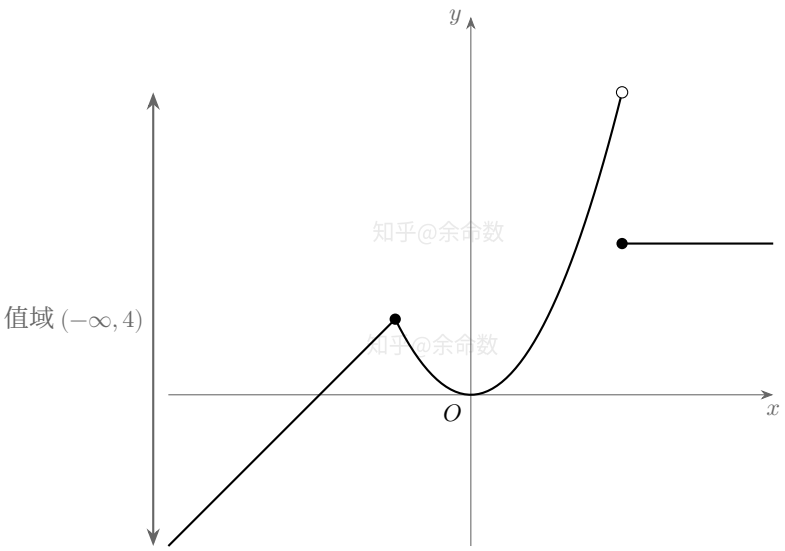


图 3.30　函数 $f(x)$ 的图像及其值域

因此, 函数的值域为 $(-\infty,4)$.

3.16.4.2 单调性

一个分段函数若要在整个定义域上单调, 必须同时满足两个条件.

1. 函数在**每个**子定义域上均具有相同的单调性, 例如, 均为单调递增.
2. 在所有分段点处, 函数的衔接必须**保持**这种单调趋势. 对于单调递增函数, 即后一段的起始值必须不小于前一段的结束值.

若第二个条件不满足, 即使函数在每个局部区间上都单调, 其整体也不是单调函数.

3.16.5 应用示例

分段函数可以描述现实世界中的条件依赖关系. 以下示例展示如何将几何问题与生活中的计价规则转化为分段函数的数学模型.

例题 3.64　如图, 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边上有一动点 P, 沿着折线 $B\to C\to D\to A$ 运动. 设点 P 运动的路程为 x, $\triangle APB$ 的面积为 y.

1. 求 y 与 x 之间的函数关系式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

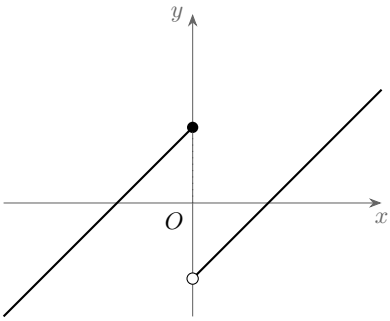
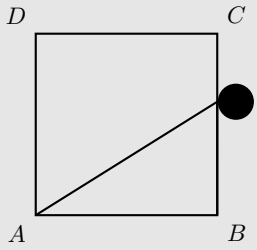


图 3.31 一个在各分段区间均递增, 但因在 $x=0$ 处发生向下跳跃而整体非单调的函数.

2. 求面积最大时, x 的取值范围.



解 (1) 三角形 APB 的底边 AB 长度固定为 4. 因此, 其面积 y 完全由高决定, 这个高是点 P 到边 AB 的垂直距离.

$$y=\frac{1}{2}\cdot \text{底}\cdot \text{高}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h_P=2h_P$$

点 P 的运动路径由三条边构成, 其在不同边上运动时, 高 h_P 与路程 x 的关系不同. 因此 $y(x)$ 是一个分段函数.

分段分析.

分段一: 点 P 在边 BC 上运动. 此时, P 从 B 运动到 C. 路程 x 的取值范围是 $[0,4]$. 点 P 到 AB 的高 h_P 等于它从点 B 向上运动的距离, 即路程 x. 故 $h_P=x$. 面积 $y=2x$.

分段二: 点 P 在边 CD 上运动. 此时, P 从 C 运动到 D. 路程 x 从 4 增加到 $4+4=8$. 其取值范围是 $(4,8]$. 点 P 在 CD 上运动时, 它到 AB 的高 h_P 始终等于正方形的边长 4. 故 $h_P=4$. 面积 $y=2\cdot 4=8$.

分段三: 点 P 在边 DA 上运动. 此时, P 从 D 运动到 A. 路程 x 从 8 增加到 $8+4=12$. 其取值范围是 $(8,12]$. 点 P 到 AB 的高 h_P 等于它与点 A 的距离. 总路程为 12, 已走路程为 x, 剩余路程即为 PA 的长度. 故 $h_P=12-x$. 面积 $y=2(12-x)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

综合以上三段, 我们得到函数关系式

$$y=f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 4\\ 8, & 4<x\le 8\\ 2(12-x), & 8<x\le 12\end{cases}$$

(2) 为求面积的最大值, 我们分析函数 $y(x)$ 在其定义域 $[0,12]$ 上的行为.

- 在 $[0,4]$ 上, $y=2x$ 是增函数, 最大值为 $y(4)=8$.
- 在 $(4,8]$ 上, $y=8$ 是常数函数.
- 在 $(8,12]$ 上, $y=2(12-x)$ 是减函数, 其值域为 $[0,8)$.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

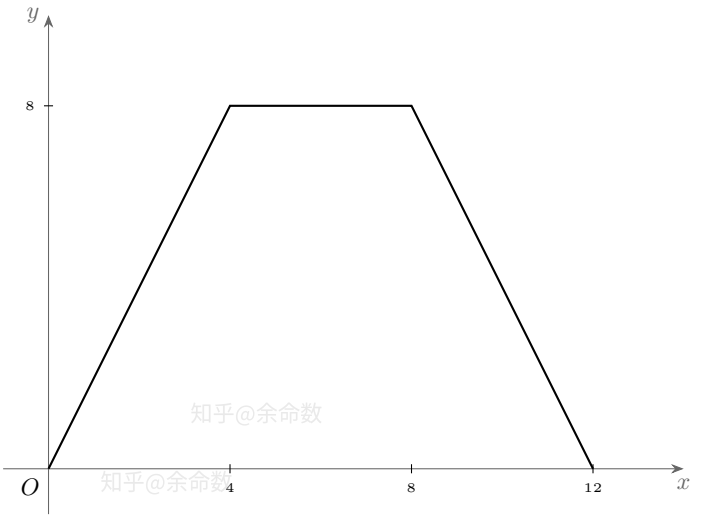


图 3.32　面积函数 $y(x)$ 的图像

通过分析各段的值域并结合图像, 函数 y 的最大值为 8. 这个最大值在 $x=4$ 时首次达到, 并一直保持到 $x=8$. 因此, 当面积最大时, x 的取值范围是 $[4,8]$.

例题 3.65　某市空调公共汽车的票价按下列规则制定:

1. 乘坐汽车 5 km 以内, 票价 2 元;
2. 5 km 以上, 每增加 5 km, 票价增加 1 元(不足 5 km 的按 5 km 计算).

已知两个相邻的公共汽车站间相距约为 1 km, 如果沿途(包括起点站和终点站)设 20 个汽车站, 请根据题意写出票价与里程之间的函数解析式.

解　首先, 我们确定函数的自变量和因变量. 设乘客乘坐的里程为 x (km), 对应的票价为 y(元).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

接着, 我们确定自变量 x 的取值范围. 线路共有 20 个站, 站间距为 1 km, 因此总里程为 $(20-1)\times 1=19$ km. 乘客乘坐的里程 x 的范围是 $(0,19]$.

然后, 我们根据计价规则, 将定义域 $(0,19]$ 分割成不同的计价区间. 计价规则以 5 km 为一个台阶.

区间一: $0<x\leq 5$. 根据规则 (1), 在此里程范围内, 票价固定为 2 元.

区间二: $5<x\leq 10$. 里程超过 5 km, 进入增价层级 A. 根据规则 (2), 票价在 2 元的基础上增加 1 元. 票价为 $2+1=3$ 元.

区间三: $10<x\leq 15$. 里程超过 10 km, 进入增价层级 B. 票价在 3 元的基础上再增加 1 元. 票价为 $3+1=4$ 元.

区间四: $15<x\leq 19$. 里程超过 15 km, 进入增价层级 C. 票价在 4 元的基础上再增加 1 元. 票价为 $4+1=5$ 元.

把上述各区间的结果合并, 我们得到票价 y 关于里程 x 的分段函数解析式

$$y=f(x)=\begin{cases}2, & 0<x\leq 5\\ 3, & 5<x\leq 10\\ 4, & 10<x\leq 15\\ 5, & 15<x\leq 19\end{cases}$$

这是一个阶梯函数.

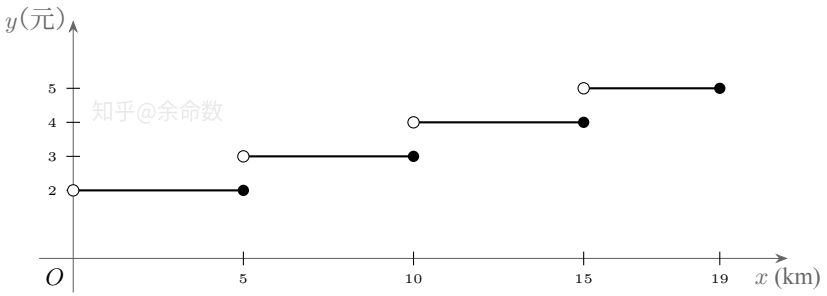


图 3.33 公交票价函数图像

例题 3.66 设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a\\ (x-2)^2, & x\geq a\end{cases}$. 若 $f(x)$ 存在最小值, 求实数 a 的最大值.

解 我们分析函数在不同参数 a 下的形态, 并确定它是否存在一个全局最小值. 函数的表达式由线性部分与二次函数部分构成, 其整体行为取决于分段点 a 的位置. 我们对 a 的取值进行分类讨论.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

情形一： $a<0$. 此时, 线性部分 $y=-ax+1$ 的斜率 $-a$ 大于零, 函数在区间 $(-\infty,a)$ 上单调递增. 当 $x\to-\infty$ 时, $f(x)\to-\infty$. 函数无下界, 因此不存在最小值.

情形二： $a=0$. 此时函数为 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ (x-2)^2, & x\geq 0\end{cases}$. 在区间 $(-\infty,0)$ 上, 函数值为常数 1. 在区间 $[0,+\infty)$ 上, 函数 $y=(x-2)^2$ 在 $x=2$ 处取得最小值 0. 因此, 函数 $f(x)$ 的最小值为 0. 故 $a=0$ 是一个可能的值.

情形三： $a>0$. 此时, 线性部分 $y=-ax+1$ 的斜率 $-a$ 小于零, 函数在区间 $(-\infty,a)$ 上单调递减.

我们根据分段点 a 与抛物线顶点 $x=2$ 的相对位置, 进一步细分.

子情形 3a: $0<a<2$. 函数在 $(-\infty,a)$ 上单调递减, 其值的下确界为 $\lim_{x\to a^-}f(x)=-a^2+1$. 在 $[a,+\infty)$ 上, 函数 $y=(x-2)^2$ 先递减后递增, 在 $x=2$ 处取得最小值 0. 要使函数存在全局最小值, 函数必须有下界, 即当 x 从左侧趋近于 a 时, 函数值不能趋于一个比全局最小值更小的值. 若 $-a^2+1<0$, 则函数在 $(-\infty,a)$ 上的下确界为负, 且无法取到, 故不存在最小值. 因此, 必须满足 $-a^2+1\geq 0$, 即 $a^2\leq 1$. 结合本情形的假设 $a>0$, 得 $0<a\leq 1$.

子情形 3b: $a\geq 2$. 函数在 $(-\infty,a)$ 上单调递减. 在 $[a,+\infty)$ 上, 由于 $a\geq 2$, 函数 $y=(x-2)^2$ 是单调递增的. 因此, 函数的图像在 $x=a$ 点处可能存在一个最低点. 函数的下确界为 $\min(\lim_{x\to a^-}f(x),f(a))=\min(-a^2+1,(a-2)^2)$. 为使最小值存在, 该下确界必须在 $x=a$ 处取到, 即 $f(a)\leq\lim_{x\to a^-}f(x)$.

知乎@余命数

$$(a-2)^2\leq -a^2+1$$

整理得 $a^2-4a+4\leq -a^2+1$, 即 $2a^2-4a+3\leq 0$. 此二次多项式的判别式 $\Delta=(-4)^2-4(2)(3)=16-24=-8<0$. 由于该二次多项式的开口向上, 故 $2a^2-4a+3$ 恒为正. 不等式 $2a^2-4a+3\leq 0$ 无解. 因此, 在 $a\geq 2$ 的情况下, 函数不存在最小值.

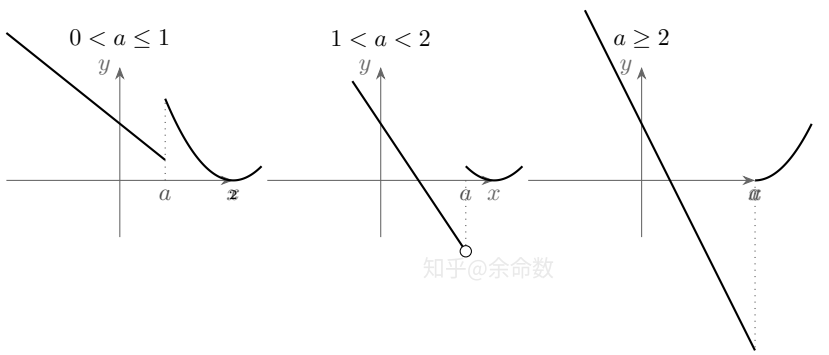


图 3.34　不同 a 值下函数图像形态示意

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

综合所有情形, 函数 $f(x)$ 存在最小值的条件是 $a \in [0,1]$. 因此, 实数 a 的最大值为 1.

例题 3.67 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le a \\ x^2-2ax+a, & x>a \end{cases}$. 若存在实数 b, 使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点, 则 a 的取值范围为_____.

解 函数 $g(x)$ 有 3 个零点, 等价于方程 $f(x)=b$ 有 3 个不同的实数根. 这在几何上等价于存在一条水平直线 $y=b$, 与函数 $y=f(x)$ 的图像有 3 个不同的交点.

为产生 3 个交点, 函数 $f(x)$ 的图像必须存在峰与谷, 即非单调. 我们先分析函数 $f(x)$ 的结构.

在 $x=a$ 处,函数的左值为 $f(a)=a^2$. 其右极限为 $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}(x^2-2ax+a)=a^2-2a^2+a=a-a^2$.

我们对参数 a 进行分类讨论.

情形一: $a \le 0$. 当 $x \le a$ 时, $f(x)=x^2$ 在此区间上单调递减. 当 $x>a$ 时, $f(x)=x^2-2ax+a=(x-a)^2+a-a^2$. 这是一个顶点在 $x=a$ 的开口向上的抛物线, 故在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. 函数图像的整体形态是先下降后上升, 任何水平直线至多与其有两个交点. 因此此情形不满足条件.

情形二: $a>0$. 当 $x \le a$ 时, $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减, 在 $[0,a]$ 上单调递增. 函数在 $x=0$ 处取得一个局部最小值 $f(0)=0$. 当 $x>a$ 时, $f(x)=(x-a)^2+a-a^2$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

函数 $f(x)$ 的整体图像形态如下. 它从 $+\infty$ 下降至 $(0,0)$, 再上升至分段点 (a,a^2), 然后在 $x=a$ 处发生一个跳跃, 从 $(a,a-a^2)$ 开始继续上升至 $+\infty$.

要使水平直线 $y=b$ 能与图像产生 3 个交点, 它必须同时穿过位于 $(0,a)$ 区间的上升段与位于 $(a,+\infty)$ 区间的上升段. 这要求在分段点 $x=a$ 处发生一个向下的跳跃, 从而形成一个局部的峰与谷.

这个向下的跳跃的代数条件是, 函数在分段点左侧的值大于其右极限.

$$f(a) > \lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$a^2 > a-a^2$$

整理得 $2a^2-a>0$, 即 $a(2a-1)>0$.

结合本情形的假设 $a>0$, 上述不等式等价于 $2a-1>0$, 即 $a>1/2$.

当 $a>1/2$ 时, 确有 $a^2>a-a^2$. 此时, 可选取满足 $b>a-a^2$ 且 $0<b<a^2$ 的 b 值, 使水平直线 $y=b$ 与左段 $y=x^2$ 有两个交点, 与右段抛物线有一个交点, 从而产生 3 个交点.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

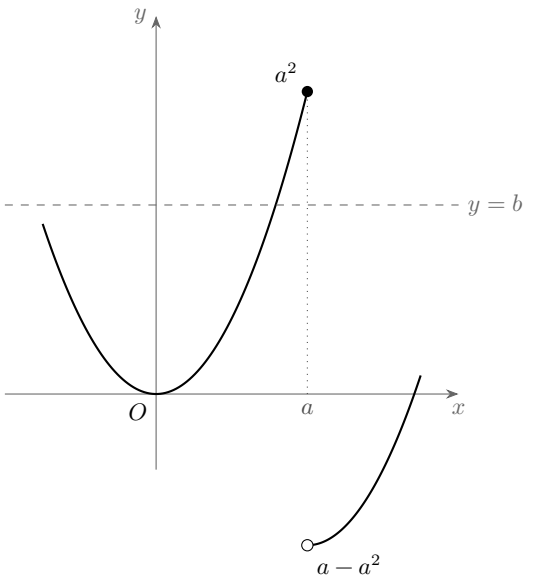


图 3.35　当 $a>1/2$ 时, 函数图像形态与水平线 $y=b$

反之, 若 $0<a\leq 1/2$, 则 $a^2\leq a-a^2$. 函数在 $x=0$ 之后是单调不减的, 任何水平直线至多有两个交点.

因此,函数 $g(x)$ 有 3 个零点存在的条件是 $a>1/2$. 故 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

例题 3.68　设 a 为实数, 函数 $f(x)=(x-a)^2+|x-a|-a|a-1|$.

1. 若 $f(0)>1$, 求 a 的取值范围;
2. 讨论 $f(x)$ 的单调性;
3. 当 $a>2$ 时, 讨论 $f(x)+|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上的零点个数.

证明 (1) 由函数表达式, $f(0)=(0-a)^2+|0-a|-a|a-1|=a^2+|a|-a|a-1|$. 条件 $f(0)>1$ 即 $a^2+|a|-a|a-1|>1$. 我们根据 a 的取值对绝对值进行分段讨论.

若 $a\geq 1$, 不等式为 $a^2+a-a(a-1)>1$, 即 $a^2+a-a^2+a>1$, 整理得 $2a>1$, 解得 $a>1/2$. 与 $a\geq 1$ 求交集, 得 $a\geq 1$.

若 $0\leq a<1$, 不等式为 $a^2+a-a(-(a-1))>1$, 即 $a^2+a+a^2-a>1$, 整理得 $2a^2>1$, 解得 $a>1/\sqrt{2}$ 或 $a<-1/\sqrt{2}$. 与 $0\leq a<1$ 求交集, 得 $1/\sqrt{2}<a<1$.

若 $a<0$, 不等式为 $a^2-a-a(-(a-1))>1$, 即 $a^2-a+a^2-a>1$, 整理得 $2a^2-2a-1>0$. 该二次不等式的解为 $a>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 或 $a<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. 与 $a<0$ 求交集, 得 $a<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

因此, a 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1-\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$.

知乎@余命数

(2) 函数 $f(x)$ 可视为复合函数. 令 $t=|x-a|$, 则 $t\geq 0$. 原函数可表示为关于 t 的函数 $h(t)=t^2+t-a|a-1|$. 这是一个开口向上的二次函数, 对称轴为 $t=-1/2$. 由于 $t\geq 0$, 函数 $h(t)$ 在其定义域 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增.

内层函数 $t(x)=|x-a|$ 在区间 $(-\infty,a]$ 上单调递减, 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调递增. 根据复合函数单调性法则, 在区间 $(-\infty,a]$ 上, 内层函数递减而外层函数递增, 故 $f(x)$ 单调递减. 在区间 $[a,+\infty)$ 上, 内层函数递增而外层函数递增, 故 $f(x)$ 单调递增.

(3) 设 $g(x)=f(x)+|x|$. 当 $a>2$ 时, 我们讨论方程 $g(x)=0$ 的根的个数. 根据绝对值的零点 $x=0$ 和 $x=a$ 将函数写为分段形式.

当 $x<0$ 时, $g(x)=(x-a)^2-(x-a)-a(a-1)-x=x^2-(2a+2)x+2a$. 当 $0\leq x<a$ 时, $g(x)=(x-a)^2-(x-a)-a(a-1)+x=x^2-2ax+2a$. 当 $x\geq a$ 时, $g(x)=(x-a)^2+(x-a)-a(a-1)+x=x^2-(2a-2)x$.

我们分析函数 $g(x)$ 的单调性. 在 $(-\infty,0)$ 上, $g'(x)=2x-(2a+2)$. 由于 $x<0, a>2$, 有 $g'(x)<0$, 函数单调递减. 在 $(0,a)$ 上, $g'(x)=2x-2a=2(x-a)$. 由于 $x<a$, 有 $g'(x)<0$, 函数单调递减. 在 $(a,+\infty)$ 上, $g'(x)=2x-(2a-2)=2(x-(a-1))$. 由于 $x>a>a-1$, 有 $g'(x)>0$, 函数单调递增.

因此, 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减, 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增. 于是 $g(x)$ 在 $x=a$ 处取得全局最小值.

我们计算几个关键点的函数值. $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$. $g(0)=0^2-2a(0)+2a=2a$. 由于 $a>2$, 有 $g(0)>0$. $g(a)=a^2-(2a-2)a=-a^2+2a=-a(a-2)$. $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

零点的个数取决于最小值 $g(a)$ 的符号.

由于 $a>2$, 有 $g(a)=-a(a-2)<0$. 又 $g(0)=2a>0$, 且 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递减, 故函数在 $(0,a)$ 上恰有一个零点. 在 $(-\infty,0]$ 上, 函数由 $+\infty$ 单调递减到正数 $2a$, 因而没有零点. 在 $[a,+\infty)$ 上, 函数由负数 $g(a)$ 单调递增到 $+\infty$, 故在 $(a,+\infty)$ 上恰有一个零点.

因此, 当 $a>2$ 时, $g(x)=f(x)+|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒有 2 个零点. □

3.17 绝对值函数

绝对值是代数运算的基本工具, 也是距离这一几何概念的代数表达. 本节我们定义绝对值函数, 并讨论它的图像、性质与含绝对值的方程和不等式.

3.17.1 绝对值的定义与基本性质

我们先从代数定义出发.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 3.20 (绝对值) 实数 x 的**绝对值**, 记作 $|x|$, 定义为如下分段函数.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

此定义的直接几何诠释是, $|x|$ 表示实数 x 在数轴上对应的点到原点的**距离**. 类似地, $|x-a|$ 表示数 x 与数 a 在数轴上对应点之间的距离. 这一几何观点常常用于化解复杂的绝对值问题.

由定义可直接导出绝对值的几个基本性质.

定理 3.29 (绝对值的基本性质) 对于任意实数 x, y, 以下性质恒成立.

1. **非负性**: $|x| \geq 0$.
2. **正定性**: $|x| = 0 \iff x = 0$.
3. **积性**: $|xy| = |x||y|$.
4. **三角不等式**: $|x+y| \leq |x| + |y|$. 等号成立的充要条件是 $xy \geq 0$.

知乎@余命数

证明 非负性由绝对值的定义立即得到. 若 $|x| = 0$, 则按定义只能有 $x = 0$; 反之 $x = 0$ 时 $|x| = 0$, 故正定性成立.

对于积性, $|xy|$ 与 $|x||y|$ 都非负, 且

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2.$$

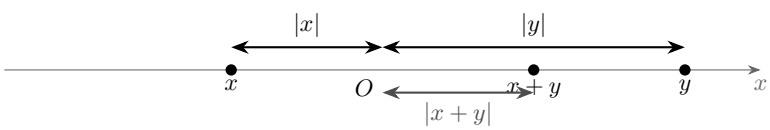
知乎@余命数

两个非负数平方相等, 因而 $|xy| = |x||y|$.

对于三角不等式, 因为 $|x+y|$ 与 $|x| + |y|$ 都非负, 我们只需比较平方.

$$(|x| + |y|)^2 - |x+y|^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 - (x+y)^2 = 2(|x||y| - xy) \geq 0.$$

因此 $|x+y| \leq |x| + |y|$. 等号成立当且仅当 $|x||y| = xy$, 这等价于 $xy \geq 0$. □



几何直观: 从原点出发, 先走 $|x|$ 再走 $|y|$ 的总路程, 不会小于直接到达终点 $x+y$ 的位移大小 $|x+y|$.

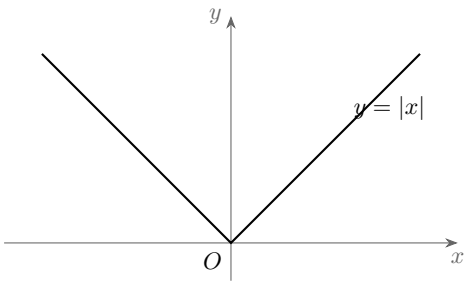
知乎@余命数

图 3.36　三角不等式的数轴诠释

知乎@余命数

3.17.2 绝对值函数图像与性质

函数 $f(x)=|x|$ 是最基本的分段函数之一, 其图像与性质是分析更复杂绝对值函数的基础.



图像呈 V 形, 关于 y 轴对称(偶函数).
在 $(-\infty,0]$ 上单调递减, 在 $[0,\infty)$ 上单调递增.
在原点处存在一个**尖点**, 函数在该点连续但不可导.

图 3.37 函数 $y=|x|$ 的图像

知乎@余命数

3.17.3 含绝对值的方程与不等式

求解含绝对值的方程与不等式时, 我们先化去绝对值. 常用的方法是**零点分段讨论法**, 它直接来自绝对值的定义.

该方法的步骤如下.

1. 找出所有绝对值符号内部表达式的零点.
2. 这些零点将整个实数轴划分为若干个开区间.
3. 在每个开区间内, 所有绝对值符号内部表达式的符号恒定, 从而可以去掉绝对值符号, 将原方程, 或不等式转化为一个不含绝对值的常规问题.
4. 分别求解各个区间上的问题, 并将解集与该区间的范围求交集, 得到该区间内的有效解.
5. 将所有区间上的有效解合并, 得到原问题的完整解集.

例题 3.69 求解不等式 $|2x-1|<x+2$.

解 我们先确定讨论的零点. 令绝对值内部的表达式 $2x-1=0$, 解得 $x=1/2$. 此点将实数轴划分为两个区间 $(-\infty,1/2)$ 和 $[1/2,+\infty)$.

情形一: $x\geq 1/2$. 在此区间内, $2x-1\geq 0$, 故 $|2x-1|=2x-1$. 原不等式转化为 $2x-1<x+2$, 解得 $x<3$. 将此解与本情形的约束 $x\geq 1/2$ 求交集, 得到该区间的解为 $[1/2,3)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

情形二：$x<1/2$. 在此区间内，$2x-1<0$，故 $|2x-1|=-(2x-1)=1-2x$. 原不等式转化为 $1-2x<x+2$，解得 $-1<3x$，即 $x>-1/3$. 将此解与本情形的约束 $x<1/2$ 求交集，得到该区间的解为 $(-1/3,1/2)$.

最后，我们将两个情形下得到的解集合并，得

$$[1/2,3)\cup(-1/3,1/2)=(-1/3,3)$$

故原不等式的解集为 $(-1/3,3)$.

对于特定形式的绝对值问题，也存在一些更简洁的等价转化.

- $|f(x)|<a$ $(a>0)$ 等价于 $-a<f(x)<a$.
- $|f(x)|>a$ $(a>0)$ 等价于 $f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$.
- $|f(x)|=|g(x)|$ 等价于 $f(x)^2=g(x)^2$，也等价于 $(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=0$.

导数讨论含绝对值参数

知乎@余命数

例题 3.70　已知函数 $f(x)=-x\ln x+ax$ 在 $(0,e)$ 上是增函数，函数 $g(x)=|e^x-a|+\frac{a^2}{2}$ 在 $x\in[0,\ln 3]$ 上的最大值 M 与最小值 m 的差为 $\frac{3}{2}$. 求 a 的值.

解　两个条件彼此独立，分头处理.

先看 f 的单调性.$f'(x)=a-1-\ln x$.f 在 $(0,e)$ 上递增要求 $f'\geq 0$ 恒成立，即 $a\geq 1+\ln x$ 对一切 $x\in(0,e)$ 成立. $1+\ln x$ 在 $(0,e)$ 上递增，上界为 2，故必须 $a\geq 2$.

再看 $g(x)=|e^x-a|+\frac{a^2}{2}$ 在 $[0,\ln 3]$ 上的极值差. 绝对值零点为 $x=\ln a$；由 $a\geq 2$ 知 $\ln a\geq\ln 2>0$，且 g 在 $\ln a$ 左侧递减、右侧递增，最小值在 $x=\ln a$ 取得. 按 $\ln a$ 与 $[0,\ln 3]$ 的相对位置分类.

情形一：$a\geq 3$，即 $\ln a\geq\ln 3$. 此时 $\ln a$ 在区间右侧，g 在 $[0,\ln 3]$ 上递减，

$$M=g(0)=a-1+\frac{a^2}{2},\quad m=g(\ln 3)=a-3+\frac{a^2}{2},$$

$M-m=2\neq\frac{3}{2}$，矛盾.

情形二：$2\leq a<3$. 此时 $\ln a\in(0,\ln 3)$，g 在 $[0,\ln a]$ 递减、在 $[\ln a,\ln 3]$ 递增，最小值 $m=\frac{a^2}{2}$. 最大值取自端点：$g(0)=a-1+\frac{a^2}{2}$，$g(\ln 3)=3-a+\frac{a^2}{2}$，且 $g(0)-g(\ln 3)=2a-4\geq 0$，故 $M=g(0)$. 由 $M-m=\frac{3}{2}$ 得 $a-1=\frac{3}{2}$，$a=\frac{5}{2}$. 该值落在 $[2,3)$ 内，有效.

故 $a=\frac{5}{2}$.

知乎@余命数

3.17.4 距离和的最小值

绝对值函数的组合可以构造出一些优化问题中的经典模型. 其中最经典的是求解动点到若干定点距离之和的最小值问题.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.71 求函数 $f(x)=|x-1|+|x-3|$ 的最小值.

解 从几何的观点看, $f(x)$ 表示数轴上动点 x 到两个定点 1 和 3 的距离之和. 直观上, 当动点 x 位于两个定点之间时, 其距离之和恰好等于两定点间的距离, 此时应取得最小值. 我们用代数方法严格证明这一猜想.

以两个零点 $x=1$ 和 $x=3$ 为分界, 我们对 x 的取值进行分段讨论.

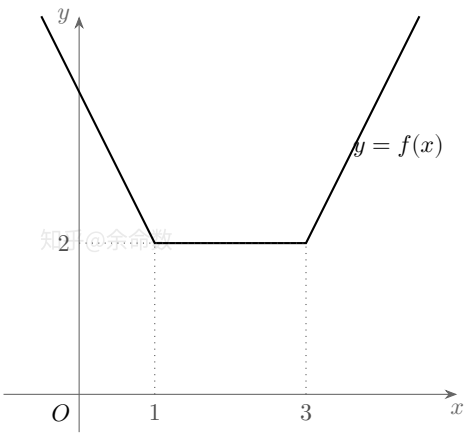
情形一: $x\le 1$. 此时 $x-1\le 0, x-3<0$. $f(x)=-(x-1)-(x-3)=-2x+4$. 这是一个单调递减的函数.

情形二: $1<x<3$. 此时 $x-1>0, x-3<0$. $f(x)=(x-1)-(x-3)=2$. 函数在此区间上为常数.

情形三: $x\ge 3$. 此时 $x-1>0, x-3\ge 0$. $f(x)=(x-1)+(x-3)=2x-4$. 这是一个单调递增的函数.

知乎@余命数

把三段的分析合起来, 函数 $f(x)$ 的图像先下降, 然后在区间 $[1,3]$ 上保持为常数 2, 之后再上升. 因此, 函数的最小值为 2, 且在闭区间 $[1,3]$ 上的任意一点均可取得.



最小值在区间 $[1,3]$ 上取得

图 3.38 函数 $y=|x-1|+|x-3|$ 的图像

此例可以推广到更一般的情形. 对于函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|$, 其几何意义是动点 x 到 n 个定点 $a_1,\dots,a_n$ 的距离之和. 可以证明, 该函数的最小值在诸 a_i 的**中位数**处取得.

3.17.5 两点距离模型

函数 $f(x)=|x-1|+|x-3|$ 的图像形态具有一般性. 我们系统地考察两类与数轴上两点距离相关的函数模型.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

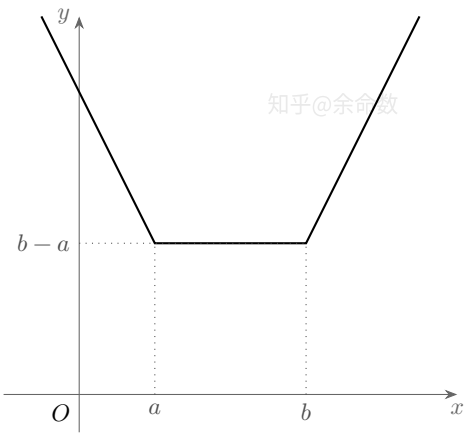
3.17.5.1 距离和模型

考虑函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|$, 其中 $a<b$. 此函数可视为数轴上动点 x 到两定点 a,b 的距离之和. 通过零点分段讨论, 我们得到其分段表达式

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a+b, & x<a\\ b-a, & a\le x\le b\\ 2x-a-b, & x>b\end{cases}$$

函数图像由两条射线和一个水平线段构成, 形似平底锅. 其最小值为 $b-a$, 在区间 $[a,b]$ 上取得.

知乎@余命数



知乎@余命数

图 3.39　函数 $y=|x-a|+|x-b|$ 的图像(平底锅图像)

3.17.5.2 距离差模型

与距离和模型对应, 我们考察距离差模型 $g(x)=|x-a|-|x-b|$, 其中 $a<b$. 其分段表达式为

$$g(x)=\begin{cases}a-b, & x<a\\ 2x-a-b, & a\le x\le b\\ b-a, & x>b\end{cases}$$

知乎@余命数

函数图像由两条水平射线和一条斜率为 2 的线段构成. 函数的值域为 $[a-b,b-a]$.

3.17.6 作为范数的绝对值

对绝对值概念进行抽象和推广, 就得到近代数学中的**范数**. 在一个向量空间中, 范数是为每个向量赋予一个长度或大小的函数. 绝对值 $|x|$ 正是定义在一维实向量空间 $\mathbb{R}^1$ 上的范数. 我们之前列出的绝对值的基本性质, 是范数定义的三个公理.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

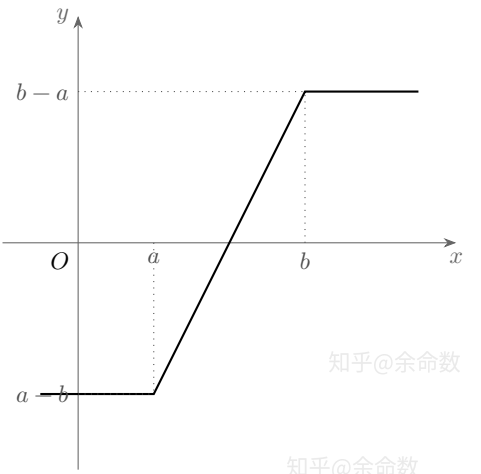


图 3.40 函数 $y=|x-a|-|x-b|$ 的图像(破锅图像)

- **正定性**:$\|v\|\geq 0$, 且 $\|v\|=0 \iff v=0$.
- **齐次性**:$\|\lambda v\|=|\lambda|\|v\|$(这推广了积性).
- **三角不等式**:$\|u+v\|\leq \|u\|+\|v\|$.

例如, 在二维平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 一个向量 $\mathbf{v}=(x,y)$ 的欧几里得范数, 或称模长定义为 $\|\mathbf{v}\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$, 它同样满足上述三条公理. 这正是绝对值概念在更高维度上的自然推广.

3.18 函数解析式的求解

本节研究如何由已知条件确定一个函数的解析式. 已知条件可能是函数方程, 可能是图像经过的点, 也可能是奇偶性、周期性等内在性质. 我们根据这些条件的结构, 把它们转写成关于函数表达式的代数方程, 再求出这个表达式.

3.18.1 待定系数法, 当函数类型已知时

若题设已经指明函数是一次函数、二次函数或指数函数等, 那么解析式的结构便已确定, 未知的只是若干系数. 我们利用给定条件建立关于这些待定系数的方程组, 再解出它们即可.

例题 3.72 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=-1$, 且其图像的对称轴为直线 $x=1$, 顶点在 x 轴下方, 与 x 轴两交点间的距离为 4. 求 $f(x)$ 的解析式.

解 我们先把几何信息转成代数约束. 对称轴 $x=1$ 提示用顶点式, 设 $f(x)=a(x-1)^2+k$ $(a\neq 0)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

与 x 轴两交点距离为 4, 且交点关于 $x=1$ 对称, 故两根横坐标 x_1, x_2 满足 $|x_1-x_2|=4$ 与 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$, 解得 $x_1=-1, x_2=3$. 于是也可写成两根式

$$f(x)=a(x+1)(x-3),$$

同样内含对称轴 $x=1$. 代入过点 $(2,-1)$:

$$f(2)=a(2+1)(2-3)=-3a=-1 \implies a=\frac{1}{3}.$$

故

$$f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1.$$

顶点 $(1,f(1))=(1,-\frac{4}{3})$ 在 x 轴下方, 与题设一致.

例题 3.73　已知 $f(x)$ 为二次函数, 且 $f(0)=3$, $f(x+2)-f(x)=4x+2$. 求 $f(x)$.

注 3.16 (选择恰当的函数形式)
二次函数的一般式、顶点式与两根式适用于不同的已知条件. 我们按已知信息选择计算量最小的形式.

解　函数类型已知为二次函数, 我们设其一般形式为 $f(x)=ax^2+bx+c$.

由 $f(0)=3$, 直接得 $c=3$. 故 $f(x)=ax^2+bx+3$.

现在我们处理函数方程 $f(x+2)-f(x)=4x+2$. 先计算 $f(x+2)$, 得

$$f(x+2)=a(x+2)^2+b(x+2)+3=a(x^2+4x+4)+b(x+2)+3$$

再构造差式, 得

$$\begin{aligned} f(x+2)-f(x)&=[a(x^2+4x+4)+b(x+2)+3]-[ax^2+bx+3]\\ &=(ax^2+4ax+4a+bx+2b+3)-(ax^2+bx+3)\\ &=4ax+(4a+2b) \end{aligned}$$

根据题设, 这个差式恒等于 $4x+2$:

$$4ax+(4a+2b)=4x+2.$$

这是关于 x 的恒等式. 由多项式恒等定理, 两边同次项系数相等. 比较一次项系数得 $4a=4$, 故 $a=1$. 比较常数项得 $4a+2b=2$. 将 $a=1$ 代入, 得 $4+2b=2$, 解得 $b=-1$.

至此, 所有待定系数都已确定. 故 $f(x)=x^2-x+3$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.18.2 利用函数性质法(奇偶性、周期性与对称性)

当函数的具体类型未知,但已知它具有某种全局性质时,这个性质就把函数在定义域一部分上的值与另一部分上的值联系起来. 我们利用这个联系写出解析式.

3.18.2.1 利用奇偶性

若已知奇函数或偶函数在部分定义域上的解析式, 我们便可用其定义把它延拓到对称的另一部分定义域上.

设 $x<0$. 为了求 $f(x)$, 我们先写 $f(-x)$, 并注意 $-x>0$. 这样 $f(-x)$ 可由已知解析式求出. 再由 $f(x)=f(-x)$, 即偶函数的情形, 或 $f(x)=-f(-x)$(奇函数)即可得到 $f(x)$.

例题 3.74 设函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数,且当 $x\geq 0$ 时, $f(x)=e^x-1$. 求当 $x<0$ 时 $f(x)$ 的解析式.

解 设 $x<0$. 由奇函数定义, $f(x)=-f(-x)$.

因为 $-x>0$, 它落在已知解析式的区间 $[0,+\infty)$ 内. 将 $-x$ 代入已知表达式, 得

$$f(-x)=e^{-x}-1.$$

代回奇函数定义关系式, 得

$$f(x)=-f(-x)=-(e^{-x}-1)=1-e^{-x}.$$

此式对所有 $x<0$ 成立. 在 $x=0$ 处, 奇函数要求 $f(0)=0$, 而已知式给出 $f(0)=e^0-1=0$, 两者一致.

故函数 $f(x)$ 的完整解析式为

$$f(x)=\begin{cases} e^x-1, & x\geq 0 \\ 1-e^{-x}, & x<0 \end{cases}$$

3.18.2.2 利用周期性

若函数 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 那么它在任何一个长度为 T 的区间上的表达式, 就决定了它在整个定义域上的行为.

对任意自变量 x, 我们总可以加上或减去整数倍的周期 T, 把它平移到已知的基准区间内. 即

$$f(x)=f(x+nT),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

我们要找一个整数 n, 使得 $x+nT$ 落入已知解析式的定义域.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.75　已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且当 $x\in[-1,1)$ 时，$f(x)=x^2$. 求当 $x\in[1,3)$ 时 $f(x)$ 的解析式.

解　条件 $f(x+2)=f(x)$ 表明 $f(x)$ 是一个周期为 2 的周期函数.

设 $x\in[1,3)$. 为了使用 $[-1,1)$ 上的已知解析式，我们把它平移，考虑 $x-2$. 当 $x\in[1,3)$ 时，$x-2\in[-1,1)$.

由周期性，$f(x)=f(x-2)$. 由于 $x-2$ 落在已知解析式的区间，代入 $f(t)=t^2$（取 $t=x-2$），得

$$f(x-2)=(x-2)^2.$$

因此，当 $x\in[1,3)$ 时，

$$f(x)=(x-2)^2=x^2-4x+4.$$

3.18.3　换元法与配凑法（处理复合函数）

当已知条件涉及复合函数，例如给出 $f(g(x))$ 的表达式而要求解 $f(x)$ 时，目标是消去内层函数 $g(x)$ 的影响，还原外层函数 f 对其自变量的作用. 实现这一目标的标准方法是换元法.

我们的做法是，把内层函数设为新的变量 $t=g(x)$. 变量 t 的取值范围就是 $f(t)$ 的定义域. 然后我们把右侧的表达式用 t 表示，通常是从 $t=g(x)$ 反解出 x 并代入. 最后把 $f(t)$ 中的 t 换为 x，就得到所求的解析式.

例题 3.76　已知函数 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$ 的解析式.

解　令 $t=\sqrt{x}+1$.

新变量 t 的取值范围由 $\sqrt{x}\geq 0$ 决定，故 $t\geq 1$.

从 $t=\sqrt{x}+1$ 反解出 $\sqrt{x}=t-1$，进而 $x=(t-1)^2$. 代入已知函数方程，得

$$f(t)=(t-1)^2+2(t-1).$$

展开化简，得

$$f(t)=(t^2-2t+1)+(2t-2)=t^2-1.$$

因此 $f(t)=t^2-1$，其中 $t\geq 1$. 换回变量 x，得

$$f(x)=x^2-1,\quad x\in[1,+\infty).$$

有时，从 $t=g(x)$ 中反解 x 是困难的或不便的. 此时我们直接看右侧表达式能否写成关于 $g(x)$ 的代数组合. 这种技巧称为配凑法.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.77 已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$, 求 $f(x)$.

解 令 $t=x+\frac{1}{x}$. 不必反解 x, 我们直接处理右侧 $x^3+\frac{1}{x^3}$. 由恒等式 $(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$,

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=t^3-3t.$$

故 $f(t)=t^3-3t$. 又 $x+\frac{1}{x}$ 的值域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, 因而换元后的函数定义域为 $|x|\geq 2$, 解析式为 $f(x)=x^3-3x$.

例题 3.78 若 $f(\sin x)=2-\cos(2x)$, 则 $f(\cos x)=(\quad)$.

解 我们分两步. 先由已知关系求出 $f(x)$, 再把 $\cos x$ 代入所得解析式.

令 $t=\sin x$. 由于 $x\in\mathbb{R}$, 新变量 t 的取值范围是 $[-1,1]$.

把 $2-\cos(2x)$ 用 t 表示. 由二倍角公式, $\cos(2x)=1-2\sin^2 x$. 代入原方程, 得

$$f(\sin x)=2-(1-2\sin^2 x)=1+2\sin^2 x.$$

用 t 替换 $\sin x$, 得

$$f(t)=1+2t^2,\quad t\in[-1,1].$$

因此 $f(x)=1+2x^2$, 定义域为 $[-1,1]$.

现在计算 $f(\cos x)$. 将 x 替换为 $\cos x$, 得

$$f(\cos x)=1+2\cos^2 x.$$

再用二倍角公式 $2\cos^2 x=1+\cos(2x)$, 得

$$f(\cos x)=1+(1+\cos(2x))=2+\cos(2x).$$

故 $f(\cos x)=2+\cos(2x)$.

例题 3.79 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式为 $(\quad)$.

解 令 $t=\frac{1-x}{1+x}$.

我们从这个关系式中反解 x. 由

$$t(1+x)=1-x$$

$$t+tx=1-x$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$tx + x = 1 - t$$

$$x(t+1) = 1 - t$$

得

$$x = \frac{1-t}{1+t}.$$

将 $x = \frac{1-t}{1+t}$ 代入 $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, 得

$$1 - x^2 = 1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 = \frac{(1+t)^2 - (1-t)^2}{(1+t)^2} = \frac{4t}{(1+t)^2}$$

$$1 + x^2 = 1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2 = \frac{(1+t)^2 + (1-t)^2}{(1+t)^2} = \frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}$$

知乎@余命数

两式相除, 得

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{4t/(1+t)^2}{2(1+t^2)/(1+t)^2} = \frac{4t}{2(1+t^2)} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

知乎@余命数

因此 $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$. 由于 $t = \frac{1-x}{1+x}$ 不可能取到 -1, 该解析式在 $t \neq -1$ 的范围内确定.

知乎@余命数

将自变量换回 x, 得到 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $(x \neq -1)$.

3.18.4 方程组法(利用对称性与对合关系)

当未知函数 $f(x)$ 出现在一个包含 $f(-x)$ 或 $f(1/x)$ 等项的方程中时, 我们可以对自变量作代换, 构造出另一个方程, 形成一个方程组. 把 $f(x)$ 等视为未知量, 解这个方程组就得到 $f(x)$.

这里的代换 $x \to -x$ 和 $x \to 1/x$ 都具有对合性质, 即连续施行两次就回到原变量. 我们常用它们来构造方程组.

例题 3.80　设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f(-x) = 3x + 4$, 求 $f(x)$ 的解析式.

解　方程中同时出现 x 与 $-x$. 我们将原方程中的 x 换为 $-x$, 得到一个新方程.

将 x 替换为 $-x$, 原方程变为

$$2f(-x) + f(-(-x)) = 3(-x) + 4.$$

化简得

知乎@余命数

$$2f(-x) + f(x) = -3x + 4.$$

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将原方程与这个新方程联立, 得到关于 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的二元一次方程组

$$\begin{cases} 2f(x)+f(-x)=3x+4 & (1) \\ f(x)+2f(-x)=-3x+4 & (2) \end{cases}$$

为消去 $f(-x)$, 将方程 (1) 两边乘以 2, 再减去方程 (2):

$$(4f(x)+2f(-x))-(f(x)+2f(-x))=2(3x+4)-(-3x+4)$$

$$3f(x)=(6x+8)-(-3x+4)=9x+4$$

解得 $f(x)=3x+\frac{4}{3}$.

例题 3.81 已知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$, 满足 $3f(x)+5f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}+1$. 求函数 $f(x)$.

解 此方程涉及 $f(x)$ 与 $f(1/x)$, 且代换 $x \to 1/x$ 具有对合性.

将原方程记为 (1):

$$3f(x)+5f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}+1 \quad (1)$$

在方程 (1) 中, 将所有 x 替换为 $1/x$, 得到新方程 (2):

$$3f\left(\frac{1}{x}\right)+5f(x)=3x+1 \quad (2)$$

将 $f(x)$ 和 $f(1/x)$ 视为未知量, 联立方程组

$$\begin{cases} 3f(x)+5f(1/x)=3/x+1 \\ 5f(x)+3f(1/x)=3x+1 \end{cases}$$

为消去 $f(1/x)$, 将 (1) 式乘以 3, (2) 式乘以 5:

$$9f(x)+15f(1/x)=9/x+3$$

$$25f(x)+15f(1/x)=15x+5$$

两式相减, 得到 $16f(x)=(15x+5)-(9/x+3)=15x-9/x+2$.

故 $f(x)=\frac{15}{16}x-\frac{9}{16x}+\frac{1}{8}$.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

例题 3.82　已知函数 $f(x)$ 对定义域 $\{x \mid x \neq 0\}$ 内的任意实数 x 满足 $f(x) - 2f\left(\frac{2}{x}\right) = 4x$, 则 $f(x) = (\quad)$.

解　此方程涉及 $f(x)$ 与 $f(2/x)$. 若令 $g(x) = 2/x$, 则 $g(g(x)) = 2/(2/x) = x$, 因此代换 $x \to 2/x$ 同样是对合的.

原方程为

$$f(x) - 2f\left(\frac{2}{x}\right) = 4x \quad (1)$$

将 x 替换为 $2/x$:

$$f\left(\frac{2}{x}\right) - 2f\left(\frac{2}{2/x}\right) = 4\left(\frac{2}{x}\right).$$

化简得

$$f\left(\frac{2}{x}\right) - 2f(x) = \frac{8}{x} \quad (2)$$

知乎@余命数

联立方程组

$$\begin{cases} f(x) - 2f(2/x) = 4x \\ -2f(x) + f(2/x) = 8/x \end{cases}$$

为消去 $f(2/x)$, 将 (2) 式乘以 2, 再与 (1) 式相加:

$$(f(x) - 2f(2/x)) + (-4f(x) + 2f(2/x)) = 4x + 2\left(\frac{8}{x}\right)$$

$$-3f(x) = 4x + \frac{16}{x}$$

解得 $f(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3x}$.

知乎@余命数

3.18.5 赋值法与递推(探索函数方程)

有时我们无法预知函数类型. 这时我们可以通过给变量赋特殊值来简化方程, 逐步发现函数的性质或递推关系. 这些值可以是 $0, 1, -1$, 也可以令 $y = x$ 或 $y = -x$ 等.

例题 3.83　已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 均满足 $f(x+y) = f(x)+f(y)+2xy$, 且 $f(1) = 1$. 若 $f(x)$ 为多项式函数, 求 $f(x)$ 的解析式.

解　这是一个柯西型函数方程. 我们用特殊赋值探寻它的结构.

令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = f(0) + f(0) + 0$, 故 $f(0) = 0$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $y=-x$,得 $f(0)=f(x)+f(-x)-2x^2$. 由于 $f(0)=0$,故 $f(x)+f(-x)=2x^2$.

令 $y=1$,得 $f(x+1)=f(x)+f(1)+2x$. 代入 $f(1)=1$,得一阶差分方程

$$f(x+1)-f(x)=2x+1.$$

我们考察函数在整数点上的取值. $f(0)=0$. $f(1)=1$. $f(2)=f(1)+2(1)+1=1+3=4$. $f(3)=f(2)+2(2)+1=4+5=9$.

我们看到 $f(n)=n^2$ 对 $n=0,1,2,3$ 成立. 题设限定 $f(x)$ 为多项式函数,且差分 $f(x+1)-f(x)=2x+1$ 是一次式,因此 $f(x)$ 至多为二次多项式. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,由 $f(x+1)-f(x)=2ax+(a+b)=2x+1$ 得 $a=1,b=0$,又 $f(0)=0$ 得 $c=0$. 因而 $f(x)=x^2$.

现在验证这个结果. 原方程左侧为 $f(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$,右侧为 $f(x)+f(y)+2xy=x^2+y^2+2xy$. 两侧相等,且 $f(1)=1^2=1$ 也满足.

因此,函数的解析式为 $f(x)=x^2$.

注 3.17 (从离散到连续)
赋值法先在特殊点上给出猜想,再用代数恒等式验证它.

例题 3.84 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,且 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,$f(0)=1$. 请写出一个满足条件的函数 $f(x)$.

解 这是达朗贝尔函数方程. 我们用特殊赋值分析其性质.

令 $x=0$,得 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)=2f(y)$. 化简得 $f(-y)=f(y)$,故 $f(x)$ 是一个偶函数.

令 $y=x$,得 $f(2x)+f(0)=2(f(x))^2$. 代入 $f(0)=1$,得 $f(2x)=2(f(x))^2-1$.

这个关系式与二倍角公式 $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$ 完全相同.

我们猜测 $f(x)=\cos(\alpha x)$ 可能是一个解. 代入 $f(0)=1$ 的条件,得 $f(0)=\cos(0)=1$,满足.

现在验证它是否满足原方程. 左侧为

$$\cos(\alpha(x+y))+\cos(\alpha(x-y))=\cos(\alpha x+\alpha y)+\cos(\alpha x-\alpha y).$$

利用和差化积公式,左侧等于 $2\cos(\alpha x)\cos(\alpha y)$,右侧也是 $2\cos(\alpha x)\cos(\alpha y)$. 两侧恒等.

因此 $f(x)=\cos(\alpha x)$ 对任意实数 α 都是一个解. 题目只要求写出一个解,我们取最简单的情形 $\alpha=1$.

故一个满足条件的函数是 $f(x)=\cos x$.

例题 3.85 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x-y)=f(x)+y(y-2x+5)$,且 $f(-1)=3$. 求 $f(x)$ 的解析式.

解 方程右侧同时含有 $f(x),x,y$. 我们选取合适的赋值消去其中一个变量.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $x-y=-1$, 则 $y=x+1$. 代入原方程, 得

$$f(-1)=f(x)+(x+1)((x+1)-2x+5).$$

代入 $f(-1)=3$, 得

$$3=f(x)+(x+1)(6-x).$$

整理得

$$3=f(x)-x^2+5x+6.$$

由此解出

$$f(x)=x^2-5x-3.$$

验证: 对该函数,

$$f(x-y)-f(x)=y^2-2xy+5y=y(y-2x+5),$$

且 $f(-1)=1+5-3=3$, 满足题设.

这一步的做法是令 $x-y$ 为常数, 从而直接利用 $f(-1)=3$.

3.19 函数值域的求解

函数的值域是所有输出值构成的集合. 它说明函数在纵向上的范围, 也关系到方程与不等式的解集. 求值域分析的是必然输出, 而求定义域分析的是合法输入.

求值域要结合函数表达式的代数结构与几何特征, 选用合适的分析工具, 在代数变形的严谨性与几何直观的启发性之间建立联系.

注 3.18
可导函数在临界点取最值见 第四卷第 16 章; 本节主线是换元、配方、定义法与基本不等式.

3.19.1 观察法与基本函数

基本初等函数的值域, 是求更复杂函数值域的基础.

- 线性函数 $y=ax+b\ (a\neq 0)$: 值域为 $\mathbb{R}$.
- 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$: 值域为 $[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty)$ 当 $a>0$, 或 $(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}]$(当 $a<0$).
- 反比例函数 $y=k/x\ (k\neq 0)$: 值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
- 指数函数 $y=a^x$: 值域为 $(0,+\infty)$.
- 对数函数 $y=\log_a x$: 值域为 $\mathbb{R}$.
- 正弦与余弦函数 $y=\sin x, y=\cos x$: 值域为 $[-1,1]$.

导数求值域

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.19.2 分析法

若函数可导, 我们可用导数求它在区间上的最大值与最小值, 从而得到值域. 连续函数在闭区间上的最值必在端点或临界点处取得.

我们先求出函数的导数 $f'(x)$, 并解出所有临界点, 即 $f'(x)=0$ 的根. 再比较函数在这些临界点以及定义域端点处的函数值, 综合得出最大值与最小值.

例题 3.86 求函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在区间 $[1,4]$ 上的值域.

知乎@余命数

解 先考察函数在指定区间内的变化趋势. 其导函数为

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}.$$

在区间 $[1,4]$ 内, 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=2$. 此为区间内唯一的临界点.

只需比较函数在区间端点 $(x=1, x=4)$ 与临界点 $(x=2)$ 处的函数值:

$$f(1)=1+\frac{4}{1}=5$$

$$f(2)=2+\frac{4}{2}=4$$

$$f(4)=4+\frac{4}{4}=5$$

比较可知, 函数在区间 $[1,4]$ 上的最大值为 5, 最小值为 4. 因此, 函数的值域为 $[4,5]$.

3.19.3 代数法

我们用恒等变形把函数化成已知值域的结构, 或者把 $y=f(x)$ 看作关于 x 的方程, 用有解条件确定 y 的范围.

3.19.3.1 换元法与配方法

当函数可以视为某个中间变量的简单函数(特别是二次函数)时, 换元法便成为一种有力工具. 我们要准确地确定中间变量的取值范围, 这将成为外层函数的新定义域.

例题 3.87 求函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sin x+3$ 的值域.

解 此函数可被看作一个关于 $\sin x$ 的二次函数.

进行换元, 令 $t=\sin x$. 新变量 t 的取值范围由正弦函数的值域 $[-1,1]$ 决定, 故 $t\in[-1,1]$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

原问题等价于求二次函数 $g(t)=t^2+2t+3$ 在 $t\in[-1,1]$ 上的值域.

对 $g(t)$ 配方, 以展示顶点位置:

$$g(t)=(t+1)^2+2.$$

抛物线开口向上, 对称轴为 $t=-1$.

由于对称轴 $t=-1$ 恰好是区间 $[-1,1]$ 的左端点, 函数 $g(t)$ 在该区间上严格单调递增. 因此最小值在 $t=-1$ 处取得, 最大值在 $t=1$ 处取得:

$$g_{\min}=g(-1)=(-1+1)^2+2=2$$

$$g_{\max}=g(1)=(1+1)^2+2=6$$

故原函数 $f(x)$ 的值域为 $[2,6]$.

3.19.3.2 反函数法(方程法)

我们也可以换一个视角. 方程法把 $y=f(x)$ 视为关于 x 的方程. 函数的值域, 就是使该方程有实数解的所有 y 构成的集合.

例题 3.88 求函数 $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 的值域.

解 设 $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. 将此式看作关于 x 的方程并反解 x.

整理方程, 消去分母, 得

$$y(x^2+x+1)=x^2-x+1$$

$$yx^2+yx+y=x^2-x+1.$$

将所有项移至一边, 得到关于 x 的标准一元二次方程形式

$$(y-1)x^2+(y+1)x+(y-1)=0.$$

函数的值域就是使得这个关于 x 的方程有实数解的所有 y 的集合.

对系数 $(y-1)$ 分类讨论.

情形一: $y-1=0$**, 即** $y=1$. 此时方程退化为 $2x=0$, 解得 $x=0$. 故 $x=0$ 是一个合法的实数解, $y=1$ 属于值域.

情形二: $y-1\neq 0$**, 即** $y\neq 1$. 此时方程是一元二次方程. 它有实数解的充要条件是其判别式 $\Delta\geq 0$:

$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)(y-1)\geq 0$$

$$(y+1)^2-(2(y-1))^2\geq 0.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用平方差公式分解：

$$((y+1)-2(y-1))((y+1)+2(y-1)) \geq 0$$

$$(-y+3)(3y-1) \geq 0$$

$$(y-3)(3y-1) \leq 0.$$

解此不等式，得到 $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$.

综合两种情形并注意到 $y \neq 1$，得 y 的取值范围是 $[\frac{1}{3}, 1) \cup (1, 3] \cup \{1\}$.

合并这些集合，最终得到函数的值域为 $[\frac{1}{3}, 3]$.

3.19.3.3 不等式法

在处理分式或根式函数时，基本不等式，如均值不等式可用来确定函数值的边界.

例题 3.89 求函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ 的值域.

解 此函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 我们分情况讨论.

情形一：$x > 0$. 此时 x 与 $4/x$ 均为正数，可应用算术-几何平均值不等式：

$$f(x) = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

等号成立的条件是 $x = \frac{4}{x}$，即 $x^2 = 4$. 由于 $x > 0$，解得 $x = 2$. 因此当 $x > 0$ 时，函数的值域为 $[4, +\infty)$.

情形二：$x < 0$. 此时 x 与 $4/x$ 均为负数. 我们可对它们的相反数应用均值不等式. 令 $x = -t$，其中 $t > 0$.

$$f(x) = -t + \frac{4}{-t} = -\left(t + \frac{4}{t}\right).$$

由于 $t > 0$，已知 $t + \frac{4}{t} \geq 4$. 因此 $f(x) = -\left(t + \frac{4}{t}\right) \leq -4$. 等号在 $t = 2$，即 $x = -2$ 时取得. 因此当 $x < 0$ 时，函数的值域为 $(-\infty, -4]$.

综合两种情形，函数 $f(x)$ 的完整值域为 $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

3.19.4 数形结合法

函数的值域在几何上表现为图像在 y 轴上的投影. 我们也可以先画出函数的草图，再观察纵向分布范围，并用代数方法确认它.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

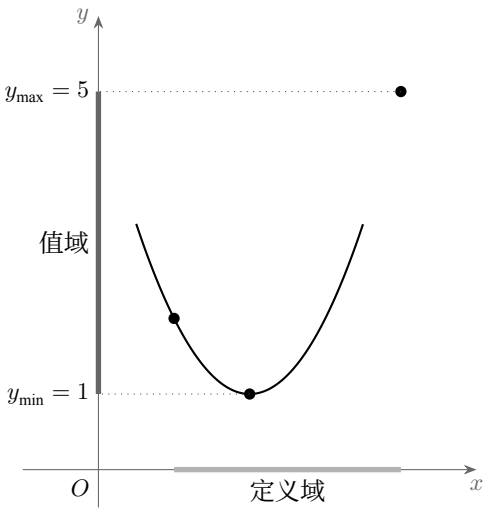


图 3.41　函数 $y=(x-2)^2+1$ 在定义域 $[1,4]$ 上的值域 $[1,5]$

3.20 多项式理论

多项式是代数运算的基本对象. 本节在数域上建立多项式的整除、因式分解与对称函数理论, 给出重因式的导数判别法, 并用 Lagrange 插值与切比雪夫多项式展示多项式的逼近作用.

3.20.1 数域与多项式

定义 3.21 (数域) 若数集 P 包含 0 与 1, 且对其中任意两数作加、减、乘、除(除数非零)所得结果仍在 P 中, 则称 P 为一个**数域**.

有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$、复数集 $\mathbb{C}$ 都是数域. 数域也能由无理数生成, 把 α 与 $\mathbb{Q}$ 中的数作四则运算得到的一切数记为 $\mathbb{Q}(\alpha)$, 它是数域. 当 α 是二次无理数时 $\mathbb{Q}(\alpha)=\{a+b\alpha \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$, 以 $\alpha=\sqrt{2}$ 为例, $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$, 非零元素的逆 $\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ 也在其中. $\alpha=\sqrt[3]{2}$ 时 $\alpha^2=\sqrt[3]{4}$ 落在 $\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 之外, 这个二维集合对乘法不封闭, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ 才是数域.

定义 3.22 (P 上多项式) 系数取自数域 P 的多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 称为 P 上的多项式. 若 $a_n\neq 0$, 称 n 为 f 的次数, 记 $\deg f=n$; 零多项式不定义次数.

本节中多项式均指某一固定数域 P 上的多项式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

整数有带余除法, 17 除以 5 得商 3 余 2. 多项式有完全平行的结构. 整除、最大公因式、因式分解这三件事都从带余除法生长出来.

3.20.2 带余除法与辗转相除

定理 3.30 (带余除法) 对 P 上任意非零多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$, 存在唯一的 $q(x), r(x) \in P[x]$, 使得

$$f(x) = q(x)\,g(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g \text{ 或 } r \equiv 0. \tag{3-19}$$

证明 存在性. 若 $\deg f < \deg g$, 取 $q = 0, r = f$ 即可. 设 $\deg f = n \geq m = \deg g$, f 与 g 的首项系数分别为 a_n、b_m. 令 $q_0(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$, 则 $f_1 = f - q_0 g$ 的次数低于 n. 对 f_1 重复此操作, 每次至少降一次, 有限步后得到 f_r 满足 $\deg f_r < \deg g$ 或 $f_r \equiv 0$. 累加各步的 q_i 即得 q, 取 $r = f_r$.

唯一性. 设 $f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$, 则 $(q_1 - q_2)g = r_1 - r_2$. 左端若非零则次数 $\geq \deg g$, 右端次数 $< \deg g$, 故两端为零, 即 $q_1 = q_2, r_1 = r_2$. □

$q(x)$ 称为商, $r(x)$ 称为余式. 当 $r \equiv 0$ 时称 g 整除 f, 记 $g \mid f$.

定义 3.23 (最大公因式) 若 $d(x)$ 同时整除 $f(x)$ 与 $g(x)$, 且 f、g 的任一公因式都整除 $d(x)$, 则称 $d(x)$ 为 f 与 g 的最大公因式. 最大公因式在相差非零常数倍的意义下唯一, 通常取其中的首一多项式, 记作 (f, g). 当 $(f, g) = 1$ 时称 f 与 g 互素.

定理 3.31 (Bézout 等式) 设 $d(x) = (f(x), g(x))$, 则存在 $u(x), v(x) \in P[x]$ 使得

$$d(x) = u(x)\,f(x) + v(x)\,g(x). \tag{3-20}$$

证明 对 f、g 反复作带余除法, 得序列

$$\begin{aligned} f &= q_1 g + r_1, \\ g &= q_2 r_1 + r_2, \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{s-2} &= q_s r_{s-1} + r_s, \\ r_{s-1} &= q_{s+1} r_s. \end{aligned}$$

知乎@余命数

每步余式次数严格递减, 有限步后余式为零. 由第一式起, f 与 g 的公因式整除 r_1; 由第二式, g 与 r_1 的公因式整除 r_2; 依次传递, r_s 整除所有前项, 故 r_s 是最大公因式. 从倒数第二式倒推, 把 r_s 表为 r_{s-1}、r_{s-2} 的线性组合, 再逐次用前式代入消去 $r_{s-1}, r_{s-2}, \dots$, 最终得到 (3-20) 的形式. □

上述反复作带余除法的过程即**辗转相除法**.

例题 3.90 (求最大公因式) 求 $f(x)=x^4+x^3-x-1$ 与 $g(x)=x^3+x^2-x-1$ 的最大公因式.

解 作带余除法: $f=(x)g+(x^2-1)$, $g=(x+1)(x^2-1)+0$. 故 $(f,g)=x^2-1$(差常数因子). 倒推得 $x^2-1=f-x\,g$, 即 $u=1, v=-x$.

有了最大公因式, 下一步是因式分解. 整数的因数分解到素数为止, $12=2^2\cdot 3$, 其中 2、3 不能再拆. 多项式也有不能再分的"素多项式", 即不可约多项式.

3.20.3 因式分解唯一定理

定义 3.24 (不可约多项式) 若 P 上次数 ≥ 1 的多项式 $p(x)$ 不能分解为 P 上两个次数更低的多项式之积, 则称 $p(x)$ 在 P 上不可约.

多项式是否不可约依赖于数域, x^2-2 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约, 在 $\mathbb{R}$ 上可分解为 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

定理 3.32 (因式分解唯一定理) 数域 P 上任一次数 ≥ 1 的多项式 $f(x)$ 可分解为 P 上有限个不可约多项式之积

$$f(x)=c\,p_1(x)^{\alpha_1}p_2(x)^{\alpha_2}\cdots p_k(x)^{\alpha_k}, \tag{3-21}$$

其中 c 为首项系数, p_i 为首一不可约多项式, $\alpha_i\geq 1$. 此分解在不计因式顺序时唯一.

证明 存在性. 对 $\deg f$ 作归纳.$\deg f=1$ 时 f 本身不可约. 设 $\deg f=n$, 若 f 不可约则已证; 否则 $f=f_1f_2$, $\deg f_1, \deg f_2<n$, 由归纳假设 f_1、f_2 均可分解, 合并即得 f 的分解.

唯一性. 先记一条要反复使用的性质, 若不可约多项式 p 整除乘积 $q_1q_2\cdots q_l$, 则 p 整除某个 q_j. 这是因为 p 不可约, 它与每个 q_j 要么互素, 要么相差常数因子; 若 p 与所有 q_j 都互素, 由 Bézout 等式可知 p 与整个乘积互素, 与 $p\mid q_1\cdots q_l$ 矛盾.

设 $f=c\,p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}=c'\,q_1^{\beta_1}\cdots q_l^{\beta_l}$. 由 $p_1\mid f$ 及上述性质, p_1 整除某个 q_j; q_j 不可约故 p_1 与 q_j 相差常数因子, 归一为首一后相等. 消去后继续, 建立 p_i 与 q_j 的一一

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对应. 设某不可约因式 h 在两分解中幂次分别为 α、β, 由 $h^{\alpha} \mid f$ 及 h 与其余因式互素得 $h^{\alpha} \mid h^{\beta}$, 故 $\alpha \le \beta$; 对称地 $\beta \le \alpha$, 故 $\alpha = \beta$. □

分解的唯一性是这一定理的实质, 同一个多项式无论怎样分解, 最终的不可约因式(不计顺序和常数因子)完全一致. 但“不可约”依赖于数域, 同一个多项式在小域里不可分, 到大域里就能拆开.

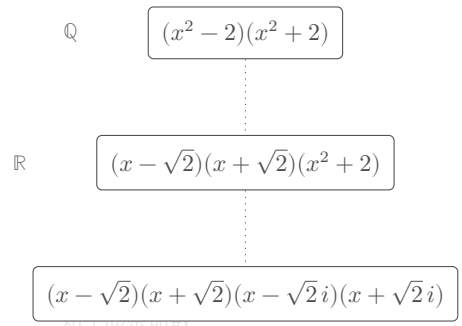


图 3.42 x^4-4 在不同数域上的因式分解, 数域越大, 不可约因式的次数越低, 直至 $\mathbb{C}$ 上完全分解为一次因式

3.20.4 重因式与导数判别

定义 3.25 (重因式) 若不可约多项式 $p(x)$ 满足 $p(x)^k \mid f(x)$ 但 $p(x)^{k+1} \nmid f(x)$, 则称 p 为 f 的 k 重因式. $k=1$ 时称单因式, $k \ge 2$ 时称重因式.

多项式的导数 $f'(x)$ 按通常求导规则定义. 导数给出重因式的判据.

定理 3.33 (重因式判别) 设 $p(x)$ 不可约, $k \ge 1$. 若 p 是 f 的 k 重因式, 则 $p^{k-1} \mid f'$ 而 $p^k \nmid f'$; 反之, 若 $p \mid f$ 且 $p^{k-1} \mid f'$, $p^k \nmid f'$, 则 p 是 f 的 k 重因式. 特别地, f 没有重因式当且仅当 $(f, f') = 1$.

证明 设 $f(x) = p(x)^k\, g(x)$, $(p, g) = 1$. 求导得

$$f'(x) = k\,p(x)^{k-1} p'(x)\, g(x) + p(x)^k\, g'(x) = p(x)^{k-1}\big[k\,p'(x)\, g(x) + p(x)\, g'(x)\big].$$

记括号内为 $h(x)$. 因 $\deg p' < \deg p$ 且 $(p, g) = 1$, $p \nmid p'g$, 故 $p \nmid h$, 即 $p^{k-1} \mid f'$ 但 $p^k \nmid f'$.

反向. 设 $p \mid f$ 且 $p^{k-1} \mid f'$, $p^k \nmid f'$. 记 p 在 f 中的重数为 $m \ge 1$. 由已证的正向部分, $p^{m-1} \mid f'$ 而 $p^m \nmid f'$. 同一不可约因式在 f' 中的重数唯一, 故 $m-1 = k-1$, 即 $m = k$. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.91 (判别重因式) 判别 $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ 是否有重因式.

解 $f'(x)=4x^3+6x^2+4x+2=2(2x^3+3x^2+2x+1)$. 对 f 与 f' 作辗转相除, 可得 $(f,f')=x+1$. 故 $x+1$ 是 f 的重因式; 它在 (f,f') 中是一重因式, 由判别定理它在 f 中是二重因式. 验证: $f=(x+1)^2(x^2+1)$, $f'=2(x+1)(2x^2+x+1)$, 两者不再有其他公共因式, 故 f 没有别的重因式.

重因式判据不必先分解, 只需算 f 与 f' 的最大公因式, 就能判断 f 是否有重根. 这一判据在数值计算和代数化简里都常用.

3.20.5 对称多项式

定义 3.26 (初等对称多项式) 对 n 个变元 $x_1,\dots,x_n$, 令

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\
\sigma_2 &= \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j,\\
&\vdots\\
\sigma_k &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_k},\\
&\vdots\\
\sigma_n &= x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}$$

称 $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ 为初等对称多项式. 对任意变元的置换保持不变的多项式称为对称多项式.

定理 3.34 (对称多项式基本定理) 任一对称多项式 $F(x_1,\dots,x_n)$ 可唯一地表为初等对称多项式 $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ 的多项式.

此定理的构造性证明通过对 F 的单项式按字典序归纳, 逐步用 σ_k 替换首项, 此处从略.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

定理 3.35 (牛顿恒等式) 记 $p_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ 为幂和, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 为初等对称多项式. 对 $k \geq 1$,

$$p_k - \sigma_1 p_{k-1} + \sigma_2 p_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}p_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0 \quad (k \leq n), \tag{3-22}$$

当 $k > n$ 时, 末项 $(-1)^k k\sigma_k$ 替换为 $(-1)^n \sigma_n p_{k-n}$.

证明 对每个 x_i, 由韦达定理知 x_i 是 $t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n = 0$ 的根, 故

$$x_i^n = \sigma_1 x_i^{n-1} - \sigma_2 x_i^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_n.$$

乘以 x_i^{k-n} 并对 i 求和 $(k \geq n)$, 得 $p_k = \sigma_1 p_{k-1} - \sigma_2 p_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_n p_{k-n}$, 即 $k > n$ 的情形. 对 $k \leq n$, 对生成函数 $\prod(1 - x_i t) = \sum(-1)^k \sigma_k t^k$ 取对数后比较 t^k 系数即得 (3-22). □

牛顿恒等式把幂和 p_k 递归地表为初等对称多项式的多项式, 据此可化简一切对称式.

例题 3.92 (用牛顿恒等式求幂和) 设 x_1, x_2, x_3 满足 $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 11$, $\sigma_3 = 6$, 求 p_2 与 p_3.

解 由 (3-22), $k = 2$: $p_2 - \sigma_1 p_1 + 2\sigma_2 = 0$, $p_1 = \sigma_1 = 6$, 故 $p_2 = 6\cdot 6 - 2\cdot 11 = 36 - 22 = 14$.

$k = 3$: $p_3 - \sigma_1 p_2 + \sigma_2 p_1 - 3\sigma_3 = 0$, 故 $p_3 = 6\cdot 14 - 11\cdot 6 + 3\cdot 6 = 84 - 66 + 18 = 36$.

对称多项式从代数结构刻画根的集合. 反过来, 已知若干点上的函数值也能唯一确定一个多项式, 这由 Lagrange 插值给出.

3.20.6 Lagrange 插值

定理 3.36 (Lagrange 插值公式) 设 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 为数域 P 中 $n+1$ 个互异点, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ 为给定值. 则存在唯一的次数 $\leq n$ 的多项式 $L(x)$ 满足 $L(x_i) = y_i (i = 0, \ldots, n)$, 且

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{3-23}$$

证明 存在性. 对每个 i, 令 $\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. 则 $\ell_i(x_i) = 1$, $\ell_i(x_j) = 0 (j \neq i)$, 故 $L(x) = \sum y_i \ell_i(x)$ 满足插值条件, 且 $\deg L \leq n$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

唯一性. 设 L_1, L_2 均满足条件且 $\deg \le n$. 令 $H = L_1 - L_2$, 则 $H(x_i) = 0$ 对 $i = 0, \dots, n$ 成立, 即 H 有 $n+1$ 个不同根. 但 $\deg H \le n$, 故 $H \equiv 0$. □

例题 3.93 (构造插值多项式) 求次数 ≤ 2 的多项式 $L(x)$, 使 $L(0) = 1, L(1) = 2, L(2) = 0$.

解 由 (3-23),

$$\begin{aligned} L(x) &= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2 \cdot \frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 0 \cdot \frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 2x(x-2) \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{2} - 2x^2 + 4x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1. \end{aligned}$$

验证: $L(0) = 1, L(1) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 2, L(2) = -6 + 5 + 1 = 0$.

Lagrange 插值用 $n+1$ 个点确定一个 n 次多项式, 但节点选取影响逼近误差. 等距节点在端点附近剧烈振荡 (Runge 现象), 而切比雪夫多项式的根作为节点可抑制这一现象.

3.20.7 切比雪夫多项式

由三倍角公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 可见 $\cos 3\theta$ 是 $\cos\theta$ 的三次多项式. 一般地:

定理 3.37 (切比雪夫多项式) 对任意正整数 n, $\cos n\theta$ 可表为 $\cos\theta$ 的 n 次多项式 $T_n(x)$, 其首项系数为 2^{n-1}, 满足

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{3-24}$$

证明 由和差化积, $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta\cos\theta$, 故

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta.$$

设 $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, $\cos(n-1)\theta = T_{n-1}(\cos\theta)$, 代入即得递推 (3-24). 首项系数满足 $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 1$, 故 $a_n = 2^{n-1}$. □

前几个切比雪夫多项式为

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$T_3(x)=4x^3-3x,\qquad T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\qquad T_5(x)=16x^5-20x^3+5x.$$

定理 3.38 (切比雪夫多项式的根) $T_n(x)$ 的 n 个根为

$$x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k=1,2,\dots,n, \tag{3-25}$$

全部落在区间 $[-1,1]$ 上.

证明 $T_n(x_k)=0$ 当且仅当 $\cos n\theta_k=0$,即 $n\theta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2}$,$\theta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$. 故 $x_k=\cos\theta_k$ 如 (3-25).$k=1,\dots,n$ 给出 n 个互异根, 且 $\theta_k\in(0,\pi)$ 保证 $x_k\in(-1,1)$. □

切比雪夫多项式在 $[-1,1]$ 上满足 $|T_n(x)|\le 1$,且其根均匀分布于 $[-1,1]$. 以 T_n 的根为插值节点可抑制 Runge 现象, 这是切比雪夫多项式用于函数逼近的根据.

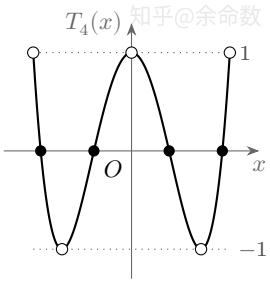


图 3.43 $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$ 在 $[-1,1]$ 上的等波纹, 4 个根(实点)均匀分布, 5 个空点交替取 ±1

例题 3.94 (用切比雪夫多项式表示) 利用递推 (3-24) 求 $T_4(x)$, 并验证 $T_4(\cos\theta)=\cos 4\theta$.

解 $T_2=2x^2-1, T_3=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x, T_4=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1$.

验证: $\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2(2\cos^2\theta-1)^2-1=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=T_4(\cos\theta)$.

3.21 三次与四次方程

二次方程的求根公式已为熟知. 三次与四次方程同样存在根式解, 本节给出 Cardano 公式、三次方程的三角解法, 以及四次方程的 Ferrari 降次法.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.21.1 消去二次项

对一般三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$, 两端除以 a 化为

$$x^3+bx^2+cx+d=0.$$

作平移 $x=y-\dfrac{b}{3}$, 利用 $(y-\frac{b}{3})^3$ 展开后二次项系数为 $-b$, 与 $b(y-\frac{b}{3})^2$ 的二次项 b 相消, 方程化为不含二次项的形式

知乎@余命数

$$y^3+py+q=0. \tag{3-26}$$

此步骤称为 Vieta 平移. 以下对约化方程 (3-26) 求解.

消去二次项后, 方程只剩 y^3、y 和常数项.Cardano 的想法是把 y 拆成两个变量之和 $y=u+v$, 利用多出的自由度附加约束 $uv=-p/3$, 把三次方程降为关于 u^3 的二次方程.

3.21.2 Cardano 公式

定理 3.39 (Cardano 公式) 约化三次方程 $y^3+py+q=0$ 的根为

$$y_k=\omega^k u+\omega^{-k}v,\quad k=0,1,2, \tag{3-27}$$

其中 $\omega=e^{2\pi i/3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $u=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}$, $v=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$, $\Delta=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$, 且 u,v 满足 $uv=-\dfrac{p}{3}$.

证明 设 $y=u+v$, 代入 $y^3+py+q=0$ 得

$$(u^3+v^3)+(u+v)(3uv+p)+q=0.$$

u、v 为两个自由变量, 可附加约束 $3uv+p=0$, 即 $uv=-\frac{p}{3}$. 此时 $u^3+v^3=-q$. 令 $U=u^3, V=v^3$, 则

知乎@余命数

$$U+V=-q,\quad UV=(uv)^3=-\frac{p^3}{27}.$$

故 U、V 是二次方程 $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ 的两根:

知乎@余命数

$$U,V=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\Delta}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

取 $u=\sqrt[3]{U}, v=\sqrt[3]{V}$. 约束 $uv=-\frac{p}{3}$ 限定 u、v 的立方根搭配, 设 u_0 为 U 的一个立方根, 则 $v_0=-\frac{p}{3u_0}$ 为 V 的对应立方根.U 的三个立方根为 $u_0, \omega u_0, \omega^2 u_0$, 对应的 v 为 $v_0, \omega^2 v_0, \omega v_0$(因 $uv=-\frac{p}{3}$ 要求 v 的因子与 u 的因子乘积为 1). 故三根为

$$y_0=u_0+v_0, \quad y_1=\omega u_0+\omega^2 v_0, \quad y_2=\omega^2 u_0+\omega v_0,$$

即 (3-27). □

知乎@余命数

证明的关键一步是把 $y=u+v$ 拆成两个变量, 用 $uv=-p/3$ 消去交叉项, 剩下的 $u^3+v^3=-q$ 与 $u^3v^3=-p^3/27$ 合起来是二次方程的两根之和与积. 三次方程由此降为二次方程.

定义 3.27 (Vieta 替换) 约束 $uv=-\frac{p}{3}$ 等价于 $v=-\frac{p}{3u}$. 代换

$$y=u-\frac{p}{3u} \tag{3-28}$$

称为 Vieta 替换. 在此替换下, $y^3+py+q=0$ 化为

$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0,$$

即关于 u^3 的二次方程 $U^2+qU-\frac{p^3}{27}=0$.

Vieta 替换把三次方程降为二次方程. 解出 u^3 的两个值后开立方得 u, 再由 (3-28) 还原 y. 注意 u^3 的两个值 U、V 满足 $V=-\frac{p^3}{27U}$, 故 u 与 $-\frac{p}{3u}$ 成对出现, 经 Vieta 替换给出相同的 y, 三对 u 值对应三个根.

例题 3.95 (用 Cardano 公式解方程) 解方程 $x^3-6x-6=0$.

解 此为约化形式, $p=-6, q=-6.\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{36}{4}+\frac{-216}{27}=9-8=1.$

$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}=\sqrt[3]{3+1}=\sqrt[3]{4}, v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}=\sqrt[3]{3-1}=\sqrt[3]{2}.$

验证 $uv=\sqrt[3]{8}=2=-\frac{p}{3}=2$, 符合约束. 三根为

$$x_0=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}, \quad x_1=\omega\sqrt[3]{4}+\omega^2\sqrt[3]{2}, \quad x_2=\omega^2\sqrt[3]{4}+\omega\sqrt[3]{2}.$$

因 $\Delta>0$, 方程有一个实根 x_0 与一对共轭复根 x_1, x_2.

知乎@余命数

3.21.3 三次方程的三角解法

当约化方程 $y^3+py+q=0$ 的判别式 $\Delta<0$, 即 $p<0$ 且 $\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$ 的绝对值 <1 时, 三个根均为实数, Cardano 公式中出现虚数的立方根(不可约情形). 此时用三角恒等变换可避开复数运算.

定理 3.40 (三次方程三角解法) 设约化方程 $y^3+py+q=0$ 中 $p<0$, 令 $y=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\theta$, 则方程化为

$$\cos 3\theta=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}.$$

若右端绝对值 ≤ 1, 则三个实根为

$$y_k=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right)-\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2. \tag{3-29}$$

知乎@余命数

证明 代入 $y=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\theta$, 记 $r=2\sqrt{-\frac{p}{3}}$. 则 $y^3=r^3\cos^3\theta$, $py=pr\cos\theta$. 由三倍角公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$, 即 $\cos^3\theta=\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}$, 故

$$y^3+py=r^3\cdot\frac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4}+pr\cos\theta=\frac{r^3}{4}\cos 3\theta+\cos\theta\left(\frac{3r^3}{4}+pr\right).$$

由 $r=2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $r^2=-\frac{4p}{3}$, $\frac{3r^3}{4}=\frac{3}{4}\cdot r\cdot r^2=\frac{3}{4}\cdot r\cdot(-\frac{4p}{3})=-pr$, 故 $\frac{3r^3}{4}+pr=0$. 方程化为

$$\frac{r^3}{4}\cos 3\theta+q=0,\quad \cos 3\theta=-\frac{4q}{r^3}.$$

计算 $\frac{4q}{r^3}=\frac{4q}{8(-p/3)^{3/2}}=\frac{q}{2(-p/3)^{3/2}}=-\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$(因 $p<0$), 故 $\cos 3\theta=-\frac{4q}{r^3}=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}$. 设 $\varphi=\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right)$, 则 $3\theta=\pm\varphi+2k\pi$, $\theta=\frac{\varphi}{3}-\frac{2k\pi}{3}$, 取一组即可.$k=0,1,2$ 给出三个互异的 $\cos\theta$ 值, 对应三个实根 (3-29). □

例题 3.96 (三角解法求实根) 解方程 $x^3-3x+1=0$.

解 $p=-3, q=1.\Delta=\frac{1}{4}+\frac{(-3)^3}{27}=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0$, 属不可约情形, 用三角解法.

$r=2\sqrt{-\frac{p}{3}}=2\sqrt{1}=2.\cos 3\theta=\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}=\frac{3}{-6}\sqrt{1}=-\frac{1}{2}$. 故 $3\theta=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $\theta=\frac{2\pi}{9}-\frac{2k\pi}{3}$.

三根为

$$x_k=2\cos\left(\frac{2\pi}{9}-\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

知乎@余命数

即 $x_0=2\cos\frac{2\pi}{9}$, $x_1=2\cos\frac{4\pi}{9}$, $x_2=2\cos\frac{10\pi}{9}$, 均为实数.

当 $\Delta<0$ 时三个根都是实数, 但 Cardano 公式需经复数中转才能得到实根, 这是不可约情形. 三角解法利用 $\cos 3\theta$ 的三倍角公式, 直接在实数域中给出三个根.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

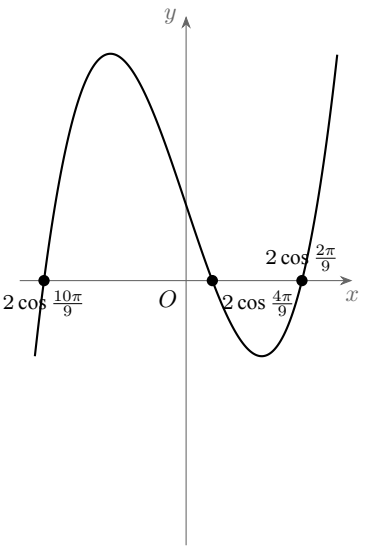


图 3.44 方程 $x^3-3x+1=0$ 的三个实根（不可约情形），Cardano 公式在此需经复数中转，三角解法直接给出实根

3.21.4 四次方程的 Ferrari 降次法

对一般四次方程 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$，先作平移 $x=y-\frac{b}{4}$ 消去三次项，化为

$$y^4+py^2+qy+r=0. \tag{3-30}$$

定理 3.41 (Ferrari 降次法) 约化四次方程 (3-30) 可通过引入参数 t 分解为两个二次方程之积，t 满足一个三次预解方程. 解出 t 后，四次方程的根由两个二次方程给出.

证明 将 (3-30) 改写为

$$y^4=-py^2-qy-r.$$

左端配方：$y^4+2ty^2+t^2=(2t-p)y^2-qy+(t^2-r)$，即

$$(y^2+t)^2=(2t-p)y^2-qy+(t^2-r). \tag{3-31}$$

右端为 y 的二次式，若其为完全平方，则 (3-31) 两端开方后得到两个二次方程. 右端判别式为零的条件为

$$q^2-4(2t-p)(t^2-r)=0,$$

即

$$8t^3-4pt^2-8rt+4pr-q^2=0. \tag{3-32}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(3-32) 是关于 t 的三次方程, 称为预解方程. 任取其一实根 t_0, 则 (3-31) 右端为完全平方 $(\sqrt{2t_0-p}\,y-\frac{q}{2\sqrt{2t_0-p}})^2$(要求 $2t_0-p>0$). 开方得

$$y^2+t_0=\pm\left(\sqrt{2t_0-p}\,y-\frac{q}{2\sqrt{2t_0-p}}\right),$$

即两个二次方程

$$y^2-\sqrt{2t_0-p}\,y+t_0+\frac{q}{2\sqrt{2t_0-p}}=0,\quad y^2+\sqrt{2t_0-p}\,y+t_0-\frac{q}{2\sqrt{2t_0-p}}=0. \tag{3-33}$$

分别解之, 共得四个根. □

Ferrari 法的精髓是配方时引入参数 t, 左端 $(y^2+t)^2$ 总是完全平方, 右端是否完全平方取决于 t. 令右端判别式为零, 就把四次方程降为关于 t 的三次方程. 解出 t 后, 四次方程拆成两个二次方程.

例题 3.97 (用 Ferrari 法解方程) 解方程 $x^4-2x^2+8x-3=0$.

解 此为约化形式, $p=-2, q=8, r=-3$. 预解方程 (3-32):

$$8t^3-4(-2)t^2-8(-3)t+4(-2)(-3)-64=0,$$

即 $8t^3+8t^2+24t-40=0$, $t^3+t^2+3t-5=0$.

试根: $t=1$ 时 $1+1+3-5=0$, 故 $t_0=1$ 为实根. 此时 $2t_0-p=2-(-2)=4>0$, $\sqrt{2t_0-p}=2$.

代入 (3-33), 两方程为

$$y^2-2y+1+\frac{8}{4}=y^2-2y+3=0,\quad y^2+2y+1-\frac{8}{4}=y^2+2y-1=0.$$

第一个方程 $y^2-2y+3=0$, 判别式 $4-12=-8<0$, 根 $y=1\pm\sqrt{2}\,i$. 第二个方程 $y^2+2y-1=0$, 根 $y=-1\pm\sqrt{2}$.

故原方程四根为 $x_1=-1+\sqrt{2}, x_2=-1-\sqrt{2}, x_3=1+\sqrt{2}\,i, x_4=1-\sqrt{2}\,i$.

Ferrari 法把四次方程降为三次预解方程加两个二次方程, 做法是配方后令右端判别式为零. 三次与四次方程的根式解揭示了代数方程可解性的边界, 五次及以上的一般方程不存在根式解, 这一结论由 Abel 与 Galois 给出.

五次及以上方程没有根式解, 但数值上求根始终可行. 牛顿迭代法是其中最基本的方法, 过当前点 $(x_n, f(x_n))$ 作切线, 切线与 x 轴的交点作为下一个近似

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在根附近, 迭代以平方速度收敛, 每步有效位数大致翻倍.

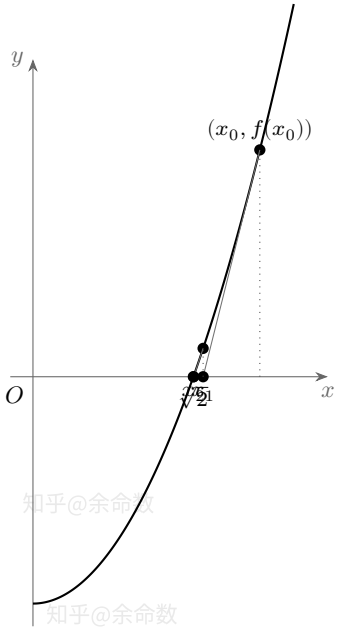


图 3.45 牛顿迭代法, 过 $(x_n, f(x_n))$ 作切线, 切线与 x 轴的交点为 x_{n+1}, 序列快速收敛到根 $\sqrt{2}$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

第 4 章

函数方程与抽象函数

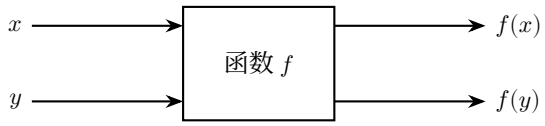
基础语言

「人追求完美，却往往只能得到近似。」

——柯西



第四章 函数方程与抽象函数



函数方程: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

图 4.1 函数方程约束未知函数的行为

一个函数通常由其解析式定义. 然而, 在许多数学情境中, 函数的具体形态未知, 只知道它满足某些特定的代数关系式, 这就是函数方程.

抽象函数问题以一个或多个函数方程约束函数的行为. 我们从这些代数关系中提炼函数的具体性质, 再确定它的解析式.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

4.1 基本分析方法

形式各异的函数方程共享若干基本分析策略. 这些策略既是模型法的依据, 也在方程无法直接套用模型时承担探索的任务.

4.1.1 赋值法

知乎@余命数

赋值法就是给方程中的变量代入特殊值. 由于等式对所有变量成立, 它对特殊值也成立. 我们选取能简化结构或暴露函数性质的特殊值, 逐步推出函数的关键性质.

常见的赋值策略包括:

知乎@余命数

- 引入单位元: 在加法型方程 $f(x+y)$ 中令 $y=0$, 或在乘法型方程 $f(xy)$ 中令 $y=1$, 以探求 $f(0)$ 或 $f(1)$ 的值.
- 引入逆元: 在加法型方程中令 $y=-x$, 或在乘法型方程中令 $y=1/x$, 以探求函数的奇偶性或对称性.
- 变量取等: 令 $y=x$, 可将 $f(x+y)$ 转化为 $f(2x)$, 或将 $f(xy)$ 转化为 $f(x^2)$, 由此得到关于自变量倍数或乘方的函数关系式.

知乎@余命数

例题 4.1 (多选题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 均有 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 成立, 且 $f(1)=2$. 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调, 判断下列说法.

A. $f(0)=1$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

B. $f(x)$ 是偶函数

C. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

D. 不等式 $f(x^2-2x)<f(3)$ 的解集为 $(-1,3)$

解 我们先证明 $f(x)>0$ 对所有 x 成立. 在方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 中令 $y=x$, 得到 $f(2x)=[f(x)]^2\geq 0$. 若存在 x_0 使得 $f(x_0)=0$, 则对任意 $x\in\mathbb{R}$, 有 $f(x)=f((x-x_0)+x_0)=f(x-x_0)f(x_0)=0$, 函数恒为零, 与条件 $f(1)=2$ 矛盾. 故对任意 $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$. 结合 $f(2x)\geq 0$ 知 $f(x)\geq 0$, 因而 $f(x)>0$.

对于 (A): 在原方程中令 $y=0$, 得 $f(x)=f(x)f(0)$. 由 $f(x)$ 恒不为零, 两边同除以 $f(x)$ 即得 $f(0)=1$. 故 (A) 正确.

对于 (B): 在原方程中令 $y=-x$ 以引入 $f(-x)$, 得 $f(x-x)=f(x)f(-x)$, 即 $f(0)=f(x)f(-x)$. 代入 $f(0)=1$, 得 $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$. 由 $f(1)=2$ 知 $f(-1)=1/2$, 它既不等于 $f(1)$, 也不等于 $-f(1)$. 故 $f(x)$ 既非奇函数亦非偶函数, (B) 错误.

对于 (C): 题设已给出 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调, 又 $f(1)=2>f(0)=1$, 故它只能单调递增. 进一步, 若 $h>0$, 则 $f(h)\geq f(0)=1$; 若 $f(h)=1$, 取正整数 n 使 $nh>1$, 则 $f(nh)=[f(h)]^n=1$, 与 $f(nh)\geq f(1)=2$ 矛盾. 故 $f(h)>1$, 从而 $f(x+h)=f(x)f(h)>f(x)$, 函数严格递增. 故 (C) 正确.

对于 (D): (C) 已证函数单调递增, 故不等式 $f(x^2-2x)<f(3)$ 等价于 $x^2-2x<3$. 解此一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$, 即 $(x+1)(x-3)<0$, 解集为 $(-1,3)$. 故 (D) 正确.

正确的选项为 **(A)(C)(D)**.

可导假设下的换元与求导

4.1.2 换元构造法

当函数方程不能直接套用标准模型时, 我们识别方程中反复出现的共同结构, 把它定义为新函数, 从而把原方程化为标准方程.

例题 4.2 (2023 年 8 月浙江省 Z20 名校联盟第一次联考第 12 题) (多选)定义在 $(0,+\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足以下条件.(1) $f(xy)=xf(y)+yf(x)$; (2) 当 $x>1$ 时, $f(x)>0$. 判断下列结论.

A. $f(1)=0$

B. $f(xy)=f(x)f(y)$

C. $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

D. 不等式 $xf\left(x-\frac{3}{2}\right)\geq\left(\frac{3}{2}-x\right)f(x)$ 的解集为 $[2,+\infty)$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 方程 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ 的两边同除以 xy, 即可得到 $f(z)/z$ 的形式, 化为柯西方程.

在方程两边同时除以 xy. 定义域为 $(0,+\infty)$, x,y 均为正数, 除法可行:

$$\frac{f(xy)}{xy}=\frac{xf(y)}{xy}+\frac{yf(x)}{xy}\implies\frac{f(xy)}{xy}=\frac{f(y)}{y}+\frac{f(x)}{x}.$$

上式表明 $\frac{f(z)}{z}$ 反复出现. 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, 原方程化为标准对数型柯西方程:

$$g(xy)=g(x)+g(y).$$

题设给出 f 可导, 函数 g 也可导. 在可导正则条件下, 这个对数型柯西方程的解为 $g(x)=c\ln x$（严格推导见 第四卷第 16 章）. 原函数 $f(x)$ 的模型为 $f(x)=x\cdot g(x)=cx\ln x$.

由条件 (2) 确定常数 c 的符号, 当 $x>1$ 时, $f(x)>0$. 即 $cx\ln x>0$. 当 $x>1$ 时, $x>0$ 且 $\ln x>0$, 故 $c>0$.

模型 $f(x)=cx\ln x$ $(c>0)$ 既已确定, 我们逐一检验各选项.

- **(A)** $f(1)=0$: $f(1)=c\cdot 1\cdot\ln 1=0$. 正确.
- **(B)** $f(xy)=f(x)f(y)$: 即 $cxy\ln(xy)=(cx\ln x)(cy\ln y)$. 不成立. 错误.
- **(C)** $f(x)$ **在** $(1,+\infty)$ **上单调递增**: 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=c(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=c(\ln x+1)$. 因为 $c>0$, 当 $x>1$ 时, $\ln x>0$, 故 $f'(x)>0$. 函数单调递增. 正确.
- **(D) 解不等式**: 原不等式为 $xf(x-\frac{3}{2})-(\frac{3}{2}-x)f(x)\geq 0$. 移项得 $xf(x-\frac{3}{2})+(x-\frac{3}{2})f(x)\geq 0$. 左侧是 $f(x(x-\frac{3}{2}))$ 的展开式. 由条件 (1) $f(uv)=uf(v)+vf(u)$, 令 $u=x,v=x-\frac{3}{2}$, 原不等式等价于 $f(x(x-\frac{3}{2}))\geq 0$.
  自变量须为正, 即 $x>0$ 且 $x-\frac{3}{2}>0\implies x>\frac{3}{2}$. 代入模型得 $c\cdot x(x-\frac{3}{2})\ln\big(x(x-\frac{3}{2})\big)\geq 0$. 由 $c>0$ 且 $x(x-3/2)>0$, 不等式简化为 $\ln\big(x(x-\frac{3}{2})\big)\geq 0$. 对数函数递增且 $\ln 1=0$, 故真数不小于 1. $x(x-\frac{3}{2})\geq 1\implies 2x^2-3x-2\geq 0\implies(2x+1)(x-2)\geq 0$. 结合定义域 $x>\frac{3}{2}$, 解得 $x\geq 2$. 正确.

正确的选项是 **(A)(C)(D)**.

4.2 从基本初等函数到函数方程

基本初等函数的运算性质本身即构成一类函数方程.

- 线性函数 $f(x)=cx$ 保持加法结构: $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
- 指数函数 $f(x)=a^x$ 将加法映射为乘法: $f(x+y)=f(x)f(y)$.
- 幂函数 $f(x)=x^k$ 保持乘法结构: $f(xy)=f(x)f(y)$.
- 对数函数 $f(x)=\log_a x$ 将乘法映射为加法: $f(xy)=f(x)+f(y)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这四个方程统称柯西函数方程. 左端出现和式 $x+y$ 的两类称为加法型与指数型, 左端出现乘积 xy 的两类称为乘法型与对数型; 右端把 f 拆成两项之和还是两项之积, 区分出每一对中的两个方程. 遇到一个抽象函数问题时, 先看方程的两个变量以何种方式组合, 再看右端的结合方式, 就能在四类模型中定位它.

例题 4.3　指出下列函数各满足四类方程中的哪一类, 并写出对应的函数方程:

$$\text{(1) } f(x)=5x, \qquad \text{(2) } f(x)=2^x,$$
$$\text{(3) } f(x)=x^3\ (x>0), \quad \text{(4) } f(x)=\log_2 x\ (x>0).$$

解　逐个把函数代进四类方程, 只有一种组合能使等式对定义域内任意 x,y 成立.

对于 (1): $f(x+y)=5(x+y)=5x+5y=f(x)+f(y)$, 满足加法型方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

对于 (2): 由指数律 $2^{x+y}=2^x\cdot 2^y$, 满足指数型方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$.

对于 (3): 由幂的运算律 $(xy)^3=x^3y^3$, 满足乘法型方程 $f(xy)=f(x)f(y)$.

对于 (4): 由对数律 $\log_2(xy)=\log_2 x+\log_2 y$, 满足对数型方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$.

方程的另一侧用法是求值. 方程本身不含待定参数, 却把一整族函数值锁在一起, 代入少数几个特殊值, 就能从一个已知的函数值推出其余各处的函数值.

例题 4.4　已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 且 $f(2)=6$. 求 $f(0)$、$f(1)$、$f(-3)$ 与 $f(10)$.

解　方程对一切实数 x,y 成立, 代入特殊值即可逐步确定各处的函数值.

令 $x=y=0$, 得 $f(0)=f(0)+f(0)$, 故 $f(0)=0$. 令 $y=-x$, 得 $f(0)=f(x)+f(-x)$, 故 $f(-x)=-f(x)$, 函数为奇函数. 令 $x=y=1$, 得 $f(2)=2f(1)$, 由 $f(2)=6$ 解得 $f(1)=3$.

由 $f(1)=3$ 与 $f(2)=6$ 得 $f(3)=f(1)+f(2)=9$, 再由奇性得 $f(-3)=-f(3)=-9$. 对正整数 n, 反复使用方程得 $f(n)=nf(1)=3n$, 故 $f(10)=30$.

在连续性等正则假设下, 四类方程的连续解恰好就是本节开头列出的四类基本初等函数, 这是模型法成立的依据. 正则假设的用途与证明见 第4.5节.

4.3 二次及高次多项式模型

函数方程中出现二次交叉项或差分规律时, 解往往取二次或更高次多项式的形式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.3.1 二次函数型方程

定理 4.1 (二次函数型方程模型) 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)+\mu xy+\lambda$, 其中 μ,λ 为常数, 则 $a=\frac{\mu}{2}$, $c=-\lambda$, 即其解的形式为 $f(x)=\frac{\mu}{2}x^2+bx-\lambda$, 其中 b 为待定系数.

知乎@余命数

证明 将 $f(x+y)$ 展开:

$$f(x+y)=a(x+y)^2+b(x+y)+c=ax^2+ay^2+2axy+bx+by+c,$$

而

$$f(x)+f(y)+\mu xy+\lambda=ax^2+ay^2+bx+by+2c+\mu xy+\lambda.$$

等式对一切 x,y 成立, 两端逐项比较系数. 二次项系数相等是恒等式; 交叉项给出 $2a=\mu$; 常数项给出 $c=2c+\lambda$; 一次项系数 b 不受约束. 于是

$$a=\frac{\mu}{2},\qquad c=-\lambda,\qquad f(x)=\frac{\mu}{2}x^2+bx-\lambda.$$

□

注 4.1
上述推导只用到 f 是二次函数这一条件. 去掉该限制, 仅保留连续性, 解的形式仍然不变, 证明归结为加法型柯西方程, 见 第4.5节.

例题 4.5 (多选) 已知二次函数 $f(x)$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy-3$, 且 $f(1)=6$. 判断下列说法.

A. $f(0)=3$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. 函数 $y=f(x)$ 图像的对称轴为 $x=-\frac{1}{4}$

D. 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{23}{8}$

解 这是二次函数型方程. 我们直接用模型确定解析式.

据定理取参数 $\mu=4,\lambda=-3$, 函数模型为 $f(x)=\frac{4}{2}x^2+bx-(-3)=2x^2+bx+3$.

由题设 $f(1)=6$ 确定待定系数 b: $f(1)=2(1)^2+b(1)+3=5+b$, 令 $5+b=6$, 解得 $b=1$.

故 $f(x)=2x^2+x+3$.

- **对于 (A)**: $f(0)=3$.(A) 正确.
- **对于 (B)**: $f(-x)=2(-x)^2+(-x)+3=2x^2-x+3\neq f(x)$, 故 $f(x)$ 为非偶函数.(B) 错误.
- **对于 (C)**: 二次函数 $f(x)=2x^2+x+3$ 的对称轴为 $x=-\frac{1}{2(2)}=-\frac{1}{4}$.(C) 正确.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **对于 (D)**: 最小值在顶点处取得, 即 $x=-1/4$ 时. $f\left(-\frac{1}{4}\right)=2\left(-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}+3=\frac{1}{8}-\frac{2}{8}+\frac{24}{8}=\frac{23}{8}$.(D) 正确.

正确的选项是 **(A)(C)(D)**.

知乎@余命数

4.3.2 差分法与多项式阶数

差分算子描述的是离散函数的变化. 定义一阶前向差分 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$. 它作用在多项式上使次数降低一.

对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 一阶差分 $\Delta f(x)=2ax+(a+b)$ 是一次多项式, 二阶差分 $\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=2a$ 是常数. 反之, 若函数在整数点上的 k 阶差分恒为常数, 则它在整数点上的取值与某个次数不超过 k 的多项式一致.

例题 4.6 (2023 年 12 月苏州市部分高中高三上联考第 12 题) (多选) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的二次函数 $f(x)$ 同时满足以下两个条件.

I. $f(x+1)-f(x)=2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$;

II. 当 $x\in[0,1]$ 时, $|f(x)|\le 1$.

判断下列说法.

A. $f(0)=-1$

B. $f(x)$ 为偶函数

C. 存在 $n\in\mathbb{N}^*$, 使得 $f(n)>2023n$

D. 对任意 $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|<x^2+|x|+3$

解 题设已说明 $f(x)$ 为二次函数. 我们先用待定系数法确定二次项与一次项, 再用条件 II 确定常数项.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 其一阶差分为

$$f(x+1)-f(x)=[a(x+1)^2+b(x+1)+c]-[ax^2+bx+c]=2ax+(a+b),$$

由条件 I 得恒等式 $2ax+(a+b)\equiv 2x+2$. 比较系数, $2a=2, a+b=2$, 解得 $a=1, b=1$. 故 $f(x)=x^2+x+c$.

由条件 II, 对任意 $x\in[0,1]$, $|f(x)|\le 1$ 恒成立, 即 $-1\le x^2+x+c\le 1$. 令 $h(x)=x^2+x$.$h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,值域为 $[0,2]$. 故 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)=h(x)+c$ 的值域为 $[c,c+2]$. 要使该区间包含于 $[-1,1]$,须 $c\ge -1$ 且 $c+2\le 1$,唯一解 $c=-1$.

解析式唯一确定为 $f(x)=x^2+x-1$.

知乎@余命数

- **对于 (A)**: $f(0)=-1$. 正确.
- **对于 (B)**: $f(x)$ 的对称轴为 $x=-1/2$, 为非偶函数. 错误.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **对于 (C)**: $f(n) > 2023n$ 等价于 $n^2 + n - 1 > 2023n$, 即 $n^2 - 2022n - 1 > 0$. 这是开口向上的二次函数, n 足够大时函数值必为正. 正确.
- **对于 (D)**: 由三角不等式, $|x^2 + x - 1| \le |x^2| + |x| + |-1| = x^2 + |x| + 1$. 因 $1 < 3$, $x^2 + |x| + 1 < x^2 + |x| + 3$. 故 $|f(x)| \le x^2 + |x| + 1 < x^2 + |x| + 3$ 恒成立. 正确.

正确的选项是 **(A)(C)(D)**.

4.4 三角与双曲函数模型

有些函数方程的结构与三角函数或双曲函数的和差角公式一致. 我们称

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

为达朗贝尔方程.

三角与双曲函数模型

注 4.2
本节使用三角函数模型, 部分证明调用可微性、微分方程与积分思想, 见 第二卷第 6 章与 第四卷第 16 章. 赋值与递推求候选解不依赖可微性.

4.4.1 达朗贝尔方程

定义 4.1 (双曲函数) 双曲正弦函数 (sinh) 和双曲余弦函数 (cosh) 定义为

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{4-1}$$

$\sinh x$ 是奇函数, $\cosh x$ 是偶函数. 它们满足恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

定理 4.2 (达朗贝尔方程的正则解) 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 二次连续可微, 若满足 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, 则其非零解的模型为 $f(x) = \cos(\omega x)$ 或 $f(x) = \cosh(\omega x)$, 其中 ω 为常数; 零函数也是方程的平凡解.

证明 令 $y = 0$, 得 $2f(x) = 2f(x)f(0)$. 由 f 不恒为零, 存在 x_0 使 $f(x_0) \neq 0$, 故 $f(0) = 1$.

将原方程对 y 求偏导两次. 一阶偏导给出 $f'(x+y) - f'(x-y) = 2f(x)f'(y)$, 令 $y = 0$ 得 $0 = 2f(x)f'(0)$, 由 f 不恒为零知 $f'(0) = 0$. 再求一次偏导得 $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$, 令 $y = 0$ 得 $2f''(x) = 2f(x)f''(0)$, 即

$$f''(x) = kf(x), \quad k = f''(0).$$

这是二阶常系数齐次线性微分方程. 按 k 的符号分类讨论. 若 $k < 0$, 令 $k = -\omega^2$, 通解为 $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, 由初始条件 $f(0) = 1, f'(0) = 0$ 得 $f(x) = \cos(\omega x)$. 若 $k > 0$, 令 $k = \omega^2$, 通解为 $Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, 同样由初始条件得 $f(x) = \cosh(\omega x)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

若 $k=0$, 解为常数函数 $f(x)=1$. 由和差角公式可反向验证零函数、$\cos(\omega x)$ 与 $\cosh(\omega x)$ 均满足原方程. □

例题 4.7 (2024 届重庆第八中学高三月考卷五) (多选)定义域为 $\mathbb{R}$ 的连续函数 $f(x)$, 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, 且 $f(x)$ 不恒为 0, 则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $f(x)+f(0)\geq 0$

C. 若 $f(1)=0$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{2024} f(i)=4048$

D. 若 0 为 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 的最小值为 1

解 由赋值 $y=0$ 得 $2f(x)=2f(x)f(0)$, 因 f 不恒为零, $f(0)=1$; 再令 $x=0$ 得 $f(y)+f(-y)=2f(y)$, 即 $f(-y)=f(y)$.

对于 (A): 上式表明 f 为偶函数. 故 (A) 正确.

对于 (B): 在原方程中取 $x=y=\frac{t}{2}$, 得

$$f(t)+f(0)=2f\left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

由 $f(0)=1$ 知 $f(t)+1=2f(t/2)^2\geq 0$. 故 (B) 正确.

对于 (C): 附加条件 $f(1)=0$. 在原方程中取 $y=1$ 且 $x=n$ $(n\in\mathbb{Z})$, 得

$$f(n+1)+f(n-1)=2f(n)f(1)=0.$$

又 $f(0)=1, f(1)=0$, 故 $f(2)=-1, f(3)=0, f(4)=1$, 整数点函数值以 $1,0,-1,0$ 为周期循环, 一个周期内和为 0. 2024 是 4 的倍数, 恰含整数个周期, 和为 0. 故 (C) 错误.

对于 (D): 附加条件为 0 是 $f(x)$ 的极小值点. 此时存在 $\delta>0$, 当 $|t|<\delta$ 时 $f(t)\geq f(0)=1$. 任取实数 x, 取足够大的正整数 n 使 $|x/n|<\delta$. 记 $h=x/n$, $c=f(h)$, 则 $c\geq 1$. 令 $a_k=f(kh)$, 由原方程得递推关系

$$a_{k+1}+a_{k-1}=2ca_k,\qquad a_0=1,\ a_1=c.$$

当 $c=1$ 时, 递推给出 $a_k=1$; 当 $c>1$ 时, 令 $c=\cosh u$ $(u>0)$, 由同一递推及初值比较得 $a_k=\cosh(ku)\geq 1$. 故 $f(x)=a_n\geq 1$. 又 $f(0)=1$, $f(x)$ 的最小值为 1. 故 (D) 正确.

正确的选项为 **(A)(B)(D)**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.4.2 正切函数模型

定理 4.3 (正切函数模型) 设 I 是含 0 的开区间. 若可微函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 对所有 $x, y, x+y \in I$ 满足

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},$$

且分母不为 0, 则在该区间内其正则解模型为 $f(x) = \tan(\omega x)$, 其中 ω 为常数且 ωx 不跨越正切极点.

证明 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = 0$. 固定 x, 将原方程对 y 求导. 右端按商法则求导, 再令 $y = 0$ 并代入 $f(0) = 0$, 得

$$f'(x) = \frac{f'(0)(1-f(x)f(0)) + (f(x)+f(0))f(x)f'(0)}{(1-f(x)f(0))^2} = f'(0)(1+[f(x)]^2).$$

这是一阶可分离变量的微分方程. 令 $y = f(x)$ 及常数 $\omega = f'(0)$, 方程化为 $\frac{dy}{dx} = \omega(1+y^2)$. 分离变量积分得 $\arctan(y) = \omega x + C$. 由初始条件 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $f(x) = \tan(\omega x)$. □

例题 4.8 (2024 年 1 月浙江省宁波市慈溪期末第 6 题) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x+y)f(x)f(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$. 若 $f(1) = \sqrt{3}$, 则 $\sum_{k=1}^{2024} f(k) =$

A. 2024

B. $1012\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. 0

解 题目只要求整数点函数值之和. 我们直接由递推关系计算整数点即可.

令 $x = y = 0$, 得 $f(0)^3 = -f(0)$, 故 $f(0) = 0$. 在原式中令 $y = 1$ 并代入 $f(1) = \sqrt{3}$, 得

$$f(x+1)f(x)\sqrt{3} = f(x+1) - f(x) - \sqrt{3}.$$

只要 $1 - \sqrt{3}f(x) \neq 0$, 即有

$$f(x+1) = \frac{f(x)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}f(x)}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

从 $x=1$ 起逐个计算整数点, 得

$$f(2)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3},\qquad f(3)=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+3}=0.$$

再把 x 换成 $x+3$, 由 $f(3)=0$ 得

$$0=f(x+3)-f(x)-f(3)=f(x+3)-f(x),$$

故 $f(x+3)=f(x)$, 整数点函数值以 $\sqrt{3},-\sqrt{3},0$ 为周期循环, 一个周期之和为 0.

所求和式共 2024 项, $2024=3\times 674+2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2024}f(k)&=674\times(f(1)+f(2)+f(3))+f(2023)+f(2024)\\&=0+f(1)+f(2)=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0.\end{aligned}$$

答案为 0, 选 (D).

知乎@余命数

知乎@余命数

4.5 柯西方程的正则解

第4.2节 列出四类基本初等函数各自满足的函数方程. 反向的问题是, 一个未知函数满足其中某个方程时, 它能取的形式取决于对未知函数施加的正则假设. 本节处理连续性假设下的情形, 四类方程的解随之唯一确定.

4.5.1 四类柯西方程的连续解

知乎@余命数

定理 4.4 (柯西函数方程) 在连续性等正则条件下, 以下四类柯西函数方程的连续解为对应的基本初等函数.

加法型 若连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)=cx$.

指数型 若连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$, 则 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

乘法型 若连续函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $f(xy)=f(x)f(y)$, 则 $f(x)\equiv 0$ 或 $f(x)=x^k$.

对数型 若连续函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$, 则 $f(x)=c\ln x$; 当 $c\neq 0$ 时也可写作 $f(x)=\log_a x$ $(a=e^{1/c})$, 当 $c=0$ 时为零函数.

知乎@余命数

连续性的作用:解从有理数延拓到实数

证明 证明中假设 $f(x)$ 在其定义域上连续.

注 4.3
把解从有理数延拓到实数需要连续性, 其严格证明见 第四卷第 16 章. 赋值得到的有理数结论并不依赖连续性, 连续性只是延拓到实数时的正则假设.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

我们先把解从整数逐步延拓到实数. 由数学归纳法, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 及 $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. 由此对任意有理数 $r = p/q$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$), 有 $f(p) = pf(1)$ 且 $f(p) = f(q \cdot \frac{p}{q}) = qf(\frac{p}{q})$. 令 $c = f(1)$, 则 $pc = qf(p/q)$, 故 $f(p/q) = (p/q)c$. 即对任意有理数 $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = cr$. 对任意实数 $x \in \mathbb{R}$, 取有理数序列 $\{r_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. 利用连续性, 有

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} (cr_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = cx.$$

故加法型方程的连续解为 $f(x) = cx$.

其余三种方程经变量代换化为加法型方程.

- **指数型**: 若 $f(x)$ 不恒为零, 先令 $y = 0$ 得 $f(0) = 1$. 若存在 t 使 $f(t) = 0$, 则对任意 x 有 $f(x) = f((x-t)+t) = f(x-t)f(t) = 0$, 矛盾. 又 $f(x) = f(x/2)^2 > 0$, 故可构造 $g(x) = \ln f(x)$. $g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y)$. 故 $g(x) = cx$. 因此 $\ln f(x) = cx \implies f(x) = e^{cx} = (e^c)^x$. 令 $a = e^c$, 则 $f(x) = a^x$.
- **对数型**: 定义域为 $(0, +\infty)$. 构造 $g(t) = f(e^t)$. $g(u+v) = f(e^{u+v}) = f(e^u e^v) = f(e^u) + f(e^v) = g(u) + g(v)$. 故 $g(t) = ct$. 令 $t = \ln x$, 则 $f(x) = c\ln x$. 若 $c \neq 0$, 令 $a = e^{1/c}$, 则 $f(x) = \log_a x$; 若 $c = 0$, 则 $f \equiv 0$.
- **乘法型**: 定义域为 $(0, +\infty)$. 若 f 不恒为零, 同指数型可得 $f(x) > 0$. 构造 $g(t) = \ln f(e^t)$. $g(u+v) = \ln f(e^{u+v}) = \ln(f(e^u)f(e^v)) = \ln f(e^u) + \ln f(e^v) = g(u) + g(v)$. 故 $g(t) = ct$. 因此 $\ln f(e^t) = ct \implies f(e^t) = e^{ct} = (e^t)^c$. 令 $x = e^t$, 则 $f(x) = x^c$.

□

4.5.2 代数变式

标准的柯西方程经代数平移或调整, 可得到新的函数方程模型.

4.5.2.1 平移变式

定理 4.5 (柯西方程平移变式) 若连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + \lambda$, 其中 λ 为常数, 则其函数形式为 $f(x) = cx - \lambda$, 其中 c 为待定常数.

证明 为消去常数项 λ, 令 $g(x) = f(x) + \lambda$, 则

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) + \lambda = (f(x) + f(y) + \lambda) + \lambda \\ &= (f(x) + \lambda) + (f(y) + \lambda) = g(x) + g(y). \end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是 $g(x)$ 满足标准的加法型柯西方程, 故 $g(x)=cx$. 将 $f(x)=g(x)-\lambda$ 代回, 得 $f(x)+\lambda=cx$, 即 $f(x)=cx-\lambda$. □

例题 4.9 (2024 年 3 月安徽省安庆市二模第 9 题) (多选)已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$, 满足对任意的实数 x,y, 均有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$, 且当 $x>0$ 时, $f(x)<1$. 判断下列说法.

A. $f(0)=1$

B. $f(1)+f(-1)=1$

C. $f(x)$ 为减函数

D. 函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(0,1)$ 对称

解 这是 $\lambda=-1$ 的平移变式. 我们先用赋值法推出函数的性质, 再判断各选项.

对于 (A): 在方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)-1$ 中令 $x=y=0$, 得 $f(0)=f(0)+f(0)-1$, 解得 $f(0)=1$. 故 (A) 正确.

对于 (D) 与 (B): 在方程中令 $y=-x$ 以引入 $f(-x)$, 得 $f(x-x)=f(x)+f(-x)-1$, 即 $f(0)=f(x)+f(-x)-1$. 代入 $f(0)=1$, 得 $f(x)+f(-x)=2$. 该关系式是函数图像关于点 $(0,1)$ 中心对称的代数表述, 故 (D) 正确. 在其中令 $x=1$, 得 $f(1)+f(-1)=2$. 故 (B) 错误.

对于 (C): 任取 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 且 $x_2>x_1$, 令 $\Delta x=x_2-x_1>0$. 考察 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$. 由原方程, $f(x_1+\Delta x)=f(x_1)+f(\Delta x)-1$, 故 $f(x_2)-f(x_1)=f(\Delta x)-1$. 题设给出自变量大于 0 时函数值小于 1. 由 $\Delta x>0$ 知 $f(\Delta x)<1$, 即 $f(\Delta x)-1<0$. 故 $f(x_2)<f(x_1)$, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递减. 故 (C) 正确.

正确的选项是 **(A)(C)(D)**.

4.5.2.2 尺度变式

定理 4.6 (带尺度因子的乘法型方程模型) 若连续函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 满足 $f(xy)=\lambda f(x)f(y)$, 其中 $\lambda\neq0$, 其非平凡解的模型为 $f(x)=\frac{1}{\lambda}x^{\alpha}$.

证明 令 $g(x)=\lambda f(x)$, 则

$$\begin{aligned} g(xy)&=\lambda f(xy)=\lambda(\lambda f(x)f(y))\\ &=(\lambda f(x))(\lambda f(y))=g(x)g(y). \end{aligned}$$

于是 $g(x)$ 满足标准的柯西乘法型方程, 故其正则解为 $g(x)=x^{\alpha}$. 将 $f(x)=g(x)/\lambda$ 代回, 得 $\lambda f(x)=x^{\alpha}$, 解得 $f(x)=\frac{1}{\lambda}x^{\alpha}$. □

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

用导数判定抽象函数性质

例题 4.10 （多选）已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足对任意 $x,y\in(0,+\infty)$，均有 $f(xy)=2f(x)f(y)$，且 $f(2)=4$. 判断下列说法.

A. $f(1)=\frac{1}{2}$

B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D. $f(\frac{x}{2})=\frac{f(x)}{8}$

知乎@余命数

解 这是 $f(xy)=\lambda f(x)f(y)$ 形式的方程，其解为带系数的幂函数. 我们套用上面的模型确定解析式，再逐一检验选项.

据定理取参数 $\lambda=2$，函数模型为 $f(x)=\frac{1}{\lambda}x^{\alpha}=\frac{1}{2}x^{\alpha}$.

由题设 $f(2)=4$ 确定指数 α：$f(2)=\frac{1}{2}(2)^{\alpha}=4$，即 $2^{\alpha}=8$，解得 $\alpha=3$.

满足所有条件的函数唯一，解析式为 $f(x)=\frac{1}{2}x^3$.

- **对于 (A)**：$f(1)=\frac{1}{2}(1)^3=\frac{1}{2}$.(A) 正确.
- **对于 (B)**：定义域 $(0,+\infty)$ 不关于原点对称，无法讨论奇偶性.(B) 错误.
- **对于 (C)**：$f'(x)=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}x^3)=\frac{3}{2}x^2$. 在定义域 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，函数严格递增.(C) 正确.
- **对于 (D)**：比较方程两端. 左端 $f(\frac{x}{2})=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3=\frac{x^3}{16}$，右端 $\frac{f(x)}{8}=\frac{\frac{1}{2}x^3}{8}=\frac{x^3}{16}$. 两端相等.(D) 正确.

正确的选项是 **(A)(C)(D)**.

4.6 Jensen 方程与 Pexider 方程

柯西方程刻画加法结构保持者. 把视角从端点移到中点，或从一个函数推广到多个函数，就得到两类自然变体.

4.6.1 Jensen 方程的中点条件

Jensen 方程把加法条件换成中点条件：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{4-2}$$

满足此方程的连续函数就是一次函数.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 4.7 (Jensen 方程的连续解) 若连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 (4-2), 则 $f(x)=ax+b$, 其中 a,b 为常数.

证明 令 $g(x)=f(x)-f(0)$, 则 $g(0)=0$. 将 $f(x)=g(x)+f(0)$ 代入 (4-2):

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(0)=\frac{g(x)+f(0)+g(y)+f(0)}{2},$$

化简得

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2}. \tag{4-3}$$

在 (4-3) 中令 $y=0$, 利用 $g(0)=0$ 得 $g(x/2)=g(x)/2$.

令 $u=x/2,\ v=y/2$, 则

$$g(u+v)=g\left(\frac{2u+2v}{2}\right)=\frac{g(2u)+g(2v)}{2}.$$

由 $g(x/2)=g(x)/2$ 知 $g(2u)=2g(u), g(2v)=2g(v)$, 故

$$g(u+v)=\frac{2g(u)+2g(v)}{2}=g(u)+g(v).$$

g 满足加法型柯西方程, 由 第4.5节 的结论 $g(x)=ax$. 代回 $f(x)=g(x)+f(0)$, 得 $f(x)=ax+b$ $(b=f(0))$. □

例题 4.11 (多选)已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 均有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, 且 $f(1)=3, f(2)=5$. 判断下列说法.

A. $f(0)=1$

B. $f(x)=2x+1$

C. $f(x)$ 为奇函数

D. $f(3)=7$

注 4.4
Jensen 方程与柯西加法型方程的差别在于常数项 b. 平移 $g(x)=f(x)-f(0)$ 消去常数项后, 两个方程等价.

解 由 Jensen 方程的连续解 $f(x)=ax+b$, 代入 $f(1)=3, f(2)=5$ 得

$$a+b=3,\quad 2a+b=5.$$

解得 $a=2,\ b=1$, 故 $f(x)=2x+1$.

- **对于 (A):** $f(0)=2\cdot 0+1=1$.(A) 正确.
- **对于 (B):** 已求得 $f(x)=2x+1$.(B) 正确.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **对于 (C)**: $f(-x)=-2x+1$, 而 $-f(x)=-2x-1$, 两者不等, f 不是奇函数.(C) 错误.
- **对于 (D)**: $f(3)=2\cdot 3+1=7$.(D) 正确.

正确的选项是 **(A)(B)(D)**.

知乎@余命数

4.6.2 Pexider 方程的多函数加法分解

知乎@余命数

Pexider 方程把柯西加法型方程从一个函数推广到三个函数:

$$f(x+y)=g(x)+h(y). \tag{4-4}$$

知乎@余命数

其中 f,g,h 是三个待定函数. 在连续性假设下, 三个函数都是同一斜率的线性函数, 只差常数项.

知乎@余命数

定理 4.8 (Pexider 方程的连续解) 若连续函数 $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 (4-4), 则存在常数 c,a,b 使得

$$f(x)=cx+a+b,\quad g(x)=cx+a,\quad h(y)=cy+b.$$

证明 在 (4-4) 中令 $x=0$ 得 $f(y)=g(0)+h(y)$, 令 $y=0$ 得 $f(x)=g(x)+h(0)$.

记 $a=g(0), b=h(0)$, 则

知乎@余命数

$$h(y)=f(y)-a,\quad g(x)=f(x)-b.$$

知乎@余命数

代回 (4-4):

$$f(x+y)=(f(x)-b)+(f(y)-a)=f(x)+f(y)-(a+b).$$

令 $F(x)=f(x)-(a+b)$, 则

$$F(x+y)=f(x+y)-(a+b)=f(x)+f(y)-(a+b)-(a+b)=F(x)+F(y).$$

F 满足加法型柯西方程, 故 $F(x)=cx$. 代回得

知乎@余命数

$$f(x)=cx+a+b,\quad g(x)=cx+a,\quad h(y)=cy+b.$$

知乎@余命数

□

例题 4.12 (多选) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 f,g,h 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 均有 $f(x+y)=g(x)+h(y)$, 且 $g(0)=1$、$h(0)=2$、$f(1)=4$. 判断下列说法.

A. $f(x)=x+3$

B. $g(x)-h(x)=-1$

C. $f(x)$ 为奇函数

D. $f(2)=5$

解 由 Pexider 方程的连续解, $f(x)=cx+a+b$、$g(x)=cx+a$、$h(y)=cy+b$.
代入 $g(0)=a=1$、$h(0)=b=2$、$f(1)=c+a+b=c+3=4$, 解得 $c=1$.
故 $f(x)=x+3$、$g(x)=x+1$、$h(x)=x+2$.

- **对于 (A)**: $f(x)=x+3$.(A) 正确.
- **对于 (B)**: $g(x)-h(x)=(x+1)-(x+2)=-1$.(B) 正确.
- **对于 (C)**: $f(0)=3\neq 0$, f 不是奇函数.(C) 错误.
- **对于 (D)**: $f(2)=2+3=5$.(D) 正确.

正确的选项是 **(A)(B)(D)**.

注 4.5
Pexider 方程也有乘法版本 $f(x+y)=g(x)\,h(y)$. 在连续性且 f 不恒为零的条件下, 令 $y=0$ 得 $f(x)=g(x)\,h(0)$, 令 $x=0$ 得 $f(y)=g(0)\,h(y)$, 代回后 f 满足指数型柯西方程, 解为 $f(x)=A\,a^x$、$g(x)=B\,a^x$、$h(y)=\frac{A}{B}\,a^y$.

知乎@余命数

4.7 迭代函数方程

前几节处理的方程都含两个自变量 x,y. 还有一类方程只含单变量, 但函数以复合方式出现: $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, 等等. 这类方程靠迭代处理.

4.7.1 迭代与对合

记 $f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$, 称 $f^n(x)$ 为 f 的 n 次迭代.

定义 4.2 (对合) 若 $f(f(x))=x$ 对所有 x 成立, 则称 f 为一个**对合**. 对合就是恒等映射的迭代平方根.

对合的直观特征是两次操作回到原处. 常见的对合有 $f(x)=-x$、$f(x)=a-x$、$f(x)=1/x$ $(x\neq 0)$.

定理 4.9 (对合的构造) 设 g 是一一映射, 则 $f(x)=g^{-1}(-g(x))$ 是对合.

证明

$$f(f(x))=g^{-1}(-g(g^{-1}(-g(x))))=g^{-1}(-(-g(x)))=g^{-1}(g(x))=x.$$

□

例题 4.13 讨论满足 $f(f(x))=x$ 的连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的类型.

解 连续的对合必须严格单调. 若 f 严格递增且 $f(f(x))=x$, 假设存在 x_0 使 $f(x_0)>x_0$, 则 $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$, 与 $f(f(x_0))=x_0$ 矛盾; 同理 $f(x_0)<x_0$ 也矛盾. 故严格递增的对合只有 $f(x)=x$.

严格递减的连续对合有很多: $f(x)=a-x$ 是一族,更一般地 $f(x)=g^{-1}(-g(x))$ 对任意严格递增的连续 g 都给出严格递减的对合.

4.7.2 Babbage 方程的迭代根

对合是 $f^2(x)=x$ 的解. 推广到一般情形, 求 $f^n(x)=h(x)$ 的解 f, 称为 h 的**迭代 n 次根**. 当 $h(x)=x$ 时, 称为 Babbage 方程.

定理 4.10 (迭代根的单调性约束) 设 h 是一一映射, f 是 h 的连续迭代 n 次根.

1. 若 n 为偶数且 h 严格递减, 则连续迭代根不存在.
2. 若 n 为奇数, 则 h 的单调性与 f 一致.

证明 连续且一一的函数必然严格单调. 若 f 严格递增, 则 f^2 也严格递增, 进而 f^n 对偶数 n 严格递增. 若 f 严格递减, 则 f^2 严格递增, f^3 严格递减, 交替递推: f^n 在 n 为偶数时严格递增, 在 n 为奇数时与 f 同向.

当 n 为偶数时 $h=f^n$ 必须严格递增, 故 h 严格递减时无解. 当 n 为奇数时 h 的单调性就是 f 的单调性. □

例题 4.14 (1979 年 Putnam 竞赛 A2 题) 求常数 k 满足何种条件时, 存在连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得 $f(f(x))=kx^9$.

解 此即 $n=2, h(x)=kx^9$ 的迭代根问题.

当 $k<0$ 时 $h(x)=kx^9$ 严格递减. 由 定理 4.10, 偶数阶迭代根要求 h 严格递增, 故 $k<0$ 时无连续解.

当 $k\geq 0$ 时, 取 $f(x)=k^{1/4}x^3$, 则

$$f(f(x))=k^{1/4}(k^{1/4}x^3)^3=k^{1/4}\cdot k^{3/4}x^9=kx^9.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故 $k \geq 0$ 时存在连续解.

所求条件为 $k \geq 0$.

4.7.3 对交换性方程两边复合 f

对迭代根方程 $f^n(x) = h(x)$, 在两边复合 f:

$$f(h(x)) = f(f^n(x)) = f^n(f(x)) = h(f(x)).$$

于是 f 与 h 交换: $f \circ h = h \circ f$. 这是迭代根的必要条件, 可用于缩小候选范围.

例题 4.15 求所有整数值函数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 满足 $f(f(n)) = n + 1$.

知乎@余命数

解 对两边复合 f: $f(n+1) = f(f(f(n))) = f(n) + 1$.

由 $f(n+1) - f(n) = 1$ 得 $f(n) = n + m$(m 为整数常数). 代回原方程:

$$f(f(n)) = f(n+m) = n + 2m.$$

要求 $n + 2m = n + 1$, 即 $2m = 1$, 在整数范围内无解.

故不存在满足条件的整数值函数.

4.7.4 共轭化方法

设 h 的迭代根 f 可以写成 $f(x) = \phi^{-1}(\beta(\phi(x)))$, 其中 ϕ 是一一映射, β 是较简单的函数. 则

知乎@余命数

$$h(x) = f^n(x) = \phi^{-1}(\beta^n(\phi(x))),$$

即 $\phi(h(x)) = \beta^n(\phi(x))$. 于是求 h 的迭代根归结为求较简单函数 β 的迭代根, 再通过 ϕ 换回.

最常用的线性化有两种, 分别取 $\beta(x) = x + c$ 与 $\beta(x) = sx$, 对应 Abel 方程与 Schröder 方程:

- 若 $\phi(h(x)) = \phi(x) + 1$, 则 $f(x) = \phi^{-1}\left(\phi(x) + \frac{1}{n}\right)$ 是 h 的迭代 n 次根.
- 若 $\phi(h(x)) = s\,\phi(x)$ $(s \neq 0, 1)$, 则 $f(x) = \phi^{-1}\left(s^{1/n}\phi(x)\right)$ 是 h 的迭代 n 次根.

例题 4.16 求 $h(x) = x + 1$ 的迭代平方根, 即求 f 使 $f(f(x)) = x + 1$.

解 $h(x) = x + 1$ 本身就是线性形式, 取 $\phi(x) = x$, $\beta(x) = x + 1$, 满足 $\phi(h(x)) = h(x) = x + 1 = \phi(x) + 1$.

知乎@余命数

由共轭化公式, 迭代平方根为

$$f(x)=\phi^{-1}\left(\phi(x)+\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2}.$$

验证: $f(f(x))=f\left(x+\frac{1}{2}\right)=x+1$. 成立.

例题 4.17 求 $h(x)=4x$ 的迭代平方根.

解 取 $\phi(x)=x, \beta(x)=4x$, 满足 $\phi(h(x))=4x=4\,\phi(x)$, 即 Schröder 方程中 $s=4$.

迭代平方根为

$$f(x)=\phi^{-1}\left(4^{1/2}\phi(x)\right)=2x.$$

知乎@余命数

验证: $f(f(x))=2(2x)=4x$. 成立.

知乎@余命数

注 4.6

共轭化依赖合适的 ϕ 的选取. 当 h 本身已是平移或伸缩时, ϕ 取恒等映射即可. 当 h 形式更复杂时, 求 ϕ 本身就是解一个函数方程(Abel 方程或 Schröder 方程), 难度不低于原问题. 共轭化的价值在于把一个难问题转化为另一个可能更简单的问题.

4.8 嵌套根式与函数方程

拉马努金提出过一个著名的嵌套根式:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}=3.$$

知乎@余命数

这个等式的验证过程展示了函数方程的一种独特用法, 把无限嵌套结构转化为函数方程, 再通过估值夹逼确定唯一解.

4.8.1 从嵌套根式到函数方程

将上述根式推广为含参数 x 的形式:

$$f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}}. \tag{4-5}$$

对 (4-5) 两边平方:

知乎@余命数

$$[f(x)]^2=1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根号下的嵌套结构与 $f(x)$ 的定义 (4-5) 形式相同, 只是把参数 x 换成了 $x+1$:

$$\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}=f(x+1).$$

代入即得 $f(x)$ 满足的函数方程

$$[f(x)]^2=1+x\,f(x+1),\quad f(x)\geq 0. \tag{4-6}$$

4.8.2 多项式试探的猜测与验证

(4-6) 不属于已知的柯西方程族. 一个直接策略是猜测解的形式. 设 $f(x)$ 为 n 次多项式, 则左端 $[f(x)]^2$ 为 $2n$ 次, 右端 $1+x\,f(x+1)$ 为 $n+1$ 次. 两端次数相等要求 $2n=n+1$, 即 $n=1$.

设 $f(x)=ax+b$, 代入 (4-6):

$$(ax+b)^2=1+x(a(x+1)+b)=1+x(ax+a+b).$$

展开并比较系数:

$$a^2x^2+2ab\,x+b^2=ax^2+(a+b)x+1.$$

对应系数相等:

$$a^2=a,\quad 2ab=a+b,\quad b^2=1.$$

由 $a^2=a$ 得 $a=1$(舍去 $a=0$, 否则 f 退化为常数). 代入 $2ab=a+b$: $2b=1+b$, 得 $b=1$. 验证 $b^2=1$: 成立.

故 $f(x)=x+1$ 是 (4-6) 的解. 代入 (4-5) 得

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}}.$$

取 $x=2$ 即得拉马努金等式: $3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}$.

4.8.3 估值夹逼证明唯一性

$f(x)=x+1$ 是 (4-6) 的解, 要说明它是 (4-5) 所定义的那个 f, 还需证明唯一性.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

定理 4.11 (嵌套根式的唯一性) 设 $f(x)$ 满足函数方程 (4-6) 且对所有 $x \geq 1$ 满足估计

$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) \leq 2(x+1). \tag{4-7}$$

则 $f(x) = x+1$.

证明 在 (4-7) 中将 x 替换为 $x+1$:

$$\frac{x+2}{2} \leq f(x+1) \leq 2(x+2).$$

代入函数方程 $[f(x)]^2 = 1 + x\,f(x+1)$, 得

$$1 + x \cdot \frac{x+2}{2} \leq [f(x)]^2 \leq 1 + x \cdot 2(x+2).$$

把 $x(x+2) = (x+1)^2 - 1$ 代入, 得

$$\frac{1+(x+1)^2}{2} \leq [f(x)]^2 \leq 2(x+1)^2 - 1.$$

而 $1 + (x+1)^2 \geq (x+1)^2$, 开方得

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq \sqrt{2}\,(x+1).$$

与原估计 (4-7) 比较, 上下界的比例从 2 收缩到了 $\sqrt{2}$. 重复此过程 k 次, 得

$$\frac{x+1}{2^{1/2^k}} \leq f(x) \leq 2^{1/2^k}(x+1).$$

令 $k \to \infty$, $2^{1/2^k} \to 1$, 由夹逼定理得 $f(x) = x+1$. □

注 4.7

估计 (4-7) 本身可从嵌套结构直接推出. 下界: 每层根号内的 1 不小于 0, 放缩得 $f(x) \geq \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}} = x$. 上界: 每层根号内的 1 用更大的数替换, 得

$$f(x) \leq \sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)\cdots}}} \leq 2(x+1).$$

由 $x \geq \frac{x+1}{2}$ $(x \geq 1)$, 这组估计蕴含 (4-7), 足以启动夹逼迭代.

例题 4.18 求嵌套根式 $g(x) = \sqrt{x + (x+1)\sqrt{(x+1) + (x+2)\sqrt{\cdots}}}$ 的值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 两边平方：$[g(x)]^2 = x + (x+1)\,g(x+1)$. 猜测 $g(x) = ax + b$, 代入：

$$(ax+b)^2 = x + (x+1)(a(x+1)+b).$$

展开比较系数：

$$a^2x^2 + 2ab\,x + b^2 = ax^2 + (2a+b+1)x + (a+b).$$

由 $a^2 = a$ 得 $a = 1$. 由 $2ab = 2a + b + 1$ 得 $2b = b + 3$, 故 $b = 3$. 验证常数项：$b^2 = 9$, $a + b = 4$, 不符.

线性猜测失败, 改设 $g(x) = x + c$, 即 $a = 1$, 直接代入：

$$(x+c)^2 = x + (x+1)(x+1+c).$$

左端 $x^2 + 2cx + c^2$, 右端 $x + (x+1)(x+1+c) = x^2 + (3+c)x + (1+c)$. 比较得 $2c = 3 + c$ 即 $c = 3$, 常数项 $c^2 = 9$ vs $1 + c = 4$, 仍不符.

此根式不存在线性解. 次数匹配条件 $2n = n + 1$ 已限定 $n = 1$, 多项式试探法在此失效, 应转向非多项式方法.

4.9 解题策略小结

函数方程没有万能解法, 但有一些反复有效的策略. 面对一个新问题时, 以下思路可以作为切入点.

4.9.1 识别标准模型

许多函数方程是基本初等函数的代数性质的推广. 遇到方程时先辨认它是否接近某个已知模型：

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 加法型, 线性函数 $f(x) = cx$.
- $f(x+y) = f(x)f(y)$, 指数型, $f(x) = a^x$.
- $f(xy) = f(x)f(y)$, 乘法型, $f(x) = x^k$.
- $f(xy) = f(x) + f(y)$, 对数型, $f(x) = \log_a x$.
- $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, Jensen 型, $f(x) = ax + b$.
- $f(x+y) = g(x) + h(y)$, Pexider 型, 三个线性函数.

方程带有平移常数或尺度因子时, 先做变量代换消去常数项, 化回标准形式.

4.9.2 赋值探路

在方程中代入特殊值, 提取函数的关键信息：

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 令 $x=y=0$ 求 $f(0)$.
- 令 $y=-x$ 引入 $f(-x)$, 讨论奇偶性.
- 令 $y=x$ 得到 $f(2x)$ 与 $f(x)$ 的关系.
- 令 $y=1$ 或 $y=x$ 获取递推关系.

赋值本身不能给出完整解, 但能缩小候选范围, 为后续步骤提供线索.

4.9.3 变量代换消项

当方程含两个变量 x,y 时, 选择 y 关于 x 的特殊代换, 使等式两端的某些项相等或抵消:

知乎@余命数

- 令 y 等于使某项为零的值.
- 令 y 等于使左端某项等于右端某项的值, 触发抵消.
- 对称方程(x,y 可交换)与非对称方程联用, 交换 x,y 得到新方程, 与原方程联立求解.

4.9.4 模型假设与待定系数

当赋值和代换不足以确定解时, 假设解属于某个函数族(线性函数、多项式、指数函数等), 用待定系数法求解, 再验证所得解确实满足原方程.

多项式假设的次数判定, 若 f 为 n 次多项式, 比较 $f(x+y)$ 与 $f(x)+f(y)$ 两端的次数, 可以确定 n 的上限.

4.9.5 单调性与有界性

从方程本身提取函数的性质:

- 令 $x_2>x_1$, 考察 $f(x_2)-f(x_1)$ 的符号, 判定单调性.
- 若 $f(x)>0$ 对所有 x 成立, 可取对数转化为加法型方程.
- 若 f 有界且满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 则 $f\equiv 0$(有界加性函数必为零).

4.9.6 迭代与复合

当方程含 $f(f(x))$ 或 $f(\alpha(x))$ 时:

- 对两边复合 f, 将迭代根方程转化为交换性方程 $f\circ h=h\circ f$.
- 研究 α 的迭代轨道 (splinter), 若 $\alpha^m(x)=x$, 则对方程反复复合 m 次可能直接解出 f.
- 利用共轭化, 设 $f(x)=\phi^{-1}(\beta(\phi(x)))$, 将求 f 转化为求较简单的 β.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.9.7 嵌套结构的方程化

无限嵌套根式或无限连分式可以平方或取倒数, 转化为函数方程. 具体步骤:

- 引入参数 x, 把常数嵌套推广为 $f(x)$ 的方程.
- 猜测解的形式(通常是一次函数), 用待定系数法求解.
- 通过估值夹逼证明唯一性, 建立上下界, 反复迭代收紧, 取极限.

注 4.8

以上策略并非互斥, 实际解题中往往多策略联用. 先赋值提取信息, 再识别模型或假设函数族, 最后验证并证明唯一性, 是一条常见的路径.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

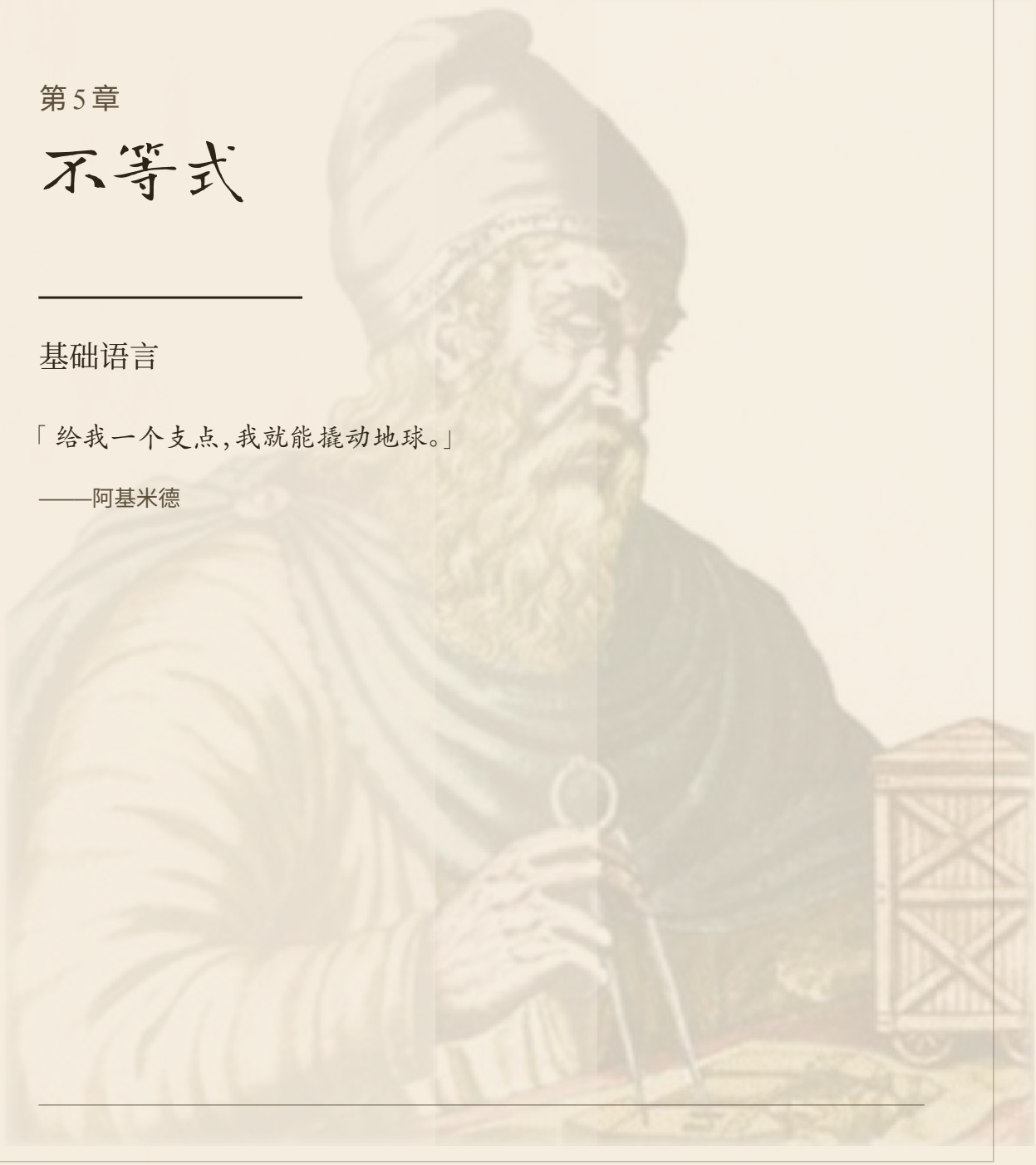
第 5 章

不等式

基础语言

「给我一个支点，我就能撬动地球。」

——阿基米德



第五章 不等式

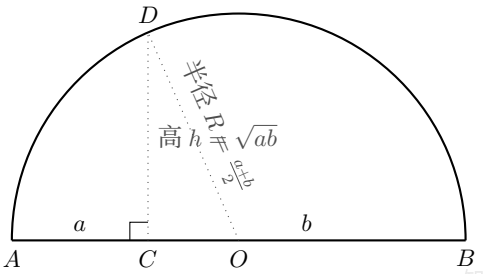


图 5.1 算术平均与几何平均的几何关系

我们研究量与量之间的大小关系. 不等式把这种关系写成严格的代数语言. 本章从最熟悉的算术-几何平均不等式出发, 逐步引入柯西不等式、排序不等式、伯努利不等式与糖水不等式, 并讨论它们在求最值、解方程和证明不等式中的应用.

本章分为两部分. 前半部分建立经典不等式本身.

- **算术-几何平均不等式**. 证明、推广及其在求最值问题中的应用.
- **柯西不等式**. 向量形式与代数形式的证明与应用.
- **排序不等式、伯努利不等式与糖水不等式**. 组合、分析与分式结构中的基本工具.

后半部分讨论证明不等式的七种思想.

- **放缩思想**. 保持方向, 剥离次要因素.
- **局部化与切线法**. 化整体为局部, 用支撑线夹住曲线.
- **构造思想**. 引入新对象, 让代数关系显形.
- **齐次化与规范化**. 次数分析, Schur 与 Muirhead.
- **代数代换**. 化约束为自由, Ravi、乘积与三角代换.
- **排序与调整**. 设序与磨平, 切比雪夫与调整法.
- **凸性思想**. 琴生不等式作为母体, 与切线法互为表里.

5.1 均值不等式

5.1.1 二元情形

我们先讨论两个变量的情形.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.1 (二元算术-几何平均不等式) 对任意非负实数 a, b, 恒有

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号成立的充分必要条件是 $a = b$.

证明 (代数证明) 设 a, b 是两个非负实数. 实数的平方非负, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$. 展开此完全平方式, 得 $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$. 移项整理, 即得 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 进而 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

等号成立的条件是 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0$, 即 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, 故 $a = b$. □

证明 (几何证明) 我们给出一个几何证明. 设半圆的直径为 $a + b$.

知乎@余命数

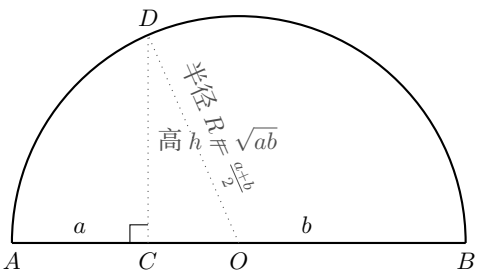


图 5.2　AM-GM 不等式的几何解释

知乎@余命数　知乎@余命数

在图中, 线段 AB 为半圆的直径, 其长度为 $a + b$. 点 C 在直径上, 满足 $AC = a, CB = b$. 半圆的半径 $R = \frac{a+b}{2}$.

过点 C 作直径的垂线, 交半圆于点 D. 在直角三角形 ADB 中(由直径所对圆周角为直角可知), 由射影定理, $CD^2 = AC \cdot CB$. 故 $CD = \sqrt{ab}$.

在直角三角形 OCD 中, 斜边 OD 是半圆的半径, 其长度为 $\frac{a+b}{2}$, 直角边 CD 的长度为 $\sqrt{ab}$. 直角三角形斜边长不小于任一直角边, 故 $OD \geq CD$. 即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

等号成立的条件是 $\triangle OCD$ 退化, 即点 C 与圆心 O 重合. 此时 $AC = CB$, 即 $a = b$. □

例题 5.1　求函数 $f(x) = x + \frac{9}{x}$ 在 $x > 0$ 时的最小值.

解 由 $x > 0, 9/x$ 也为正数. 对 x 和 $9/x$ 应用 AM-GM 不等式,

知乎@余命数

$$f(x) = x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{9} = 6$$

函数值 $f(x)$ 的下界为 6. 为确认 6 是否为最小值, 检验等号能否成立. 等号成立的条件是 $x = \frac{9}{x}$, 即 $x^2 = 9$. 由 $x > 0$, 解得 $x = 3$.

$x = 3$ 时 $f(x) = 6$, 故函数 $f(x)$ 的最小值为 6.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 5.1 (应用 AM-GM 不等式求最值的三个条件)

- **各项非负**: 不等式中的各项必须为非负数.
- **和或积为定值**: 求和的最小值时, 各项的乘积须为定值; 求积的最大值时, 各项的和须为定值.
- **等号可取**: 使等号成立的条件须能在变量的允许取值范围内达到.

这三条是应用 AM-GM 不等式时的必要条件.

5.1.2 多元情形

定理 5.2 (多元算术-几何平均不等式) 对任意 n 个非负实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 恒有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

等号成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

证明 (柯西归纳法) 柯西归纳法以向前推广 ($n \to 2n$) 与向后递推 ($n \to n-1$) 配合奠基 $n = 2$, 逐步覆盖一切正整数 $n \geq 2$.

先作向前推广. 设不等式对 n 个非负实数成立, 推证其对 $2n$ 个非负实数 $a_1, \dots, a_{2n}$ 亦成立. 将这 $2n$ 个数平分为两组, 每组 n 个, 对各组应用 AM-GM 不等式得

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$
$$\frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}}.$$

再把这两组数的算术平均值视为两个新的非负数, 应用二元 AM-GM 不等式, 得

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}\right) \\
&\geq \sqrt{\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}\right)} \\
&\geq \sqrt{(\sqrt[n]{a_1 \dots a_n})(\sqrt[n]{a_{n+1} \dots a_{2n}})} \\
&= \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \dots a_{2n}}} = \sqrt[2n]{a_1 \dots a_{2n}}.
\end{aligned}$$

命题遂由 n 传至 $2n$; 连同 $n = 2$ 的奠基, 命题对所有 $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 成立.

再作向后递推. 设不等式对 n 个非负实数成立, 推证其对 $n-1$ 个非负实数 $a_1, \dots, a_{n-1}$ 亦成立. 为补足第 n 个数, 取这 $n-1$ 个数的算术平均值 $A_{n-1} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$, 令 $a_n = A_{n-1}$. 将这 n 个数代入已知的 n 元 AM-GM 不等式, 得

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_{n-1} a_n}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

左端因 $a_1+\cdots+a_{n-1}=(n-1)A_{n-1}$ 化为 A_{n-1}，右端代入 $a_n=A_{n-1}$ 即 $\sqrt[n]{(a_1\dots a_{n-1})A_{n-1}}$，故

$$\begin{aligned}
&A_{n-1}\geq\sqrt[n]{(a_1\dots a_{n-1})A_{n-1}},\\
&A_{n-1}^n\geq(a_1\dots a_{n-1})A_{n-1} && \text{（两边取 } n \text{ 次方）},\\
&A_{n-1}^{n-1}\geq a_1\dots a_{n-1} && \text{（}A_{n-1}>0 \text{ 时两边同除以 } A_{n-1}\text{）},\\
&A_{n-1}\geq\sqrt[n-1]{a_1\dots a_{n-1}} && \text{（两边开 } n-1 \text{ 次方）}.
\end{aligned}$$

此即 $\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\geq\sqrt[n-1]{a_1\dots a_{n-1}}$. 若 $A_{n-1}=0$，则所有 $a_i=0$，不等式平凡成立.

向前推广使命题遍及 2 的一切幂，向后递推又把相邻两幂之间的整数尽数填满，二者合之即覆盖一切正整数 $n\geq 2$. 等号条件亦可由递推得到：$n=2$ 时两数相等；从 n 推到 $2n$ 时，等号要求两组内部均相等且两组算术平均值相等，因而 $2n$ 个数全相等；从 n 推到 $n-1$ 时，等号要求 $a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=A_{n-1}$，若 $A_{n-1}=0$ 则所有数均为 0. 因此等号成立当且仅当所有数相等. □

5.1.3 加权形式

定理 5.3 (加权 AM-GM 不等式) 对 n 个非负实数 $a_1,\dots,a_n$ 和 n 个满足 $\sum_{i=1}^n w_i=1$ 的正权重 $w_1,\dots,w_n$，恒有

$$w_1a_1+\cdots+w_na_n\geq a_1^{w_1}\dots a_n^{w_n}$$

等号成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证明 若某个 $a_i=0$，则右侧 $a_1^{w_1}\dots a_n^{w_n}=0$. 若所有 a_i 均为 0，等号成立；若至少有一个 $a_i>0$，由各权重均为正，左侧 $\sum w_ia_i>0$，不等式严格成立. 下设 $a_i>0$.

该定理可由琴生不等式与对数函数的上凸性直接导出. 函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是上凸函数，由琴生不等式有

$$\sum_{i=1}^n w_i\ln a_i\leq\ln\left(\sum_{i=1}^n w_ia_i\right).$$

利用对数性质，左端化为 $\ln(a_1^{w_1}\dots a_n^{w_n})$，故 $\ln(a_1^{w_1}\dots a_n^{w_n})\leq\ln(\sum w_ia_i)$. 对数函数单调递增，此不等式等价于 $a_1^{w_1}\dots a_n^{w_n}\leq\sum w_ia_i$. $\ln x$ 为严格上凸函数，$a_i>0$ 时等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 结合零值情形，原命题的等号条件成立. □

算术平均与几何平均之间的大小关系，只是更广泛的均值序的一部分. 引入调和平均与平方平均后，可得完整的均值不等式链，详见 第5.3节.

注 5.2 (关于柯西归纳法) 柯西归纳法把向前推广与向后递推结合起来. 更多细节见https://zutomayo.org/zh-cn/posts/math_and_cauchy_induction/.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.2 均值不等式的提示

我们使用 AM-GM 不等式时, 必须保证各项非负、和或积为定值, 且等号条件在允许范围内可达. 否则结论可能不成立. 下面用例子说明违反这些前提会得到什么结果.

5.2.1 忽略非负前提

AM-GM 不等式仅对非负实数成立. 把它推广到全体实数会产生谬误.

例题 5.2 (变量可为负数) 设 a,b 为实数, $a+b=2$. 求 ab 的最大值.
错误分析. 不加分辨地使用 AM-GM 不等式, 会得到 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 即 $1 \geq \sqrt{ab}$, 从而 $ab \leq 1$.
这个结论不能成立. 取 $a=3, b=-1$, 满足 $a+b=2$, 但 $ab=-3$. 此时 $\sqrt{ab}$ 在实数范围内无意义, 不等式的前提已不成立.
正确分析. 此问题应视为二次函数求最值. 令 $b=2-a$, 则 $ab=a(2-a)=-a^2+2a=-(a-1)^2+1$. 这是开口向下的抛物线, 在顶点 $a=1$(此时 $b=1$)处取得最大值 1.
若题目指明 a,b 为非负实数, 两种方法的结果相同.

例题 5.3 设 x 为非零实数, 求 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的最值.

解 错误分析. 忽略 x 的符号, 直接应用 AM-GM 不等式, 会得到

$$x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

从而断定函数的最小值为 2. 此推理只在 $x>0$ 时有效, 因为只有 x 为正时, x 和 $1/x$ 才同时满足非负前提.

正确分析. 按 x 的符号分别讨论.

- 当 $x>0$ 时, x 和 $1/x$ 均为正数. 由 AM-GM 不等式, $f(x)=x+\frac{1}{x} \geq 2$. 等号在 $x=1$ 时成立. 在此区间, 函数的最小值为 2.
- 当 $x<0$ 时, x 和 $1/x$ 均为负数, 不满足 AM-GM 不等式的非负前提. 令 $x=-t$, 其中 $t>0$.

$$f(x) = -t + \frac{1}{-t} = -\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

由 $t>0$, 有 $t+\frac{1}{t} \geq 2$. 因此 $f(x)=-\left(t+\frac{1}{t}\right) \leq -2$. 等号在 $t=1$, 即 $x=-1$ 时成立. 在此区间, 函数的最大值为 -2.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

该函数没有全局最小值或最大值. 它在 $x>0$ 的部分有局部最小值 2, 在 $x<0$ 的部分有局部最大值 -2.

例题 5.4　设实数 x,y 满足 $x+y=8$. 求乘积 $P=xy$ 的取值范围.

解 错误分析. 应用 AM-GM 不等式:

$$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\implies\frac{8}{2}\geq\sqrt{P}\implies 4\geq\sqrt{P}$$

两边平方得 $16\geq P$. 结论是 P 的最大值为 16.

这个推理有两处问题.$\sqrt{xy}$ 只在 $xy\geq 0$ 时有意义, 且 AM-GM 本身要求 x,y 非负. 若允许 x,y 为任意实数, 例如 $x=10,y=-2$, 此时 $x+y=8$, 但 $xy=-20$, $\sqrt{xy}$ 在实数域内无意义.

正确分析. 此问题不应预设 x,y 的符号, 应使用代数方法. 由 $y=8-x$, 乘积 P 表示为关于 x 的函数:

$$P(x)=x(8-x)=-x^2+8x$$

这是开口向下的二次函数. 配方:

$$P(x)=-(x^2-8x)=-((x-4)^2-16)=16-(x-4)^2$$

由 $(x-4)^2\geq 0$, 故 $P(x)\leq 16$. 当 $x=4$(此时 $y=4$)时, $P(x)$ 取得最大值 16.

x 可取任意实数, $(x-4)^2$ 可无限增大, 故 $P(x)$ 没有最小值. 因此, P 的取值范围是 $(-\infty,16]$.

最大值为 16, 且在 $x=y=4$ 处取得; 但 AM-GM 不等式没有给出 P 的下界, 因此不能代替完整的代数分析.

5.2.2 和或积非定值

应用不等式求最值时, 须构造出常数界. 若不等式的一侧仍是变量, 则无法确定最值.

例题 5.5 (界为变量) 设 $x>0$, 求 $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$ 的最小值.
错误分析. 直接应用 AM-GM 不等式:

$$x^3+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x^3\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{x^2}=2x$$

不等式 $f(x)\geq 2x$ 虽成立, 但未给出常数下界.$2x$ 随 x 变化, 不能据此确定 $f(x)$ 的最小值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

正确分析. 须通过拆项构造乘积为定值的形式.

$$f(x)=x^3+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}\geq 4\sqrt[4]{x^3\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1}{3x}}=4\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$$

取等条件为 $x^3=\frac{1}{3x}$, 即 $x^4=1/3$, $x=1/\sqrt[4]{3}$. 故最小值为 $4/\sqrt[4]{27}$.

5.2.3 取等条件无法满足

即使求出一个常数界, 也须验证使等号成立的条件能否在定义域内达到.

例题 5.6 (取等条件互相矛盾) 设 x,y 为正实数,$x\neq y$. 求 $f(x,y)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2$ 的最小值.

错误分析. 分别对括号内的两项应用 AM-GM 不等式: $x+\frac{1}{x}\geq 2$, 等号在 $x=1$ 时成立. $y+\frac{1}{y}\geq 2$, 等号在 $y=1$ 时成立.

因此, $f(x,y)\geq 2^2+2^2=8$.

然而使最终等号成立的条件是 $x=1$ 且 $y=1$, 这与题设 $x\neq y$ 矛盾. 因此 8 不是可取到的最小值.

正确分析. 将 $f(x,y)$ 视为关于 t 的函数 $g(t)=(t+1/t)^2$ 在 $t=x$ 和 $t=y$ 处的取值之和. $g'(t)=2(t+1/t)(1-1/t^2)$. 在 $(0,1)$ 上 $g'(t)<0$, 在 $(1,\infty)$ 上 $g'(t)>0$. 函数在 $t=1$ 处取得最小值 4. 由 $x\neq y$, $g(x)+g(y)$ 不能同时取到 $4+4=8$, 故 $f(x,y)>8$. 另一方面, 取 $x=1$, $y=1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, 则 $x\neq y$, 且当 $\varepsilon\to 0^+$ 时

$$f(1,1+\varepsilon)=4+\left(1+\varepsilon+\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^2\to 8.$$

因此, 在约束 $x,y>0$ 且 $x\neq y$ 下, $f(x,y)$ **没有最小值**; 其下确界为 8.

用导数讨论最值

例题 5.7 (取等点不在定义域内) 设 $x\geq 2$, 求 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的最小值.

错误分析. $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$. 由此得出最小值为 2.

这个结论错误. 等号成立的条件是 $x=1$, 但该点不在定义域 $[2,+\infty)$ 内. 函数值可以大于 2, 但永远无法达到 2.

正确分析. 须分析函数在指定定义域上的单调性. $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$. 当 $x\geq 2$ 时, $x^2\geq 4$, $0<\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{4}$, 故 $f'(x)>0$. 函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上严格单调递增. 其最小值在区间的左端点 $x=2$ 处取得. 最小值为 $f(2)=2+\frac{1}{2}=2.5$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.3 均值不等式链

上一节已证明算术平均不小于几何平均. 下面我们引入调和平均与平方平均, 给出完整的不等式链.

定义 5.1 (调和平均与平方平均) 对 n 个正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$:

- **调和平均 (Harmonic Mean, HM)** 定义为

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

- **平方平均 (Quadratic Mean, QM)** 定义为

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

调和平均等于倒数的算术平均之倒数. 平方平均等于平方和的算术平均之根. 这四种平均值之间存在固定的序关系.

定理 5.4 (均值不等式链) 对任意 n 个正实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 恒有

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}$$

即 $H_n \le G_n \le A_n \le Q_n$. 在任意一步不等式中, 等号成立的充分必要条件均为 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

证明 上一节已证 $G_n \le A_n$. 这里只证其余两个不等关系.

先证 $H_n \le G_n$. 考虑 n 个正实数 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$, 对它们应用算术-几何平均不等式, 得

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}$$

整理得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} \ge \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}}$$

即 $\frac{1}{H_n} \ge \frac{1}{G_n}$. 各项均为正数, 两边取倒数, 不等号方向反转, 即得 $H_n \le G_n$.

知乎@余命数

再证 $A_n \le Q_n$. 此不等式等价于 $(\frac{\sum a_i}{n})^2 \le \frac{\sum a_i^2}{n}$, 可由柯西不等式给出. 取两个 n 维向量 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 和 $\mathbf{u} = (1, \dots, 1)$, 由柯西不等式 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})^2 \le \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2$ 得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 1 \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \right),$$

即

$$\left(\sum a_i \right)^2 \le \left(\sum a_i^2 \right) \cdot n.$$

不等式两边同除以 n^2, 得

$$\frac{(\sum a_i)^2}{n^2} \le \frac{\sum a_i^2}{n},$$

即 $(\frac{\sum a_i}{n})^2 \le \frac{\sum a_i^2}{n}$. 各项为正, 两边开平方根, 即得 $A_n \le Q_n$.

等号条件分别继承自所用的不等式.$H_n \le G_n$ 中等号当且仅当 $1/a_1 = \cdots = 1/a_n$, 即 $a_1 = \cdots = a_n$; $G_n \le A_n$ 的等号条件为 $a_1 = \cdots = a_n$; $A_n \le Q_n$ 中柯西等号当且仅当 $(a_1, \dots, a_n)$ 与 $(1, \dots, 1)$ 共线, 也即 $a_1 = \cdots = a_n$. 因此链中任意一步等号成立的充分必要条件均为所有数相等. □

例题 5.8 已知 x, y 为正实数, 且 $x + y = 4$. 求 $x^2 + y^2$ 的最小值.

解 我们用 $A_2 \le Q_2$:

$$\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

将 $x + y = 4$ 代入, 得

$$\frac{4}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$2 \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

两边均为正, 两边平方, 得

$$4 \le \frac{x^2+y^2}{2}$$

由此 $x^2 + y^2 \ge 8$.

等号成立当且仅当 $x = y$. 结合 $x + y = 4$, 解得 $x = y = 2$.

$x = y = 2$ 使等号可以取到, 故 $x^2 + y^2$ 的最小值为 8.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.4 均值不等式的应用技巧

我们常用均值不等式处理和与积的最值问题. 许多问题的代数结构须先变形才满足 AM-GM 的前提. 本节讨论几种常用的变形技巧.

5.4.1 拆项与凑项创造定值

知乎@余命数

算术-几何平均不等式要求各项之和或各项之积为定值. 当条件不满足时, 可拆分或添加项, 构造新的定值表达式.

例题 5.9 求函数 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ 在 $x>0$ 时的最小值.

知乎@余命数

解 表达式 $x^2+\frac{2}{x}$ 的两项之积 $x^2\cdot\frac{2}{x}=2x$ 随 x 变化, 不能直接应用二元均值不等式.

为得到定值乘积, 须消去变量 x.x^2 与两个 $1/x$ 相乘后乘积为常数, 故把 $\frac{2}{x}$ 拆成 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$.

原函数变为三项之和.

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$$

这三项均为正数, 且乘积为 $x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=1$, 是定值.

应用三元 AM-GM 不等式,

知乎@余命数

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3\sqrt[3]{1}=3$$

下界为 3. 等号要求所有项相等, 即 $x^2=\frac{1}{x}$. 解得 $x^3=1$, 又 $x>0$, 故 $x=1$.

存在 $x=1$ 使 $f(1)=3$, 因此函数 $f(x)$ 的最小值为 3.

5.4.2 变量代换

当变量受到条件约束时, 引入新变量常可简化代数结构.

例题 5.10 设 a,b,c 为三角形的三边长. 证明, 得

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

解 不等式左侧分母为三角形三边的线性组合. 通过变量代换可简化问题.

定义新变量 $x=b+c-a$、$y=c+a-b$、$z=a+b-c$. 由三角形不等式(任意两边之和大于第三边), x,y,z 均为正数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

反解得

$$y+z=(c+a-b)+(a+b-c)=2a \implies a=\frac{y+z}{2}$$
$$z+x=(a+b-c)+(b+c-a)=2b \implies b=\frac{z+x}{2}$$
$$x+y=(b+c-a)+(c+a-b)=2c \implies c=\frac{x+y}{2}$$

代入原不等式左侧：

$$\begin{aligned}\text{LHS}&=\frac{(y+z)/2}{x}+\frac{(z+x)/2}{y}+\frac{(x+y)/2}{z}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)\end{aligned}$$

整理后得到互为倒数的项对.

$$\text{LHS}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right]$$

对每一对应用二元均值不等式，例如 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$. 于是

$$\text{LHS}\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3$$

等号成立的条件是 $\frac{x}{y}=1,\frac{y}{z}=1,\frac{z}{x}=1$，即 $x=y=z$. 这对应 $b+c-a=c+a-b=a+b-c$，解得 $a=b=c$. 因此当三角形为等边三角形时，等号成立.

5.4.3 利用取等条件构造变形

对称结构的不等式，极值点通常在所有变量相等时取到. 这一事实可反过来推断拆分方式.

例题 5.11 求函数 $f(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ 在 $x>0$ 时的最小值.

解 为构造乘积为定值的形式，须拆分 $2x$. 拆法由均值不等式的取等条件反推.

设函数在 x_0 处取得最小值，应用不等式的各项必须相等. 将 $2x$ 拆为 n 个相等的项 $\frac{2x}{n}$，与 $\frac{1}{x^2}$ 一同应用 $n+1$ 元均值不等式. 为使乘积为定值，各项中 x 的总幂次应为零.

乘积为 $\left(\frac{2x}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{x^2}$，其中 x 的幂次为 $n-2$. 令 $n-2=0$，得 $n=2$.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此把 $2x$ 拆成 $x+x$. 对 $x, x, \frac{1}{x^2}$ 三项应用均值不等式,

$$f(x)=x+x+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}}=3\sqrt[3]{1}=3$$

等号成立条件为 $x=\frac{1}{x^2}$, 即 $x^3=1$. 由 $x>0$, 解得 $x=1$.

$x=1$ 时, $f(1)=2+1=3$. 最小值可以取到. 故函数 $f(x)$ 的最小值为 3.

5.4.4 整数拆分中的乘积最值

前面几个例子都在实数范围内寻找极值. 当变量被迫取整数时, 均值不等式的取等条件常常无法满足, 最优解要另想办法.

例题 5.12 (拆数使乘积最大) 把正整数 1976 拆成若干个正整数之和, 使这些数的乘积最大, 求最大的乘积.

解 先让题面变小. 记 $M(n)$ 为把 n 拆开所能得到的最大乘积, 从较小的数数起.

$$M(2)=2,\quad M(3)=3,\quad M(4)=2\times 2=4,$$

$$M(5)=3\times 2=6,\quad M(6)=3\times 3=9,\quad M(7)=3\times 2\times 2=12.$$

出现的因数只有 2 与 3, 由此猜想, 最优的拆法只用 2 与 3. 要断定这件事, 可以从任意一个最优拆法出发, 用改动把它整理成只用 2 与 3 的样子.

若某个因数 $a\geq 5$, 把它换成 3 与 $a-3$ 两个因数, 乘积由 a 变为

$$3(a-3)=3a-9>a,$$

因为 $a\geq 5$ 时 $2a>9$. 改动之后乘积变大, 与最优性矛盾, 所以最优拆法里的因数都不超过 4.

接着把 4 换成 2 与 2. 两个 2 的乘积仍是 4, 因数变多而乘积不变, 故可以认为最优拆法只用 2 与 3. 再看三个 2, 因为

$$2\times 2\times 2=8<9=3\times 3,$$

而两边的因数之和都是 6, 所以最优拆法里至多出现两个 2.

剩下的只是代数. 记 $n=3q+r$, 其中 $r\in\{0,1,2\}$.

- $r=0$ 时全部用 3, 最大乘积为 3^q;
- $r=1$ 时取出一个 3 与余数拼成 $2+2$, 最大乘积为 $3^{q-1}\times 2\times 2$;
- $r=2$ 时保留这个余数, 最大乘积为 $3^q\times 2$.

由 $1976=3\times 658+2$ 得, 最大乘积为 $3^{658}\times 2$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

处理连续极值靠均值不等式的取等条件, 处理整数极值靠逐项调整, 改动一步不会让结果变好就说明已经最优. 固定因数之和后, 由 第5.1节 的均值不等式, 各因数越接近越好, 连续版本的答案是每个因数都等于 $e \approx 2.718$. 整数只能取 2 与 3, 而 $2 < e < 3$, 这就是最优拆法只用 2 与 3 的来源.

5.4.5 归一化方法与齐次性

我们称一个不等式为齐次的, 如果当所有变量同乘以一个正数因子时, 不等关系保持不变. 这类不等式可在不失一般性的前提下对变量施加额外约束, 如和为 1 或积为 1, 以简化问题.

例题 5.13 (内斯比特不等式) 设 a, b, c 为正实数. 证明, 得

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

解 考察不等式左侧表达式的齐次性. 以 ta, tb, tc $(t > 0)$ 替换 a, b, c, 表达式的值不变.

$$\frac{ta}{tb+tc} + \frac{tb}{tc+ta} + \frac{tc}{ta+tb} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

故该不等式是 0 次齐次的.

由齐次性, 可设 $a+b+c=1$. 在此约束下, $b+c = 1-a$、$c+a = 1-b$、$a+b = 1-c$. 不等式左侧变为:

$$\text{LHS} = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \left(\frac{1}{1-a} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-b} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-c} - 1\right)$$

$$\text{LHS} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} - 3$$

原不等式等价于证明

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} - 3 \geq \frac{3}{2} \implies \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

此形式可由柯西不等式的 Engel 形式直接证明.

$$\frac{1^2}{b+c} + \frac{1^2}{c+a} + \frac{1^2}{a+b} \geq \frac{(1+1+1)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{9}{2(a+b+c)}$$

由 $a+b+c=1$, 不等式成立.

原不等式是齐次的, 此结论对所有正实数 a, b, c 均成立.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.5 柯西不等式

注 5.3 (表述约定)
我们先写出柯西不等式的代数形式 $\left(\sum a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$；把它解释为向量点积则留到第三卷第 11 章.

我们关心向量内积与向量长度之间的关系. 柯西不等式给出了二者之间的一个定量联系.

5.5.1 向量形式

定理 5.5 (柯西不等式的向量形式) 对 n 维欧几里得空间中的任意两个向量 $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$ 和 $\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_n)$, 恒有

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \le \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2$$

其中 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^n a_i b_i$ 是向量的点积, $\|\mathbf{a}\|=\sqrt{\sum a_i^2}$ 是向量的欧几里得范数. 等价地,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

等号成立的充分必要条件是向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 线性相关；特别地, 任一向量为零向量时也取等号.

证明 (基于二次判别式) 我们考虑关于实数 t 的二次多项式 $P(t)=\sum_{i=1}^n (a_i t-b_i)^2$.

$P(t)$ 是若干个平方项之和, 因此对任意实数 t, 恒有 $P(t)\ge 0$.

将 $P(t)$ 展开得

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 t^2 - 2a_i b_i t + b_i^2) \\ &= \left(\sum a_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum a_i b_i\right) t + \left(\sum b_i^2\right). \end{aligned}$$

它是关于 t 的二次函数(若 $\sum a_i^2=0$ 则为一次函数).

若 $\sum a_i^2=0$, 则所有 $a_i=0$, 不等式显然成立. 若 $\sum a_i^2>0$, 则 $P(t)$ 是开口向上的二次函数. 由它恒非负可知其图像与 t 轴至多有一个交点, 因此判别式 $\Delta\le 0$.

$$\Delta = \left(-2\sum a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) \le 0$$

$$4\left(\sum a_i b_i\right)^2 \le 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此即柯西不等式.

等号成立的条件是存在实数 t_0 使 $P(t_0)=0$. 各项非负, 这等价于 $a_i t_0 - b_i = 0$ 对所有 i 成立, 即 $\mathbf{b} = t_0\mathbf{a}$, 两向量线性相关. 若 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, 等号也成立且同样属于线性相关情形. 反过来, 若两向量线性相关, 直接代入可得等号. □

例题 5.14 已知 x, y, z 为实数, 且 $x+2y+3z=7$. 求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

解 目标是一个二次式, 约束是一个线性方程. 我们用柯西不等式建立二者之间的联系.

我们将目标表达式 $x^2+y^2+z^2$ 与约束表达式 $x+2y+3z$ 分别视为向量范数的平方与点积.

令向量 $\mathbf{a}=(x,y,z)$ 和 $\mathbf{b}=(1,2,3)$.

根据柯西不等式.

$$(x\cdot 1 + y\cdot 2 + z\cdot 3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)$$

代入 $x+2y+3z=7$, 得

$$7^2 \le (x^2+y^2+z^2)(1+4+9)$$

$$49 \le 14(x^2+y^2+z^2)$$

解得 $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{49}{14} = \frac{7}{2}$.

等号成立的条件是向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 即存在常数 k 使得 $(x,y,z) = k(1,2,3)$. 即 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=k$.

将 $x=k, y=2k, z=3k$ 代入 $x+2y+3z=7$, 得

$$k+2(2k)+3(3k)=7$$

$$k+4k+9k=14k=7$$

解得 $k=1/2$.

存在满足等号条件的实数 x, y, z, 即 $x=1/2, y=1, z=3/2$, 因此最小值为 $7/2$.

5.5.2 推论

我们给出柯西不等式的几个推论, 它们分别对应一些常见的代数结构.

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.6 (柯西不等式的 Engel 形式) 设 $a_1,\dots,a_n$ 为任意实数, $b_1,\dots,b_n$ 为正实数. 则

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

等号成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

证明 它可由柯西不等式直接得到. 令向量 $\mathbf{u}=\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}},\frac{a_2}{\sqrt{b_2}},\dots,\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ 和 $\mathbf{v}=(\sqrt{b_1},\sqrt{b_2},\dots,\sqrt{b_n})$.

由柯西不等式 $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2\leq\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$, 分别计算两端, 得

$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2=\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\sqrt{b_i}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \qquad \text{(点积的平方)},$$

$$\|\mathbf{u}\|^2=\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\right)^2=\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2}{b_i} \qquad \text{($\mathbf{u}$ 的范数平方)},$$

$$\|\mathbf{v}\|^2=\sum_{i=1}^n(\sqrt{b_i})^2=\sum_{i=1}^n b_i \qquad \text{($\mathbf{v}$ 的范数平方)}.$$

代入不等式, 即得

$$\left(\sum a_i\right)^2\leq\left(\sum\frac{a_i^2}{b_i}\right)\left(\sum b_i\right),$$

整理后即为所证.

等号成立的条件是向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 共线, 即存在常数 k 使 $\mathbf{u}=k\mathbf{v}$. 分量形式为 $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}=k\sqrt{b_i}$, 即 $a_i=kb_i$, 故 $\frac{a_i}{b_i}=k$ 对所有 i 成立. 反过来, 若 $\frac{a_1}{b_1}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$, 则 $\mathbf{u}=k\mathbf{v}$, 柯西不等式取等号. □

定理 5.7 (闵可夫斯基不等式, $p=2$ 情形) 设 $a_1,\dots,a_n$ 和 $b_1,\dots,b_n$ 为任意实数. 则

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq\sqrt{(a_1+\cdots+a_n)^2+(b_1+\cdots+b_n)^2}$$

等号成立当且仅当所有向量 (a_i,b_i) 同向共线, 即存在同一个非零向量 $\mathbf{u}$ 和非负实数 λ_i 使 $(a_i,b_i)=\lambda_i\mathbf{u}$; 零向量可视为任意方向.

证明 它在几何上即欧几里得空间中的三角不等式. 考虑 n 个二维向量 $\mathbf{v}_i=(a_i,b_i)$. 不等式左侧为 $\sum_{i=1}^n\|\mathbf{v}_i\|$, 右侧为 $\|\sum_{i=1}^n\mathbf{v}_i\|$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

我们对不等式两边平方, 再应用柯西不等式证明. 令 $A=\sum a_i$, $B=\sum b_i$. 先证 $n=2$ 的情形, 即

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}.$$

两边平方, 得

$$(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)+2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}\geq(a_1^2+2a_1a_2+a_2^2)+(b_1^2+2b_1b_2+b_2^2),$$

化简得 $\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}\geq a_1a_2+b_1b_2$. 若右侧为负, 不等式显然成立; 若右侧非负, 两边平方得

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\geq(a_1a_2+b_1b_2)^2,$$

此即二维柯西不等式.

一般情形可由数学归纳法, 重复应用 $n=2$ 的结论得到. 等号条件来自二维情形中柯西取等号且 $a_1a_2+b_1b_2\geq 0$, 这要求每次合并时参与相加的向量同向共线. 因而所有非零向量 (a_i,b_i) 必须同向共线; 反过来, 若满足此条件, 则向量长度相加等于和向量长度, 故取等号. □

注 5.4
这即权方和不等式, 1980 年代后得名.

例题 5.15 已知 x,y 为实数, 满足 $x+3y=4$. 求 $4x^2+y^2$ 的最小值.

解 目标函数 $4x^2+y^2$ 是二次和, 可写成 $(2x)^2+y^2$; 而约束 $x+3y=4$ 是线性的. 我们只需在二者之间建立联系.

为了匹配目标函数, 我们把 x 改写成 $2x$ 的一半.

$$x+3y=\frac{1}{2}(2x)+3y=4$$

令向量 $\mathbf{a}=(\frac{1}{2},3)$ 和 $\mathbf{b}=(2x,y)$. 根据柯西不等式, $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\leq\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2$.

$$\left(\frac{1}{2}(2x)+3y\right)^2\leq\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+3^2\right)\left((2x)^2+y^2\right)$$

代入 $x+3y=4$, 得

$$4^2\leq\left(\frac{1}{4}+9\right)(4x^2+y^2)$$

$$16\leq\frac{37}{4}(4x^2+y^2)$$

由此 $4x^2+y^2\geq\frac{64}{37}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

等号成立的条件是向量 **a** 与 **b** 共线, 即 $\frac{2x}{1/2}=\frac{y}{3}$. 即 $4x=y/3$, 或 $y=12x$. 代入 $x+3(12x)=4$, 得 $37x=4$, $x=4/37$. 此时 $y=12(4/37)=48/37$.

由于存在使等号成立的实数 x,y, 故 $4x^2+y^2$ 的最小值为 $\frac{64}{37}$.

例题 5.16　已知实数 a,b,c 和 x,y,z 满足 $a^2+b^2+c^2=9$ 和 $x^2+y^2+z^2=1$. 求 $ax+by+cz$ 的最大值.

解　问题涉及两个二次和的定值与一个线性组合的最值. 这是柯西不等式的直接应用.

令向量 $\mathbf{u}=(a,b,c)$ 和 $\mathbf{v}=(x,y,z)$. 根据柯西不等式.

$$(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

知乎@余命数

代入已知条件:

知乎@余命数

$$(ax+by+cz)^2\le 9\cdot 1=9$$

由此 $|ax+by+cz|\le 3$, 即 $-3\le ax+by+cz\le 3$.

表达式的最大值为 3. 等号成立的条件是向量 **u** 与 **v** 共线, 即存在常数 k 使得 $(a,b,c)=k(x,y,z)$. 此时 $a^2+b^2+c^2=k^2(x^2+y^2+z^2)$, 即 $9=k^2(1)$, 解得 $k=\pm 3$. 当 $k=3$ 时, $a=3x,b=3y,c=3z$, 此时 $ax+by+cz=3x^2+3y^2+3z^2=3(x^2+y^2+z^2)=3$.

由于最大值可以取到, 故 $ax+by+cz$ 的最大值为 3.

例题 5.17　已知 a,b,c 均为正数, 且 $a^2+b^2+4c^2=3$. 证明:

1. $a+b+2c\le 3$.
2. 若 $b=2c$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge 3$.

解

知乎@余命数

1. 待证不等式是线性的, 条件是二次的. 我们构造向量并应用柯西不等式.

   把条件 $a^2+b^2+4c^2=3$ 写成 $a^2+b^2+(2c)^2=3$. 令向量 $\mathbf{u}=(a,b,2c)$ 和 $\mathbf{v}=(1,1,1)$.

   根据柯西不等式.

$$(a\cdot 1+b\cdot 1+2c\cdot 1)^2\le(a^2+b^2+(2c)^2)(1^2+1^2+1^2)$$

$$(a+b+2c)^2\le(a^2+b^2+4c^2)(3)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代入 $a^2+b^2+4c^2=3$, 得

$$(a+b+2c)^2 \le 3\cdot 3 = 9$$

由于 a,b,c 均为正数, $a+b+2c$ 为正. 两边开平方根得 $a+b+2c\le 3$. 等号成立当且仅当 $\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{2c}{1}$, 即 $a=b=2c$. 代入条件得 $a^2+a^2+a^2=3$, $a=1$. 此时 $a=b=1, c=1/2$.

2. 当 $b=2c$ 时, 原条件 $a^2+b^2+4c^2=3$ 变为

$$a^2+(2c)^2+4c^2 = a^2+8c^2 = 3$$

我们需在此条件下证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge 3$.
这个结构适合使用柯西不等式的 Engel 形式. 为了构造合适的项, 我们将 $\frac{1}{c}$ 写成 $\frac{4}{4c}$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} = \frac{1^2}{a}+\frac{2^2}{4c} \ge \frac{(1+2)^2}{a+4c} = \frac{9}{a+4c}$$

接下来我们求 $a+4c$ 的上界. 利用条件 $a^2+8c^2=3$, 我们再次应用柯西不等式.

$$(a+4c)^2 = (1\cdot a+\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}c)^2 \le (1^2+(\sqrt{2})^2)(a^2+(\sqrt{8}c)^2)$$

$$(a+4c)^2 \le (1+2)(a^2+8c^2) = 3\cdot 3 = 9$$

由于 a,c 为正, $a+4c\le 3$.
结合两个结果:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+4c} \ge \frac{9}{3} = 3$$

检验等号成立的条件.Engel 形式的放缩要求 $\frac{1}{a}=\frac{2}{4c}$, 即 $a=2c$; 柯西不等式的取等要求 $\frac{a}{1}=\frac{\sqrt{8}c}{\sqrt{2}}$, 即 $a=2c$. 两个条件一致. 将 $a=2c$ 代入 $a^2+8c^2=3$, 得 $(2c)^2+8c^2=12c^2=3$, $c=1/2$. 此时 $a=1$. 当 $a=1, c=1/2$ 时, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1+2=3$, 等号可以取到.

例题 5.18 已知点 $P(a,b)$ 在圆 $C: x^2+y^2=x+y$ 上, 且 $a,b\in(0,+\infty)$.

1. 求 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值.
2. 是否存在 a,b 满足 $(a+1)(b+1)=4$? 若存在, 求出 a,b 的值; 若不存在, 说明理由.

解

1. 由题设, a,b 为正实数, 且满足 $a^2+b^2=a+b$. 所求表达式为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根据均值不等式, $a^2+b^2 \geq 2ab$. 将条件代入, 得 $a+b \geq 2ab$. 由于 $a,b>0$, 可得 $\frac{a+b}{ab} \geq 2$.

等号成立的条件是 $a=b$. 代入圆的方程, $a^2+a^2=a+a$, 即 $2a^2=2a$. 由于 $a>0$, 解得 $a=1$. 故当 $a=b=1$ 时, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 2.

2. 问题等价于判断表达式 $ab+a+b+1$ 的值能否达到 4. 先确定 $a+b$ 的范围. 由柯西不等式,

$$(a+b)^2=(1\cdot a+1\cdot b)^2 \leq (1^2+1^2)(a^2+b^2)=2(a^2+b^2)$$

将条件 $a^2+b^2=a+b$ 代入,

$$(a+b)^2 \leq 2(a+b)$$

由于 $a,b>0, a+b>0$, 两边同除以 $a+b$, 得 $a+b \leq 2$.

同时, 由均值不等式, $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a+b}{2}$.

现在考察表达式 $(a+1)(b+1)$:

$$(a+1)(b+1)=ab+a+b+1 \leq \frac{a+b}{2}+(a+b)+1=\frac{3}{2}(a+b)+1$$

由于 $a+b \leq 2$, 故

$$\frac{3}{2}(a+b)+1 \leq \frac{3}{2}(2)+1=4$$

故 $(a+1)(b+1)$ 的最大值为 4.

等号成立的条件是上述所有不等式均取等号, 即

- $a+b=2$
- $a=b$

联立解得 $a=b=1$.

将 $a=b=1$ 代入原方程 $a^2+b^2=a+b$ 检验.$1^2+1^2=1+1$, 方程成立.

因此, 存在 $a=b=1$ 使得 $(a+1)(b+1)=4$.

例题 5.19　设正实数 m,n 满足 $2m+n=2$. 求 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$ 的最小值.

解　目标是一个分式和, 约束是一个线性方程, 这适合用柯西不等式.

将约束条件与目标函数相乘:

$$(2m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对于正数 x_1, x_2, y_1, y_2, 柯西不等式的一种形式为

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \geq (\sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2})^2$$

知乎@余命数

令 $x_1 = 2m, x_2 = n$ 及 $y_1 = \frac{1}{m}, y_2 = \frac{4}{n}$.

知乎@余命数

$$(2m + n)\left(\frac{1}{m} + \frac{4}{n}\right) \geq \left(\sqrt{2m \cdot \frac{1}{m}} + \sqrt{n \cdot \frac{4}{n}}\right)^2$$

$$(2m + n)\left(\frac{1}{m} + \frac{4}{n}\right) \geq (\sqrt{2} + \sqrt{4})^2 = (\sqrt{2} + 2)^2 = 6 + 4\sqrt{2}$$

知乎@余命数

将 $2m + n = 2$ 代入, 得

$$2\left(\frac{1}{m} + \frac{4}{n}\right) \geq 6 + 4\sqrt{2}$$

知乎@余命数

$$\frac{1}{m} + \frac{4}{n} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

等号成立的条件是 $\frac{x_1}{y_1}$ 与 $\frac{x_2}{y_2}$ 的比值相等, 即 $\frac{2m}{1/m} = \frac{n}{4/n}$, 亦即 $2m^2 = \frac{n^2}{4}$, 故 $n = 2\sqrt{2}m$.

代入 $2m + n = 2$, 得

$$2m + 2\sqrt{2}m = 2 \implies m(2 + 2\sqrt{2}) = 2 \implies m = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

知乎@余命数

知乎@余命数

此时 $n = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 4 - 2\sqrt{2}$.

由于 m, n 均为正数且使等号成立, 故 $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$.

例题 5.20 已知 $a > 0, b > 0$ 且 $a + b = 5$. 求 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值.

解 目标函数是根式之和, 约束是线性的. 我们用柯西不等式. 令向量 $\mathbf{u} = (\sqrt{a+1}, \sqrt{b+3})$ 和 $\mathbf{v} = (1, 1)$.

根据柯西不等式.

知乎@余命数

$$(\sqrt{a+1} \cdot 1 + \sqrt{b+3} \cdot 1)^2 \leq ((\sqrt{a+1})^2 + (\sqrt{b+3})^2)(1^2 + 1^2)$$

$$(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3})^2 \leq ((a+1) + (b+3))(2)$$

$$(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3})^2 \leq (a + b + 4)(2)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代入 $a+b=5$, 得

$$(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3})^2 \le (5+4)(2)=18$$

由于各项为正, 开平方根得 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3} \le \sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

等号成立的条件是向量 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 共线, 即 $\frac{\sqrt{a+1}}{1}=\frac{\sqrt{b+3}}{1}$. 这等价于 $a+1=b+3$, 即 $a=b+2$. 联立 $a=b+2$ 和 $a+b=5$, 解得 $b=3/2, a=7/2$.

由于存在使等号成立的正数 a,b, 故表达式的最大值为 $3\sqrt{2}$.

例题 5.21 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{2+3x-x^2}$ 的最大值.

解 函数是两个根式之和. 两个根号内的表达式相加后变量被消去.

$$(x^2-3x+2)+(2+3x-x^2)=4$$

这提示我们应用柯西不等式.

令向量 $\mathbf{u}=(\sqrt{x^2-3x+2},\sqrt{2+3x-x^2})$ 和 $\mathbf{v}=(1,1)$.

$$(f(x))^2=(\sqrt{x^2-3x+2}\cdot 1+\sqrt{2+3x-x^2}\cdot 1)^2$$

$$\le ((\sqrt{x^2-3x+2})^2+(\sqrt{2+3x-x^2})^2)(1^2+1^2)$$

$$\le ((x^2-3x+2)+(2+3x-x^2))(2)$$

$$\le (4)(2)=8$$

故 $f(x)\le\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

等号成立的条件是 $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{1}=\frac{\sqrt{2+3x-x^2}}{1}$. 即 $x^2-3x+2=2+3x-x^2$, 化简得 $2x^2-6x=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=3$.

检验这两个值是否在函数的定义域内. 定义域要求 $x^2-3x+2\ge 0$ 且 $2+3x-x^2\ge 0$. 当 $x=0$ 时, $2\ge 0$ 且 $2\ge 0$, 成立. 当 $x=3$ 时, $9-9+2=2\ge 0$ 且 $2+9-9=2\ge 0$, 成立.

由于存在使等号成立的 x 值, 函数的最大值为 $2\sqrt{2}$.

例题 5.22 已知正数 x,y 满足 $\frac{1}{2x+y}+\frac{3}{x+y}=2$. 求 $6x+5y$ 的最小值.

解 条件是一个分式和, 目标是一个线性和. 将目标表达式与条件表达式相乘, 可构造一个常数下界.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

我们先把目标 $6x+5y$ 用条件中的分母 $2x+y$ 与 $x+y$ 表示. 设 $6x+5y=A(2x+y)+B(x+y)=(2A+B)x+(A+B)y$. 比较系数得 $2A+B=6, A+B=5$. 解得 $A=1, B=4$. 故 $6x+5y=(2x+y)+4(x+y)$.

考虑乘积 $(6x+5y)\cdot 2$.

$$2(6x+5y)=\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{3}{x+y}\right)((2x+y)+4(x+y))$$

令 $a=\frac{1}{2x+y}, b=\frac{3}{x+y}$ 和 $c=2x+y, d=4(x+y)$. 根据柯西不等式的一个推论, 或直接由 AM-GM 不等式, $(a+b)(c+d)\geq(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{3}{x+y}\right)((2x+y)+4(x+y))&\geq\left(\sqrt{1}+\sqrt{3\cdot 4}\right)^2\\&=(1+2\sqrt{3})^2\\&=13+4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

因此, $2(6x+5y)\geq 13+4\sqrt{3}$, 即 $6x+5y\geq\frac{13+4\sqrt{3}}{2}$.

等号成立的条件是 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, 即 $\frac{1/(2x+y)}{2x+y}=\frac{3/(x+y)}{4(x+y)}$. $\frac{1}{(2x+y)^2}=\frac{3}{4(x+y)^2}$, 即 $4(x+y)^2=3(2x+y)^2$. 由于各项为正, $2(x+y)=\sqrt{3}(2x+y)$, 即 $(2-\sqrt{3})y=(2\sqrt{3}-2)x$. 令 $r=\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{3}-2}{2-\sqrt{3}}>0$. 再由题设

$$\frac{1}{(2+r)x}+\frac{3}{(1+r)x}=2$$

可唯一确定一个正数 x, 从而得到正数 $y=rx$. 因此等号条件确实可以在题设范围内达到.

故 $6x+5y$ 的最小值为 $\frac{13+4\sqrt{3}}{2}$.

例题 5.23 已知正数 x, y, z 满足 $x+y+z=1$. 求 $\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}$ 的最小值.

解 目标函数具有 Engel 形式的标准结构.

$$\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(y+2z)+(z+2x)+(x+2y)}$$

化简分母:

$$(y+2z)+(z+2x)+(x+2y)=3x+3y+3z=3(x+y+z)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代入不等式：

$$\text{LHS} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{3}$$

根据约束 $x+y+z=1$, 得到

$$\frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y} \geq \frac{1}{3}$$

等号成立的条件是 $\frac{x}{y+2z} = \frac{y}{z+2x} = \frac{z}{x+2y}$. 若 $x=y=z$, 此条件显然满足. 结合 $x+y+z=1$, 解得 $x=y=z=1/3$.

由于存在使等号成立的取值, 故表达式的最小值为 $1/3$.

例题 5.24　已知正数 x, y 满足 $x+y=1$. 求 $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2}$ 的最小值.

解　我们用 Holder 不等式（柯西不等式的一种推广）解决这个问题. 对于三组正数 $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$, 有

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2) \geq \left(\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2}\right)^3$$

我们构造三组数. 令 $(a_1, a_2) = (\frac{1}{x^2}, \frac{8}{y^2})$、$(b_1, b_2) = (x, y)$、$(c_1, c_2) = (x, y)$.
代入 Holder 不等式.

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2}\right)(x+y)(x+y) \geq \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} \cdot x \cdot x} + \sqrt[3]{\frac{8}{y^2} \cdot y \cdot y}\right)^3$$

利用 $x+y=1$ 简化左侧, 并计算右侧, 得

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2}\right) \cdot 1 \cdot 1 \geq \left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8}\right)^3 = (1+2)^3 = 27$$

故 $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2} \geq 27$.
等号成立的条件是这三组数成比例, 即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

$$\frac{1/x^2}{8/y^2} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{y^2}{8x^2} = \frac{x}{y} \implies y^3 = 8x^3 \implies y = 2x$$

联立 $y=2x$ 和 $x+y=1$, 解得 $x=1/3, y=2/3$.
由于存在使等号成立的正数 x, y, 故表达式的最小值为 27.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

何时要用

柯西不等式联系二次型表达式, 如 $\sum a_i^2$ 与一次线性组合, 如 $\sum a_i b_i$. 只要给定其中一类的值而探求另一类的最值, 它常能直接给出结果, 例如在线性约束下求二次和的最小值, 或在二次约束下求线性组合的最值.

当目标函数为分式和, 特别是形如 $\sum \frac{a_i^2}{b_i}$ 时, 我们可考虑 Engel 形式. 分子不必是变量的平方, 也可以是常数的平方; 例如 $\frac{1}{b}$ 可写成 $\frac{1^2}{b}$, 而 $\frac{9}{c}$ 可写成 $\frac{3^2}{c}$. 若目标函数呈此结构且约束与分母之和相关, Engel 形式往往能直接导出结论.

我们还可以借助辅助向量来创造应用条件; 例如取 $(1,1,\ldots,1)$ 作为辅助向量, 可建立 $(\sum x_i)^2$ 与 $\sum x_i^2$ 之间的联系.

5.6 排序不等式

知乎@余命数

我们研究两个序列的元素如何配对, 才能使乘积之和最大或最小. 排序不等式回答这个问题.

定理 5.8 (排序不等式) 设有两组实数 $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ 和 $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. 设 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 是 $(1,2,\ldots,n)$ 的一个任意排列. 则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{p_i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

因此, 两个有序序列的元素配对, 其乘积之和在**顺序和**时取得最大值, 在**乱序和**时介于最大与最小之间, 在**逆序和**时取得最小值.

知乎@余命数

证明 证明顺序和最大. 考虑任意非顺序的乱序和 $S = \sum a_i b_{p_i}$. 若该排列不是顺序排列 $(1,2,\ldots,n)$, 则存在两个下标 j,k 满足 $j<k$ 但 $p_j > p_k$.

S 中与 j,k 相关的项为 $a_j b_{p_j} + a_k b_{p_k}$.

交换 p_j, p_k 得到新排列, 其对应的和记为 S'. S' 中与 j,k 相关的项为 $a_j b_{p_k} + a_k b_{p_j}$.

考查两式之差.

$$\begin{aligned} S' - S &= (a_j b_{p_k} + a_k b_{p_j}) - (a_j b_{p_j} + a_k b_{p_k}) \\ &= a_k b_{p_j} - a_j b_{p_j} - a_k b_{p_k} + a_j b_{p_k} \\ &= b_{p_j}(a_k - a_j) - b_{p_k}(a_k - a_j) \\ &= (a_k - a_j)(b_{p_j} - b_{p_k}) \end{aligned}$$

知乎@余命数

由假设, $j<k \implies a_j \le a_k$, 故 $a_k - a_j \ge 0$. 又 $p_j > p_k \implies b_{p_j} \ge b_{p_k}$, 故 $b_{p_j} - b_{p_k} \ge 0$.

因此 $S' - S \ge 0$, 即 $S' \ge S$.

每当排列中出现违反顺序的两个配对, 将该配对修正为顺序后, 总和不会减小. 通过有限次这样的交换, 任何乱序排列都可调整为顺序排列, 且乘积之和单调不减. 故顺序和最大. 对序列 $b_n \le b_{n-1} \le \cdots \le b_1$ 应用同样结论, 可得逆序和最小. 所以任意乱序和介于逆序和与顺序和之间. □

例题 5.25 设 a,b,c 为正实数. 证明 $a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a$.

解 这个不等式为轮换式, 不能假设 a,b,c 的大小. 我们用 AM-GM 不等式证明它.

由 a,b,c 均为正实数, 分别有

$$a^3+a^3+b^3 \ge 3\sqrt[3]{a^3\cdot a^3\cdot b^3} = 3a^2b,$$

$$b^3+b^3+c^3 \ge 3b^2c, \qquad c^3+c^3+a^3 \ge 3c^2a.$$

三式相加, 得

$$3(a^3+b^3+c^3) \ge 3(a^2b+b^2c+c^2a).$$

两边同除以 3, 即得

$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a.$$

例题 5.26 (IMO) 已知 $x_i, y_i (i=1,2,\dots,n)$ 为任意实数, 且 $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n$ 和 $y_1 \ge y_2 \ge \dots \ge y_n$. 又 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的任意一个排列. 试证:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$$

解 展开平方项, 就可把问题化为排序不等式.

先展开右侧:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iz_i+z_i^2)\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i + \sum_{i=1}^{n}z_i^2\end{aligned}$$

分析其中的项.

- $\sum x_i^2$ 由序列 (x_i) 唯一确定, 是常数.
- (z_i) 是 (y_i) 的排列, 所含元素相同, 仅顺序不同. 故 $\sum z_i^2 = \sum y_i^2$ 也是常数.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

- 随排列 (z_i) 变化的是乱序和 $\sum x_i z_i$.

因此, 表达式 $\sum(x_i - z_i)^2$ 取最小值当且仅当 $\sum x_i z_i$ 取最大值.

由排序不等式, 两个同序排列的序列 (x_i) 与 (y_i) 的乘积之和在顺序和时最大, 即对 (y_i) 的任意排列 (z_i),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

所以 $\sum x_i z_i$ 的最大值在 $z_i = y_i$ 时取到.

代回展开式, $\sum(x_i - z_i)^2$ 的最小值在 $z_i = y_i$ 时取到, 此时值为 $\sum(x_i - y_i)^2$.

故对任意排列 (z_i), 都有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

知乎@余命数

5.7 伯努利不等式

伯努利不等式给出 $(1+x)^n$ 的一个线性下界.

定理 5.9 (伯努利不等式, 整数形式) 对任意实数 $x > -1$ 和任意非负整数 n, 恒有

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

等号成立的充分必要条件是 $n = 0, n = 1$ 或 $x = 0$.

证明 用数学归纳法对整数 $n \geq 0$ 证明.

奠基时, $n = 0$ 给出 $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$ 即 $1 \geq 1$, $n = 1$ 给出 $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ 即 $1 + x \geq 1 + x$, 均成立.

设 $n = k\,(k \geq 1)$ 时命题成立, 即 $(1+x)^k \geq 1 + kx$, 推证 $n = k+1$ 时命题亦成立. 由题设 $x > -1$, 故 $1 + x > 0$, 以正数 $1 + x$ 同乘归纳假设两端, 不等号方向不变, 得

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x).$$

展开右端得 $(1+kx)(1+x) = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2$, 而由 $k \geq 1$ 且 $x^2 \geq 0$ 有 $kx^2 \geq 0$, 故 $1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$. 由传递性即得

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x,$$

命题对 $n = k+1$ 成立.

由数学归纳法原理, 伯努利不等式对所有非负整数 n 成立.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

等号当 $n=0$ 或 $n=1$ 时原式恒取, 当 $x=0$ 时两边也均为 1. 若 $n\geq 2$ 且 $x\neq 0$, 归纳递推给出严格不等式. 对 $n=2$ 有 $(1+x)^2-(1+2x)=x^2>0$; 若第 k 步严格, 由 $1+x>0$ 且递推中还加上 $kx^2>0$, 第 $k+1$ 步仍严格. 故等号成立当且仅当 $n=0$、$n=1$ 或 $x=0$. □

伯努利不等式可推广到实数指数. 下面的证明用到函数的凹凸性.

伯努利不等式实数形式

定理 5.10 (伯努利不等式, 实数形式) 设 $x>-1$ 且 $x\neq 0$.

- 若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 则 $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$.
- 若 $0<\alpha<1$, 则 $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$.

知乎@余命数

证明 考虑辅助函数 $f(x)=(1+x)^\alpha-(1+\alpha x)$, 其定义域为 $(-1,+\infty)$. 分析导数确定其单调性与极值.

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left[(1+x)^{\alpha-1}-1\right]$$

令 $f'(x)=0$, 唯一解为 $x=0$.

当 $\alpha>1$ 时, $\alpha-1>0$. 若 $x>0$, 则 $1+x>1$、$(1+x)^{\alpha-1}>1$、$f'(x)>0$. 若 $-1<x<0$, 则 $0<1+x<1$、$(1+x)^{\alpha-1}<1$、$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得唯一的极小值, 也是最小值. $f_{\min}=f(0)=(1+0)^\alpha-(1+0)=0$. 因此, 对 $x\neq 0$, 恒有 $f(x)>0$, 即 $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$.

当 $0<\alpha<1$ 时, $\alpha-1<0$. 若 $x>0$, 则 $1+x>1$、$(1+x)^{\alpha-1}<1$、$f'(x)<0$. 若 $-1<x<0$, 则 $0<1+x<1$、$(1+x)^{\alpha-1}>1$、$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得唯一的极大值, 也是最大值. $f_{\max}=f(0)=0$. 因此, 对 $x\neq 0$, 恒有 $f(x)<0$, 即 $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$.

当 $\alpha<0$ 时, $\alpha-1<0$. 若 $x>0$, 则 $(1+x)^{\alpha-1}<1$, 而 $\alpha<0$, 故 $f'(x)>0$; 若 $-1<x<0$, 则 $(1+x)^{\alpha-1}>1$, 故 $f'(x)<0$. 因此 f 仍在 $x=0$ 处取得唯一最小值 0, 对 $x\neq 0$ 有 $f(x)>0$. □

例题 5.27 证明 $1.001^{1000}>2$.

解 该不等式具有 $(1+x)^n$ 的形式, 我们用伯努利不等式证明它.

令 $x=0.001$ 及 $n=1000$. 条件 $x=0.001>-1$ 和 n 为非负整数均满足. 由伯努利不等式,

$$(1+0.001)^{1000}\geq 1+1000\times 0.001=1+1=2$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

等号仅在 $n=0,1$ 或 $x=0$ 时成立. 此例中 $n=1000$ 且 $x=0.001$, 均不满足等号条件. 因此不等号为严格不等号.

故 $1.001^{1000}>2$.

例题 5.28 证明序列 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n\in\mathbb{N},n\geq 1)$ 严格单调递增.

解 要证对任意 $n\geq 1$, 恒有 $a_{n+1}>a_n$. 这等价于证明 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$.

构造商式并化简, 得

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\\&=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\&=\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n\\&=\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n\\&=\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^n\\&=\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\end{aligned}$$

对因子 $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$ 应用伯努利不等式. 令 $x=-\frac{1}{(n+1)^2}$. 由 $n\geq 1, x>-1$ 且 $x\neq 0$. 由伯努利不等式, $(1+x)^n\geq 1+nx$,

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\geq 1-\frac{n}{(n+1)^2}$$

代回商式并化简, 得

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&\geq\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\\&=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+2n+1-n}{(n+1)^2}\\&=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}\end{aligned}$$

比较分子与分母.

$$(n+2)(n^2+n+1)=n^3+3n^2+3n+2$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

分子比分母大 1. 故 $\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} > 1$.

因此 $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, 即 $a_{n+1} > a_n$. 序列 a_n 严格单调递增.

5.8 糖水不等式

知乎@余命数

我们比较分式大小时, 常会遇到一类背景类似溶液浓度变化的不等式.

定理 5.11 (糖水不等式, 基本形式) 设 a, b, x 均为正实数.

- 若 $\frac{a}{b} < 1$, 则 $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$.
- 若 $\frac{a}{b} > 1$, 则 $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$.
- 若 $\frac{a}{b} = 1$, 则 $\frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+x} = 1$.

对真分数, 分子分母同加一个正数会变大; 对假分数, 同加一个正数会变小.

证明 我们比较 $\frac{a+x}{b+x}$ 与 $\frac{a}{b}$ 的大小. 由于 a, b, x 均为正数, b 和 $b+x$ 亦为正, 于是作差, 得

$$\frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+x) - a(b+x)}{b(b+x)} = \frac{ab + bx - ab - ax}{b(b+x)} = \frac{x(b-a)}{b(b+x)}$$

分母 $b(b+x)$ 与 x 均为正, 差的符号完全由 $(b-a)$ 决定.

- 若 $\frac{a}{b} < 1$, 则 $a < b$, 即 $b - a > 0$. 差为正, 故 $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$.
- 若 $\frac{a}{b} > 1$, 则 $a > b$, 即 $b - a < 0$. 差为负, 故 $\frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$.
- 若 $\frac{a}{b} = 1$, 则 $a = b$, 即 $b - a = 0$. 差为零, 故 $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$.

□

例题 5.29 比较 $\frac{2023}{2024}$ 与 $\frac{2024}{2025}$ 的大小.

解 两个分数结构相似, 第二个分数可由第一个变化得到.

令 $a = 2023, b = 2024$, 则 $\frac{2024}{2025} = \frac{2023+1}{2024+1} = \frac{a+x}{b+x}$ $(x = 1)$.

$\frac{a}{b} = \frac{2023}{2024} < 1$ 是真分数, 由糖水不等式基本形式可得

$$\frac{2023}{2024} < \frac{2023+1}{2024+1} = \frac{2024}{2025}$$

我们可以把基本形式推广到分子、分母分别加上不同正数的情形.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.12 (糖水不等式, 一般形式) 设 a,b,x,y 均为正实数. 分数 $\frac{a+x}{b+y}$ 的值介于 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{x}{y}$ 之间.
若 $\frac{a}{b}<\frac{x}{y}$, 则 $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+y}<\frac{x}{y}$. 若 $\frac{a}{b}>\frac{x}{y}$, 则 $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+y}>\frac{x}{y}$.

知乎@余命数

证明 我们可设 $\frac{a}{b}<\frac{x}{y}$. 由于 b,y 均为正数, 该式等价于 $ay<bx$.

先证 $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+y}$, 即

$$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+y}\iff a(b+y)<b(a+x)\iff ay<bx,$$

这与假设一致, 故成立.

再证 $\frac{a+x}{b+y}<\frac{x}{y}$, 即

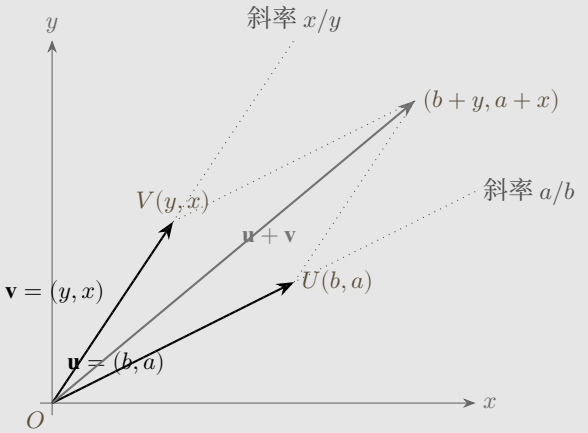
知乎@余命数

$$\frac{a+x}{b+y}<\frac{x}{y}\iff y(a+x)<x(b+y)\iff ay<bx,$$

同样成立.

若 $\frac{a}{b}>\frac{x}{y}$, 对称讨论即可. 若 $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, 则三个分数值全部相等. □

注 5.5 (几何解释)
我们给一般形式的糖水不等式一个几何解释. 考虑平面直角坐标系中的两个向量 $\mathbf{u}=(b,a)$ 和 $\mathbf{v}=(y,x)$. 由 a,b,x,y 均为正数, 这两个向量位于第一象限.
向量 $\mathbf{u}$ 的斜率为 $\frac{a}{b}$, 向量 $\mathbf{v}$ 的斜率为 $\frac{x}{y}$. 两个向量的和为 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(b+y,a+x)$, 其斜率为 $\frac{a+x}{b+y}$.
从图中可以看出, 两个第一象限向量之和的斜率介于这两个向量各自的斜率之间.



例题 5.30 设有两个正数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 如果序列 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ 严格单调递增, 证明由它们的部分和构成的序列 $S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$ 也严格单调递增.

解 我们需证明对任意 $n \geq 1$ 都有 $S_n < S_{n+1}$.

记 $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$, 则 $S_n = \frac{A_n}{B_n}$. 由 $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$ 且 $B_{n+1} = B_n + b_{n+1}$,

$$S_{n+1} = \frac{A_n + a_{n+1}}{B_n + b_{n+1}}.$$

由糖水不等式的一般形式, S_{n+1} 介于 $\frac{A_n}{B_n}$ 和 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ 之间. 因此, 只需证明 $S_n < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, 便可得到 $S_n < S_{n+1}$.

利用 $a_i = c_i b_i$, 得

$$S_n = \frac{c_1 b_1 + c_2 b_2 + \cdots + c_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

它是 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 关于正权重 b_i 的加权算术平均.

由 c_n 严格单调递增, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n < c_{n+1}$. 加权平均值不超过所有元素中的最大值, 因此

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq c_n.$$

又 $c_n < c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, 所以 $S_n < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$.

因此 $S_n < S_{n+1}$, 序列 S_n 严格单调递增.

5.8.1 函数单调性与次可加性

糖水不等式说明函数 $f(t) = \frac{t}{c+t}$ $(c > 0, t \geq 0)$ 单调递增. 结合三角不等式, 我们可用它来证明一类不等式.

例题 5.31 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为实数, $c > 0$. 证明:

$$\frac{|\sum_{i=1}^{n} x_i|}{c + |\sum_{i=1}^{n} x_i|} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{c + |x_i|}$$

解 令 $f(t) = \frac{t}{c+t}$ $(t \geq 0)$, 则原不等式可写作 $f(|\sum x_i|) \leq \sum f(|x_i|)$.

我们将 $f(t)$ 变形为 $1 - \frac{c}{c+t}$. 当 $t \geq 0$ 时, t 增大会导致 $c + t$ 增大, 从而使 $\frac{c}{c+t}$ 减小, 因此 $f(t)$ 单调递增.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由三角不等式, $|\sum_{i=1}^n x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i|$. 由 $f(t)$ 单调递增,

知乎@余命数

$$f\left(\left|\sum_{i=1}^n x_i\right|\right) \le f\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)$$

知乎@余命数

即

$$\frac{|\sum_{i=1}^n x_i|}{c+|\sum_{i=1}^n x_i|} \le \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{c+\sum_{i=1}^n |x_i|}.$$

我们再验证 $f(t)$ 的次可加性. 对任意 $t_1, t_2 \ge 0$:

$$f(t_1+t_2) = \frac{t_1+t_2}{c+t_1+t_2} = \frac{t_1}{c+t_1+t_2} + \frac{t_2}{c+t_1+t_2}.$$

知乎@余命数

由 $t_1, t_2 \ge 0$, 有 $c+t_1+t_2 \ge c+t_1$ 且 $c+t_1+t_2 \ge c+t_2$. 于是

$$\frac{t_1}{c+t_1+t_2} \le \frac{t_1}{c+t_1} = f(t_1), \qquad \frac{t_2}{c+t_1+t_2} \le \frac{t_2}{c+t_2} = f(t_2)$$

相加得到 $f(t_1+t_2) \le f(t_1)+f(t_2)$. 由数学归纳法, 对任意 n 个非负变量,

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \le \sum_{i=1}^n f(t_i).$$

知乎@余命数

取 $t_i = |x_i|$, 即得

知乎@余命数

$$f\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right) \le \sum_{i=1}^n f(|x_i|) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{c+|x_i|}.$$

故

$$\frac{|\sum_{i=1}^n x_i|}{c+|\sum_{i=1}^n x_i|} \le \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{c+\sum_{i=1}^n |x_i|} \le \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{c+|x_i|},$$

原不等式得证.

注 5.6

当 $c=1, n=2$ 时, 对任意实数 a, b,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

这个不等式在度量空间理论中有用. 若 $d(x,y)=|x-y|$ 是一个度量, 则 $d'(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ 也是一个度量, 并且是有界度量.

5.8.2 利用变量代换构造齐次形式

当约束条件为乘积形式时，我们可以通过变量代换把它齐次化.

例题 5.32　设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 n 个正实数 ($n \geq 3$)，且满足 $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$. 证明：

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} < n-1$$

解　约束条件 $\prod a_i = 1$ 是非齐次的. 我们做一次变量代换，使约束自动满足，并把原不等式齐次化.

设存在正实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使得

$$a_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad a_2 = \frac{x_3}{x_2}, \quad \dots, \quad a_{n-1} = \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad a_n = \frac{x_1}{x_n}.$$

知乎@余命数

对任意满足乘积为 1 的正数 a_i，我们总可找到对应 x_i，因此这一代换是合理的.

代入后乘积条件自动满足：

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_1}{x_n} = 1.$$

知乎@余命数

求和式中每一项变为

$$\frac{1}{1+a_i} = \frac{1}{1+x_{i+1}/x_i} = \frac{x_i}{x_i + x_{i+1}} \quad (x_{n+1} = x_1).$$

知乎@余命数

因此原不等式等价于：对任意正实数 $x_1, \dots, x_n$，

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + x_{i+1}} < n-1.$$

先证左侧. 由 $x_j > 0$ 对所有 j 成立，$x_i + x_{i+1} < \sum_{j=1}^{n} x_j$，从而

$$\frac{x_i}{x_i + x_{i+1}} > \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}.$$

对 $i = 1, \dots, n$ 求和：

知乎@余命数

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + x_{i+1}} > \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j} = 1.$$

再证右侧. 将每一项变形为

$$\frac{x_i}{x_i + x_{i+1}} = 1 - \frac{x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}},$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对 $i=1,\dots,n$ 求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+x_{i+1}}=n-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}.$$

要证右侧不等式, 只需证明 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}>1$. 仿照左侧的放缩方法, 由 $x_i+x_{i+1}<\sum_{j=1}^{n}x_j$ 得

$$\frac{x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}>\frac{x_{i+1}}{\sum_{j=1}^{n}x_j}.$$

求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}>\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{\sum_{j=1}^{n}x_j}=1$$

(其中 $\sum x_{i+1}$ 只是 $x_1,\dots,x_n$ 的循环移位, 仍为 $\sum x_j$).

于是 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+x_{i+1}}=n-$(大于 1 的数), 其值小于 $n-1$.

结合以上两方面, 原不等式得证.

5.8.3 在组合计数中的应用

糖水不等式也可用于比较组合数的大小, 从而证明某些代数不等式.

例题 5.33 已知 i,m,n 是正整数, 且 $1<i\le m<n$. 证明:

1. $n^iA_m^i<m^iA_n^i$
2. $(1+m)^n>(1+n)^m$

其中 $A_n^k=n(n-1)\dots(n-k+1)$ 表示排列数.

解 (1) 不等式 $n^iA_m^i<m^iA_n^i$ 等价于 $\frac{A_m^i}{m^i}<\frac{A_n^i}{n^i}$.

化简两边:

$$\frac{A_m^i}{m^i}=\frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{m\cdot m\cdots m}=\prod_{k=0}^{i-1}\frac{m-k}{m}$$

$$\frac{A_n^i}{n^i}=\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n\cdot n\cdots n}=\prod_{k=0}^{i-1}\frac{n-k}{n}$$

比较对应项 $\frac{m-k}{m}$ 与 $\frac{n-k}{n}$, $k=0,1,\dots,i-1$. 当 $k=0$ 时, 两项相等, 均为 1.

当 $1\le k\le i-1$ 时, 由于 $m<n$, $\frac{m-k}{n-k}$ 是真分数. 由糖水不等式,

$$\frac{m-k}{n-k}<\frac{(m-k)+k}{(n-k)+k}=\frac{m}{n}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因为 $m,n,n-k$ 均为正, 上式可化为 $n(m-k)<m(n-k)$, 即

$$\frac{m-k}{m}<\frac{n-k}{n}.$$

由于 $i>1$, 至少存在一个 $k\geq 1$ 使不等号取严格小于. 因此

$$\prod_{k=0}^{i-1}\frac{m-k}{m}<\prod_{k=0}^{i-1}\frac{n-k}{n}$$

即 $\frac{A_m^i}{m^i}<\frac{A_n^i}{n^i}$, 故 $n^iA_m^i<m^iA_n^i$ 成立.

(2) 用二项式定理展开两边:

$$(1+m)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^k,\qquad (1+n)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}n^k.$$

对 $k=0,1,\dots,m$, 比较 $\binom{n}{k}m^k$ 与 $\binom{m}{k}n^k$. 由 $\binom{n}{k}=\frac{A_n^k}{k!}$ 和 $\binom{m}{k}=\frac{A_m^k}{k!}$, 比较两者等价于比较 $m^kA_n^k$ 与 $n^kA_m^k$.

根据 (1) 的结论, 对 $1<k\leq m<n$, 有 $n^kA_m^k<m^kA_n^k$, 因此 $\binom{m}{k}n^k<\binom{n}{k}m^k$.

考察两个和式:

$$(1+m)^n=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}m^k+\sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}m^k$$

$$(1+n)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}n^k$$

由于 $n>m$, $(1+m)^n$ 中从 $k=m+1$ 到 n 的项均为正, 故 $\sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}m^k>0$.

比较前 $m+1$ 项.

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}m^k>\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}n^k$$

因为 $k=0,1$ 时两边相等, 而 $k=2,\dots,m$ 时左边严格大于右边.

综合以上两点,

$$(1+m)^n=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}m^k+(\text{正数})>\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}n^k=(1+n)^m$$

不等式得证.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

5.9 放缩思想

前面各节介绍的均值、柯西、排序等不等式都是成形工具, 结构匹配时直接代入. 大量不等式问题需要自行构造中间量. 与解方程相比, 不等式推理多出一层方向性, 即它依赖实数序的传递性,

$$A \le B \quad \text{且} \quad B \le C \implies A \le C$$

要证明 $A \le C$ 而直接比较有困难时, 可寻找一个中间量 B, 分别证明 $A \le B$ 与 $B \le C$. 这个中间量就是**放缩**.

一次成功的放缩需要同时满足三个条件.

- **方向保持**: 每一步放大或缩小都必须维持不等号的指向, 并留意等号条件是否被改变.
- **目标导向**: 放缩服务于得到可处理的对象, 可以求和、可以约分、可以套用已知不等式.
- **精度适度**: 放得太多, 结论不成立; 放得太少, 计算难以继续. 在保持方向的前提下剥离次要因素, 即为精度适度.

本节介绍三种最常用的放缩技术.

5.9.1 舍项与添项

在正数范围内, 下列事实几乎不需要证明, 却十分实用.

- 分式的分母**舍去**一个正项, 分母变小, 分式变大; **添上**一个正项, 分式变小.
- 代数和中**舍去**一个非负项, 总和不变或变小; **添上**一个非负项, 总和不变或变大.

舍项放缩的作用在于统一, 即把几个略有差异的表达式化为相同结构, 从而可合并处理.

例题 5.34 设 a, b, c, d 为正实数. 证明, 得

$$1 < \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} < 2$$

解 四个分式的分母都接近 $a+b+c+d$, 但各自缺少一个不同变量, 直接相加较困难. 这时应把分母统一, 以便相加.

为证下界, 给每个分母添上所缺变量, 分母变大, 分式变小.

$$\frac{a}{a+b+d} > \frac{a}{a+b+c+d}, \qquad \frac{b}{a+b+c} > \frac{b}{a+b+c+d}, \qquad \cdots$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

四式相加，分母统一为 $a+b+c+d$，分子之和恰为 $a+b+c+d$.

$$\text{原式} > \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

为证上界，需放大每个分式. 每个分式都是真分数，由糖水不等式 (第5.8节)，分子分母同加一个正数，分式的值增大. 给每个分式添上所缺变量，得

$$\frac{a}{a+b+d} < \frac{a+c}{a+b+c+d}, \qquad \frac{b}{a+b+c} < \frac{b+d}{a+b+c+d},$$

$$\frac{c}{b+c+d} < \frac{c+a}{a+b+c+d}, \qquad \frac{d}{a+c+d} < \frac{d+b}{a+b+c+d}.$$

四式相加，分母同为 $a+b+c+d$，分子之和为 $2(a+b+c+d)$.

$$\text{原式} < \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2$$

故原式严格介于 1 与 2 之间.

注 5.7
同一个表达式，向下放缩得到下界，向上放缩得到上界；两个方向都指向统一分母 $a+b+c+d$. 放缩方向完全由目标决定. 要证下界，就把每一项缩小；要证上界，就把每一项放大.

5.9.2 裂项放缩

我们用放缩处理数列求和不等式. 对于难以精确求和的级数 $\sum_{k=1}^{n} a_k$，一个基本策略是把通项 a_k 放缩成某个**可裂项相消**的差分形式 $b_{k-1}-b_k$，求和时中间项抵消，只留首尾.

例题 5.35　证明：对任意正整数 n，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 2$$

解　通项 $\frac{1}{k^2}$ 需要改写成相邻两项之差. 当 $k \geq 2$ 时，把分母中的 k^2 换成更小的 $k(k-1)$，分式变大且可裂项.

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

保留首项，从第二项起应用此放缩.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

证毕.

上述证明中, 最大的损失发生在第二项, $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ 被放大成 $\frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$, 一处就放掉了 $\frac{1}{4}$ 的余量. 若要更精确的估计, 我们改用分母更接近 k^2 的裂项方式.

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$$

保留前两项的精确值, 从 $k = 3$ 起放缩, 得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) < \frac{33}{20} = 1.65$$

这与该级数真实极限值 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$ 已相当接近. 同一个问题, 放缩得越贴身, 得到的界越精确; 保留越多精确首项, 损失越小.

注 5.8 (放缩的度)
放缩的力度需要与目标匹配. 若在上例中把 $\frac{1}{k^2}$ 放大为 $\frac{1}{k}$, 求和将得到发散的调和级数, 任何常数上界都不存在, 因此放缩过度会使结论失效. 一次合格的放缩必须同时满足两个条件. 放松后的对象**可处理**(能求和、能约简), 且放松的**总量落在目标允许的余量内**. 动手前应先估计各项数量级, 起主要作用的大项必须保留, 只剥离影响甚微的次要因素.

5.9.3 基本函数不等式放缩

三角函数、指数函数与对数函数同多项式的直接代数比较往往比较困难. 处理含这些函数的不等式, 我们先用一组多项式把它们夹住, 再在多项式的范围内求解. 这些基本放缩来自函数图象与其切线的位置关系, 也是 第5.10节 切线法的素材.

定理 5.13 (正弦与正切的基本序) 对任意 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 恒有

$$\sin x < x < \tan x$$

证明 (面积比较)

如图, 在单位圆中取圆心角 $\angle AOP = x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$, 其中 A 为单位圆与 x 轴正半轴的交点, P 为圆上对应点. 过 P 作 OA 的垂线, 垂足为 Q; 过 A 作圆的切线(垂直于半径 OA), 交射线 OP 的延长线于 T.

由三角函数定义, $PQ = \sin x$, $AT = \tan x$. 考察三个区域的面积.

- 三角形 OAP 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot PQ = \frac{1}{2}\sin x$;
- 扇形 OAP 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x = \frac{x}{2}$;

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

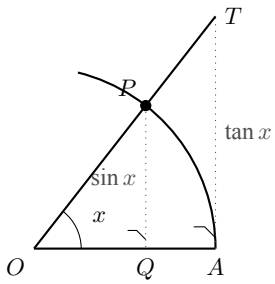


图 5.3　单位圆中的面积比较.$\triangle OAP$、扇形 OAP 与 $\triangle OAT$

- 三角形 OAT 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AT=\frac{1}{2}\tan x$.

由图形的包含关系, $\triangle OAP$ 严格含于扇形 OAP, 扇形 OAP 又严格含于 $\triangle OAT$, 故

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\tan x$$

两边同乘以 2, 即得 $\sin x<x<\tan x$. □

注 5.9
对 $\sin x<x<\tan x$ 各项取倒数并整理, 可得 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. 当 $x\to 0$ 时两端都趋于 1, 由夹逼原理即得重要极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 这是微分学的基本极限, 严格极限语言见 第四卷第 16 章.

定理 5.14 (指数函数的基本放缩) 对任意实数 x, 恒有

$$e^x\geq 1+x$$

等号成立当且仅当 $x=0$.

指数基本放缩的导数证明

证明 (导数法) 我们构造辅助函数 $f(x)=e^x-1-x$, 只需证明 $f(x)\geq 0$. 求导得 $f'(x)=e^x-1$. 当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$, f 单调递减; 当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$, f 单调递增. 故 f 在 $x=0$ 处取得最小值 $f(0)=0$. 于是对任意实数 x 都有 $f(x)\geq 0$, 即 $e^x\geq 1+x$, 等号当且仅当 $x=0$. □

注 5.10 (切线放缩的几何意义)
不等式 $e^x\geq 1+x$ 的几何含义是, 曲线 $y=e^x$ 恒位于其在 $x=0$ 处的切线 $y=1+x$ 的上方 (切点除外). 这正是凸函数的特征性质, 见 第3.6节. 这种用切线夹住曲线的想法将在 第5.10节 中发展为系统性的切线法. 本节证明中使用的导数工具, 其理论基础见 第四卷第 16 章.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

推论 5.1 (对数函数的基本放缩) 对任意 $x > -1$, 恒有

$$\ln(1+x) \le x$$

等号成立当且仅当 $x = 0$. 等价地, 对任意 $x > 0$, 有 $\ln x \le x - 1$.

知乎@余命数

证明 设 $x > -1$, 则 $1 + x > 0$. 对不等式 $e^x \ge 1 + x$ 两边取自然对数, 由对数函数单调递增, 得 $x \ge \ln(1+x)$. 等号条件继承自指数放缩, 当且仅当 $x = 0$. 将 x 替换为 $x - 1$, 即得等价形式 $\ln x \le x - 1$ $(x > 0)$. □

例题 5.36 证明: 对任意正整数 n,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) < e$$

解 左边是连乘积, 右边是 e. 由指数放缩 $e^x \ge 1 + x$, 1 加一个小量与 e 的幂联系起来, 而幂的乘积又可化为指数之和. 我们对每个因子应用严格不等式 $1 + x < e^x$ $(x > 0)$.

$$1 + \frac{1}{2^k} < e^{1/2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

n 个正项不等式相乘, 得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) < \prod_{k=1}^{n} e^{1/2^k} = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = e^{1-\frac{1}{2^n}} < e$$

最后一步因为指数 $1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 且指数函数单调递增.

例题 5.37 证明: 对任意正整数 n,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

解 左边是调和级数的部分和, 右边是对数. 这提示我们使用对数放缩 $\ln(1+x) < x$ $(x > 0)$ 把每一项 $\frac{1}{k}$ 与对数联系起来. 取 $x = \frac{1}{k}$, 得

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$$

右边恰为相邻对数之差, 又是一个裂项结构. 对 $k = 1$ 到 n 求和, 中间项抵消:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证毕.

5.10 局部化与孤立思想

注 5.11
切线法把函数的局部线性近似写成 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 其严格理论见 第四卷第 16 章. 本节只用初等方法, 即作差定号、配方与均值不等式.

我们面对多元对称和式

$$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)\geq C$$

直接处理整体时经常会遇到困难, 因为变量被约束条件互相纠缠. **局部化**思想把整体命题拆成每个变量单独成立的**局部命题**

$$f(x)\geq \ell(x)\quad (\text{对每个}x\text{ 单独成立})$$

然后把 n 个局部不等式相加. 每个变量被孤立出来, 多元问题就被降维成一元问题.

局部不等式需要精心设计. 一个合格的 $\ell(x)$ 要满足三条.

- **单项可证**. $f(x)\geq\ell(x)$ 是一元不等式, 比原问题简单.
- **求和闭合**. $\sum\ell(a_i)$ 恰好能被约束条件算尽, 得到目标常数 C.
- **等号兼容**. 局部等号条件与整体等号条件一致, 保证求和后等号可以同时成立.

满足这些条件的 $\ell(x)$ 通常取一次函数. 一次函数求和后只出现 $\sum a_i$, 最容易被约束条件吸收.

5.10.1 局部放缩

我们先看一个典型的局部放缩例子.

例题 5.38 设 a,b,c 为正实数. 证明, 得

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

解 左边是三个结构相同的分式之和, 右边只含变量的和. 这提示我们为每一项找一个线性的局部估计

$$\frac{a^2}{a+b}\geq\alpha a+\beta b$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

使得三式相加后右边恰好是 $\frac{a+b+c}{2}$.

利用齐次性, 令 $b=1$, 记 $t=\frac{a}{b}$, 把局部不等式化为单变量形式

$$g(t)=\frac{t^2}{t+1}\geq \alpha t+\beta$$

等号条件 $a=b$ 对应 $t=1$. 取 g 在 $t=1$ 处的切线. $g(1)=\frac{1}{2}$、$g'(t)=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}$、$g'(1)=\frac{3}{4}$. 切线为 $y=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}(t-1)=\frac{3t-1}{4}$. 据此猜测局部不等式

$$\frac{a^2}{a+b}\geq \frac{3a-b}{4}$$

作差得

$$\frac{a^2}{a+b}-\frac{3a-b}{4}=\frac{4a^2-(3a-b)(a+b)}{4(a+b)}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\geq 0$$

局部不等式成立, 等号当且仅当 $a=b$. 同理写出另外两式, 三式相加.

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{a+b}\geq \frac{(3a-b)+(3b-c)+(3c-a)}{4}=\frac{2(a+b+c)}{4}=\frac{a+b+c}{2}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$.

注 5.12

本例中局部不等式的线性式 $\frac{3a-b}{4}$, 是比值函数 $g(t)$ 在等号点处的切线. 这也说明局部化的作用方式, 并且引出下一小节的切线法.

切线法

5.10.2 切线法

设我们要在约束 $a_1+\cdots+a_n=S$ 下证明 $\sum f(a_i)\geq C$, 且等号在所有变量相等 ($a_i=x_0=\frac{S}{n}$) 时取得. 我们希望找到线性函数 $\ell(x)=kx+b$, 使 $f(x)\geq \ell(x)$, 并且求和后恰好得到 C. 这两个要求唯一地决定 ℓ.

- 等号兼容要求 $f(x_0)=kx_0+b$, 即直线过点 $(x_0,f(x_0))$.
- 令 $h(x)=f(x)-kx-b$, 则 $h(x)\geq 0$ 且 $h(x_0)=0$, 即 x_0 是 h 的最小值点, 故 $h'(x_0)=0$, 即 $k=f'(x_0)$.

于是 ℓ 是 f 在等号点 x_0 处的**切线**.

$$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

这就是**切线法**. 它在等号成立点作曲线的切线, 用切线代替曲线参与求和. 线性式求和后只含 $\sum a_i$, 约束条件把它算尽.

$$\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\geq nf(x_0)+f'(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-nx_0\right)=nf(x_0)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

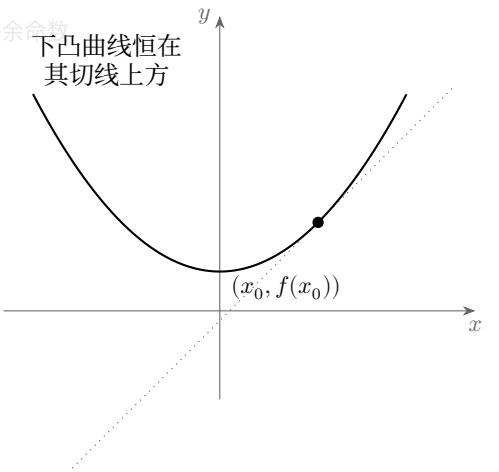


图 5.4　切线法的几何直观, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

几何上, 若 f 是下凸函数, 其图象恒在任一切线的上方 (第3.6节), 切线不等式自动成立. 但切线法的适用范围不止于凸函数; 只要作差后能在取值范围内定号, 即使 f 改变凸性, 方法仍然有效. 操作分四步.

- **定等号点**. 由对称性与约束条件猜测等号点 x_0(通常为变量的平均值).
- **写切线**.$\ell(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- **作差验证**. 计算 $f(x) - \ell(x)$, 通分后分子应分解出 $(x - x_0)^2$ 因子, 这是切线与曲线二阶接触的代数特征, 并确认其在取值范围内不变号.
- **求和消元**. 对各项求和, 线性项被约束条件算尽, 即得目标常数.

如果要证 $\sum f(a_i) \leq C$, 方向相反, 需要曲线在切线下方(上凸型).

例题 5.39　设 a, b, c 为正实数, 且 $a + b + c = 3$. 证明:

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}$$

解　约束具有对称性, 等号在 $a = b = c = 1$ 取得. 考察单项函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在 $x_0 = 1$ 处的切线. $f(1) = \frac{1}{2}$、$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$、$f'(1) = 0$. 切线是水平直线 $\ell(x) = \frac{1}{2}$. 作差得

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1 + x^2 - 2x}{2(1+x^2)} = \frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \geq 0$$

局部不等式 $\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ 对所有实数 x 成立. 三式相加即得

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{1+a^2} \leq \frac{3}{2}$$

等号成立当且仅当 $a = b = c = 1$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 5.40 设 a,b,c 为正实数, 且 $a+b+c=3$. 证明:

$$\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+2}+\frac{c^2}{c+2}\geq 1$$

解 等号在 $a=b=c=1$ 取得. 考察 $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ 在 $x_0=1$ 处的切线. $f(1)=\frac{1}{3}$、$f'(x)=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$、$f'(1)=\frac{5}{9}$. 切线为 $\ell(x)=\frac{1}{3}+\frac{5}{9}(x-1)=\frac{5x-2}{9}$. 作差得

$$\frac{x^2}{x+2}-\frac{5x-2}{9}=\frac{9x^2-(5x-2)(x+2)}{9(x+2)}=\frac{4x^2-8x+4}{9(x+2)}=\frac{4(x-1)^2}{9(x+2)}\geq 0$$

分子分解出了 $(x-1)^2$. 对 a,b,c 分别应用局部不等式并求和.

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^2}{a+2}\geq\frac{5(a+b+c)-6}{9}=\frac{5\cdot 3-6}{9}=1$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=1$.

例题 5.41 设 a,b,c 为正实数, 且 $a+b+c=1$. 证明:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\leq\frac{27}{10}$$

解 等号在 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 取得. 考察 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $x_0=\frac{1}{3}$ 处的切线. $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}$、$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$、$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{27}{50}$. 切线为 $\ell(x)=\frac{9}{10}-\frac{27}{50}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{27(2-x)}{50}$. 作差得

$$\frac{27(2-x)}{50}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{27(2-x)(1+x^2)-50}{50(1+x^2)}=\frac{-27x^3+54x^2-27x+4}{50(1+x^2)}$$

分子按切线法的特征分解出 $(3x-1)^2$.

$$-27x^3+54x^2-27x+4=(3x-1)^2(4-3x)$$

当 $0<x<1$ 时, $(3x-1)^2\geq 0$ 且 $4-3x>0$, 故差式非负, 局部不等式成立. 三式相加.

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{1+a^2}\leq\frac{27}{50}(6-(a+b+c))=\frac{27}{50}\cdot 5=\frac{27}{10}$$

等号成立当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$.

注 5.13 (凹凸性改变时的切线法)
计算二阶导数, $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$. 当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $f''(x)<0$, f 上凸; 当 $\frac{1}{\sqrt{3}}<x<1$ 时 $f''(x)>0$, f 下凸. 函数在区间 $(0,1)$ 内改变凹凸性, 琴生不等式要求在整个区间上凹凸一致,

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

因而这里的前提不足. 切线法只要求作差后在取值范围上定号, 因此仍然适用. 它与琴生不等式的联系见 第5.15节.

注 5.14 (切线法的适用边界与对策)
切线法有以下边界, 需要相应变通.

- **作差变号**. 切线穿过了曲线, 说明在该取值范围上缺少全局的切线夹持, 需要另寻支撑线或改用他法.
- **等号落在边界**. 若最值在边界或端点取得, 例如某变量趋于 0, 对称点的切线失效. 此时可尝试过曲线**端点的割线**作为支撑线, 或改用调整法 (第5.14节).
- **约束为乘积形式**. 若约束为 $abc=1$ 这类乘积形式, 可先取对数或作代换 (第5.13节) 化为和式约束, 再行局部化.

局部化把多元问题降维成一元问题, 切线法给出了一种局部线性估计方法. 二者都是放缩.

知乎@余命数

5.11 构造思想

知乎@余命数

前面各节的方法都是对问题中**已有**的表达式施加变形. 构造思想更进一步. 我们引入一个新的数学对象, 可以是函数、方程、向量、几何图形, 甚至物理模型, 让隐藏的代数关系在新对象上显现.

构造法有规律可循. 待证式子的**结构特征**会暗示我们该构造什么. 判别式的形状对应二次函数, 内积的形状对应一对向量, 根式的形状对应一段距离, 和式加权的形状对应质点系重心. 本节展示这些对应关系.

5.11.1 构造二次函数与方程

知乎@余命数

回顾柯西不等式的经典证明 (第5.5节). 要证

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

关键在于右减左的形状酷似二次函数的判别式 $\Delta = B^2 - 4AC$. 于是构造

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2 = \left(\sum a_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum a_i b_i\right) t + \sum b_i^2$$

知乎@余命数

这一步包含两个要点. 第一, $P(t)$ 是**平方和**, 平方非负, 故 $P(t) \ge 0$ 恒成立. 第二, 一个恒非负的二次函数与 t 轴至多有一个交点, 于是**判别式**把恒非负这个事实翻译成了系数之间的代数不等式 $\Delta \le 0$, 整理即得柯西不等式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

构造的对象也可以是方程. 当需要刻画某个值存在时, 方程有实根这一要求本身就会产生不等式.

例题 5.42 (判别式法求值域) 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ 的值域.

解 设 y 是函数值, 则存在实数 x 使得

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \iff (y-1)x^2-x+(y-1)=0$$

把 y 看作参数, 构造出关于 x 的方程.y 在值域中等价于此方程有实根.

若 $y=1$, 方程化为 $-x=0$, 有解 $x=0$, 故 $y=1$ 可取.

若 $y\neq 1$, 这是关于 x 的二次方程, 有实根的充分必要条件是判别式非负.

$$\Delta=1-4(y-1)^2\geq 0 \iff (y-1)^2\leq\frac{1}{4} \iff \frac{1}{2}\leq y\leq\frac{3}{2}$$

端点可以取到: $y=\frac{1}{2}$ 时方程有重根 $x=-1$, 且 $f(-1)=\frac{1}{2}$; $y=\frac{3}{2}$ 时方程有重根 $x=1$, 且 $f(1)=\frac{3}{2}$.

故函数的值域为 $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

注 5.15
判别式法通过构造一个以所求量为参数的方程, 用有实根替代直接求最值. 它与柯西不等式的判别式证明共同利用了一个事实. **二次式的非负性, 是不等式最基本、最直接的来源.**

5.11.2 构造向量与几何图形

许多代数结构在欧氏空间中有天然对应.

- $\sum a_ib_i$ 是向量**内积**, 由 $|\vec{m}\cdot\vec{n}|\leq|\vec{m}|\,|\vec{n}|$ 立即得到柯西不等式. 这正是 第5.5节 向量形式的观点;
- $\sqrt{a^2+b^2}$ 是平面上点 (a,b) 到原点的**距离**, 根式之和提示折线长度, 而折线不短于直线段正是闵可夫斯基不等式 (第5.5节) 的几何依据.

把代数式翻译为几何对象后, 三角不等式等直观事实可直接调用.

例题 5.43 证明: 对任意实数 x,

$$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-6x+25}\geq\sqrt{58}$$

解 两个根式都是平方和开根的形状, 对应距离. 把第二项配方.

$$\sqrt{x^2-6x+25}=\sqrt{(x-3)^2+16}$$

在平面上构造三点 $A(0,3)$, $B(3,-4)$, 以及 x 轴上的动点 $P(x,0)$. 则

$$|PA|=\sqrt{x^2+9},\qquad |PB|=\sqrt{(x-3)^2+4^2}=\sqrt{x^2-6x+25}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 A 在 x 轴上方而 B 在下方, 点 P 无论在 x 轴上如何移动, 折线 $A \to P \to B$ 的长度都不短于直线段 AB.

$$|PA| + |PB| \geq |AB| = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

等号成立当且仅当 P 落在线段 AB 与 x 轴的交点处. 直线 AB 的方程为 $y = 3 - \frac{7}{3}x$, 令 $y = 0$ 得 $x = \frac{9}{7}$, 确实在线段范围内, 故等号可以取到.

原不等式成立, 且左边可取得最小值 $\sqrt{58}$.

注 5.16
构造几何图形需要恰当地摆放已知量. 本题把 $9 = 3^2$ 和 $16 = 4^2$ 摆成纵坐标, 把变量 x 摆成横坐标, 两个根式便各归其位. 若将 A, B 置于 x 轴同侧, 则需先作对称点再连线, 这是几何最值问题的标准手法.

5.11.3 构造物理与概率模型

构造的对象也可以来自物理. 在 x 轴上的点 $x_1, \dots, x_n$ 处分别放置质量为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的质点 ($\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$), 则质点系的**重心**位于

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

对下凸函数 f, 曲线上各点 $(x_i, f(x_i))$ 的加权重心 $(\bar{x}, \sum \lambda_i f(x_i))$ 必落在连接各点的弦, 或其凸组合区域上, 因而位于曲线下方点 $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ 的上方, 即

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

这正是琴生不等式 (第3.6节). 重心模型给出琴生不等式的一个直观来源, 并且说明加权形式中 λ_i 就是权重. 我们还将在 第5.15节 中继续讨论.

注 5.17 (概率观点前瞻)
若把权重 λ_i 看作随机变量 X 取值 x_i 的概率, 则 $\bar{x} = E[X]$, 琴生不等式读作 $f(E[X]) \leq E[f(X)]$ (f 下凸). 取 $f(x) = x^2$ 即得 $E[X^2] \geq (E[X])^2$, 这正是方差非负. 柯西不等式、琴生不等式在概率论中都有对应形式, 详见 第二卷第 10 章.

构造辅助函数并用导数讨论

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.11.4 构造辅助函数

比较 A 与 B 的大小, 最直接的想法是作差 $A-B$. 构造思想把它函数化. 我们引入辅助函数 $F(x)=A(x)-B(x)$, 把比较两个数转化为研究一个函数的符号, 于是可以调用单调性这一工具(其严格判定由 第四卷第 16 章给出).

例题 5.44 证明: 当 $x>0$ 时, $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

解 作差构造辅助函数

$$F(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$$

则 $F(0)=0$, 且

$$F'(x)=e^x-1-x$$

由 第5.9节 的指数基本放缩, $e^x\geq 1+x$ 恒成立, 故 $F'(x)\geq 0$, F 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 于是当 $x>0$ 时, $F(x)>F(0)=0$, 即 $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$.

注 5.18
基本放缩 $e^x\geq 1+x$ 可以递归加强. 对它求导或积分构造一次, 可得带二次项的更紧估计; 重复这一过程, 得到 e^x 的各阶多项式逼近, 这正是泰勒展开截断的雏形, 其严格理论由 第四卷第 16 章给出.

例题 5.45 比较 e^π 与 π^e 的大小.

解 两数均为正, 取自然对数后等价于比较 π 与 $e\ln\pi$, 再同除以正数 $e\pi$, 等价于比较

$$\frac{\ln e}{e} \quad 与 \quad \frac{\ln\pi}{\pi}$$

两个数具有完全相同的结构 $\frac{\ln x}{x}$, 只是代入的 x 不同, 这提示构造同一函数. 设

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}\quad (x>0)$$

求导得 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $x>e$ 时 $\ln x>1$, 故 $f'(x)<0$, f 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减. 由 $e<\pi$ 得 $f(e)>f(\pi)$, 即 $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$. 逐步回溯等价变形, 得

$$e^\pi>\pi^e$$

构造法有一条统一的线索. **盯住待证式的结构**. 判别式、内积、距离、重心、差函数, 这些结构识别得越准确, 构造就越自然.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.12 齐次化与规范化

许多不等式带有**约束条件**, 例如 $a+b+c=1$ 或 $abc=1$, 或写成次数不齐的形式. 处理这类问题时, 先做次数分析往往能化繁为简. 次数分析可以把多元问题降维, 也可以把次数不齐的不等式转化为齐次形式.

5.12.1 齐次性

一个由变量 $a_1,\dots,a_n$ 构成的表达式 F 称为 d **次齐次**的, 若将所有变量同时乘以 $t>0$ 时 F 被乘以 t^d.

知乎@余命数

$$F(ta_1,\dots,ta_n)=t^d\cdot F(a_1,\dots,a_n)$$

不等式 $F\ge G$ 是**齐次的**, 当且仅当两边同次. 此时, 若对所有正实数 a_i 都有 $F\ge G$, 则对任意正数 t,

知乎@余命数

$$F(ta_i)=t^dF(a_i)\ge t^dG(a_i)=G(ta_i).$$

这个性质给出了一份自由度. **齐次不等式可以随意添加归一化约束**, 例如

$$a+b+c=1,\qquad abc=1,\qquad a^2+b^2+c^2=3$$

因为对任意原始变量, 总能找到合适的 t 使归一化条件成立.

- 若 $a+b+c=S>0$, 令 $t=\frac{1}{S}$, 则 $t(a+b+c)=1$;
- 若 $abc=P>0$, 令 $t=\frac{1}{\sqrt[3]{P}}$, 则 $(ta)(tb)(tc)=t^3P=1$.

齐次性保证了原不等式在 (a,b,c) 成立当且仅当在 (ta,tb,tc) 成立, 因而可**不妨假设**归一化条件成立. 这是 第5.4节 末内斯比特不等式中设 $a+b+c=1$ 的手法.

5.12.2 齐次化

另一些情形, 待证不等式左右次数不一致. 例如条件 $abc=1$ 出现在题设中, 而目标一侧为二次、一侧为一次. 此时**齐次化**的任务是用条件把常数 1 替换回有次数的表达式, 使等号两侧次数相同, 以便使用对称不等式操作.

例题 5.46 (齐次化) 设 a,b,c 为正实数, 且 $abc=1$. 证明:

$$a^2+b^2+c^2\ge a+b+c$$

解 左边 $a^2+b^2+c^2$ 是 2 次, 右边 $a+b+c$ 是 1 次, 不等式次数不齐. 直接用 $a^2\ge a$ 放缩只在 $a\ge 1$ 时成立, 会因遗漏 $abc=1$ 而失败.

我们用条件把右边补成与左边同次. 由 $abc=1$, 有

$$a+b+c=(a+b+c)(abc)^{1/3}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此式在 $abc=1$ 时与原右边相等, 故与原不等式等价. 现在两边都是 2 次, 已脱离约束, 只需证明对一切正实数

$$a^2+b^2+c^2 \geq (a+b+c)\sqrt[3]{abc}.$$

右边展开为 $a\sqrt[3]{abc}+b\sqrt[3]{abc}+c\sqrt[3]{abc}$, 即对称和 $[\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$; 左边是 $[2,0,0]$. 由优超关系 $(2,0,0)\succeq(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$(分量按不增序, $2\geq\frac{4}{3}$, $2+0\geq\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$, 总次均为 2), Muirhead 定理, 见本节末直接给出结论. 代回 $abc=1$ 即得原不等式, 等号在 $a=b=c=1$ 取得.

此例说明, 若待证式不齐次, 可用约束补齐次数, 再考虑放缩.

例题 5.47 (规范化) 设 a,b,c 为正实数. 证明:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

解 不等式两端均为 3 次, 是齐次不等式. 由齐次性, 不妨规范化为 $abc=1$. 对任意正实数 a,b,c, 取 $t=(abc)^{-1/3}$, 则 $a'=ta, b'=tb, c'=tc$ 满足 $a'b'c'=1$, 而

$$\frac{(a'+b')(b'+c')(c'+a')}{a'b'c'}=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

即原不等式在 (a,b,c) 与 (a',b',c') 处等价. 于是只需证 $abc=1$ 的情形, 此时即证 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8$.

由 AM-GM,

$$a+b\geq 2\sqrt{ab},\quad b+c\geq 2\sqrt{bc},\quad c+a\geq 2\sqrt{ca}.$$

三式相乘.

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc.$$

等号当且仅当 $a=b=c$.

注 5.19 (齐次化与规范化的对称分工)
齐次化与规范化是齐次不等式处理的两面. 条件 $a+b+c=1$、$abc=1$ 等在源条件中原样出现, 便于减少一个变量, 这是**规范化**. 不等式未齐次时, 把 1 替换回条件的 1 次式 $(a+b+c)$ 或 $(abc)^{1/3}$, 这是**齐次化**. 实战常交叉使用. 先齐次化统一, 再规范化减元.

齐次化之后, 对称多项式记号 $s_1=a+b+c$、$s_2=ab+bc+ca$、$s_3=abc$ 会自然出现. 它们把三个对称多项式联系起来, 这就是下一小节的 Schur 不等式.

5.12.3 Schur 不等式

三元对称不等式中, 一个最基础的结果源于 Schur.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.15 (Schur 不等式) 设 $a,b,c\ge 0, r\ge 0$ 为实数. 则

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-a)(b-c)+c^r(c-a)(c-b)\ge 0$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$, 或 $r>0$ 且两数相等而第三者为 0, 例如 $a=b$, $c=0$.

证明 不妨设 $a\ge b\ge c\ge 0$, 对称性的好处见 第5.14节. 把左端按 a,b,c 重新组合.

$$a^r(a-b)(a-c)-b^r(a-b)(b-c)+c^r(c-a)(c-b)$$

注意 $(c-a)(c-b)=(a-c)(b-c)$(两个负因子之积), 故

$$\text{左端}=(a-b)\big[a^r(a-c)-b^r(b-c)\big]+c^r(a-c)(b-c).$$

逐项分析. 由 $a\ge b$, 有 $(a-b)\ge 0$. 又 $a\ge b$ 时 $a^r\ge b^r$ $(r\ge 0)$ 且 $a-c\ge b-c\ge 0$, 故

$$a^r(a-c)\ge b^r(a-c)\ge b^r(b-c),$$

即 $a^r(a-c)-b^r(b-c)\ge 0$. 因而第一项 $(a-b)[\cdots]\ge 0$. 又 $a\ge c$ 且 $b\ge c$, 故 $a-c\ge 0$, $b-c\ge 0$, 且 $c^r\ge 0$, 因而第二项 $c^r(a-c)(b-c)\ge 0$.

故左端为两个非负项之和, 故不小于 0.

至于等号条件, 若 $a=b=c$, 直接代入各项得 0. 若 $r>0$ 且 $a=b$, $c=0$, 则第一项为 0, 第二项 $c^r\cdot$ 非负 $=0$ $(c^r=0)$, 也成立. 反向, 设等号成立, 则两项皆须为零. 第一项为零要求 $a=b$, 或 $a^r(a-c)=b^r(b-c)$. 但 $r>0$ 且 $a>b$ 时 $a^r>b^r$, $a-c>b-c\ge 0$, 乘积严格更大, 故必 $a=b$. 第二项为零要求 $c=0$ ($r>0$ 时 $c^r=0$) 或 $a=b=c$. 结合得两种情形, $a=b=c$, 或 $a=b>c=0$ 及其置换. 当 $r=0$ 时 $c^r=1$, 第二项因子化为 $(a-c)(b-c)$, $a\ge b\ge c$ 且 $c>0$、$a>c$ 时该项严格正; 故 $r=0$ 时等号只在 $a=b=c$ 处成立. □

注 5.20 (Schur 的常用形式 ($r=1$))
$r=1$ 时, Schur 不等式写作

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\ge 0.$$

展开后用对称多项式 $s_1=a+b+c$、$s_2=ab+bc+ca$、$s_3=abc$ 表示为

$$s_1^3+9s_3\ge 4s_1s_2.$$

这是把三个对称多项式联系起来的不等式, 适合处理关于 $\sum a^3$、$\sum ab(a+b)$ 类目标的不等式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 5.48 设 a,b,c 为正实数, 证明

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

知乎@余命数

解 右端 $\sum ab(a+b)=\sum(a^2b+ab^2)$, 故左右差为

$$\sum a^3-\sum a^2b-\sum ab^2+3abc.$$

用对称多项式表示, $\sum a^3=s_1^3-3s_1s_2+3s_3$; $\sum ab(a+b)=s_1s_2-3s_3$. 代入

$$(s_1^3-3s_1s_2+3s_3)-(s_1s_2-3s_3)+3s_3=s_1^3-4s_1s_2+9s_3.$$

知乎@余命数

这是 $r=1$ 的 Schur 不等式 $s_1^3+9s_3\geq 4s_1s_2$ 的左端. 故成立,等号当且仅当 $a=b=c$ 或两数相等而第三者为 0. 由于 $a,b,c>0$, 等号仅在 $a=b=c$ 时取得.

知乎@余命数

5.12.4 Muirhead 定理与优超关系

Schur 处理的是三数对称单项式.Muirhead 定理则给出一个统一工具, 用于比较任意两个三元对称和.

定义 5.2 (对称和记号) 对非负实数指数 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与正实数 x,y,z, 记

$$[\mathbf{a}]=\sum_{\sigma} x^{a_{\sigma(1)}}y^{a_{\sigma(2)}}z^{a_{\sigma(3)}}$$

其中 σ 取遍 $\{1,2,3\}$ 的所有使各项不同的排列, 相同单项式只计入一次. 例如 $[3,0,0]=x^3+y^3+z^3$、$[2,1,0]=\sum_{\text{sym}}x^2y=x^2y+x^2z+\cdots+z^2y$、$[1,1,1]=xyz$.

对称和记号为比较三元对称和提供统一记号, 优超关系则给出比较的判据.

定义 5.3 (优超关系) 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 的分量非负, 且按不增顺序排列. 称 **a 优超 b**, 记 $\mathbf{a}\succeq\mathbf{b}$, 若满足

$$a_1\geq b_1,\quad a_1+a_2\geq b_1+b_2,\quad a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3.$$

知乎@余命数

优超关系是 Muirhead 定理的比较判据.

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.16 (Muirhead 定理) 设 $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$, 则对所有正实数 x, y, z,

$$[\mathbf{a}] \geq [\mathbf{b}]$$

当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 互为置换时等号恒成立; 否则等号成立当且仅当 $x = y = z$.

证明分两步. 第一步先证一个磨平引理, 它把一次微小的指数调整对应到对称和的单调不等式. 第二步再证优超关系总可通过有限次磨平达到.

引理 5.1 (单步磨平) 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ 且 $a_i \geq a_j$, $\epsilon \in [0, a_i - a_j]$. 记 $\mathbf{a}'$ 为把 a_i 减去 ϵ、把 a_j 加上 ϵ 所得的向量(其余分量不变). 则

$$[\mathbf{a}] \geq [\mathbf{a}']$$

证明 不妨设 $i = 1$, $j = 2$(其余情形由对称性同理). 将对称和中的项按第三个变量取 z^{a_3} 分组, 每组只涉及前两个变量 x, y, 公因式为 $z^{a_3} \geq 0$. 配而成对, 每对差为

$$x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1} - x^{a_1 - \epsilon} y^{a_2 + \epsilon} - x^{a_2 + \epsilon} y^{a_1 - \epsilon}.$$

提取公共因子 $x^{a_2} y^{a_2}$. 令 $R_1 = a_1 - a_2 - \epsilon \geq 0$, $R_2 = \epsilon \geq 0$, 则 $a_1 - a_2 = R_1 + R_2$, 括号内化为

$$x^{R_1 + R_2} + y^{R_1 + R_2} - x^{R_1} y^{R_2} - x^{R_2} y^{R_1} = (x^{R_1} - y^{R_1})(x^{R_2} - y^{R_2}).$$

由 $R_1, R_2 \geq 0$, 当 $x \geq y$ 时两因子同为非负; 当 $x \leq y$ 时同为非正. 故乘积非负, 每对差

$$x^{a_2} y^{a_2} \, (x^{R_1} - y^{R_1})(x^{R_2} - y^{R_2}) \geq 0.$$

乘上 $z^{a_3} \geq 0$ 后仍非负.

全部配对项相加, $[\mathbf{a}] - [\mathbf{a}'] \geq 0$. 等号当且仅当 $\epsilon = 0$(平凡)或 $x = y = z$. □

证明 (Muirhead 定理的证明) 设 $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b}$, 且不妨设 $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ 与 $b_1 \geq b_2 \geq b_3$(重排分量不改 $[\,\cdot\,]$ 的值). 我们证明, 若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, 则存在一次单步磨平, 把 $\mathbf{a}$ 变为某个 $\mathbf{c}$, 使 $\mathbf{c} \succeq \mathbf{b}$ 且

$$\sum_{k=1}^{3} (c_k - b_k)^2 < \sum_{k=1}^{3} (a_k - b_k)^2.$$

反复施行, 量 $\sum (a_k - b_k)^2$ 严格下降且非负, 有限步后必达到 $\mathbf{b}$. 每步由单步磨平引理使对称和不增, 故 $[\mathbf{a}] \geq \cdots \geq [\mathbf{b}]$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设 $\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$. 由总次数相等, 存在指标 i 使 $a_i>b_i$, 也存在指标 j 使 $a_j<b_j$. 取

$$\epsilon=\min(a_i-b_i,\ b_j-a_j)>0$$

令 $\mathbf{c}$ 为把 a_i 减去 ϵ、把 a_j 加上 ϵ 所得的向量. 则

- $c_i=a_i-\epsilon\geq b_i$, $c_j=a_j+\epsilon\leq b_j$, 其余分量不变;
- $\mathbf{c}$ 的分量之和仍等于 $\mathbf{b}$ 的分量之和;
- 对任意 $m=1,2$, 部分和 $\sum_{k=1}^{m}c_k^{\downarrow}\geq\sum_{k=1}^{m}b_k$ 仍成立, 其中 $c^{\downarrow}$ 为 $\mathbf{c}$ 按不增序重排后的向量. 这一点可由优超的标准性质得到, 即从较大分量向较小分量转移, 不破坏对 $\mathbf{b}$ 的优超关系.

因而 $\mathbf{c}\succeq\mathbf{b}$. 又

$$\sum_{k=1}^{3}(c_k-b_k)^2=\sum_{k=1}^{3}(a_k-b_k)^2-2\epsilon\big((a_i-b_i)+(b_j-a_j)\big)+2\epsilon^2<\sum_{k=1}^{3}(a_k-b_k)^2$$

(由 $\epsilon\leq a_i-b_i$ 且 $\epsilon\leq b_j-a_j$ 得 $\epsilon<(a_i-b_i)+(b_j-a_j)$, 括号内为正, 且 $\epsilon>0$), 量严格下降.

反复施行上述磨平, 有限步后 $\mathbf{a}$ 化为 $\mathbf{b}$. 每次磨平由单步磨平引理使对称和不增, 故

$$[\mathbf{a}]\geq\cdots\geq[\mathbf{b}].$$

当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 互为置换时等号恒成立; 否则至少有一次磨平 $\epsilon>0$, 引理严格等号仅在 $x=y=z$ 时发生, 故 Muirhead 等号当且仅当 $x=y=z$. □

注 5.21

Muirhead 定理把对称和的比较转化为指数向量的优超比较.AM-GM 等经典不等式都是它的特例.

- $(1,0,0)\succeq(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, 给出 $x+y+z\geq3(xyz)^{1/3}$(分数指数时 Muirhead 仍适用);
- $(2,1,0)\succeq(1,1,1)$, 给出 $\sum_{\text{sym}}x^2y\geq6xyz$, 是 Schur 的近亲.

例题 5.49 设 a,b,c 为正实数. 证明:

$$a^5+b^5+c^5\geq a^3bc+b^3ca+c^3ab$$

解 左边是 $[5,0,0]$, 右边是 $[3,1,1]$. 检查优超关系.$(5,0,0)\succeq(3,1,1)$, 因为 $5\geq3$, $5+0\geq3+1$, 总次都是 5. 由 Muirhead 定理,

$$[5,0,0]\geq[3,1,1]$$

即 $a^5+b^5+c^5\geq a^3bc+b^3ca+c^3ab$. 等号当且仅当 $a=b=c$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

注 5.22 (计算量)
齐次化配合 Muirhead, 原则上能把三元对称齐次不等式化为对称和之差, 再由优超关系判定. 展开后项数往往很多, 需要先看清主导项与等号结构, 再决定是否走这条路.

5.13 代数代换思想

处理不等式时, 约束条件常常是主要困难. 三角不等式把三边锁在一个区域内, 乘积 $abc=1$ 让变量相互牵制, $x^2+y^2=1$ 将点限制在单位圆上. **代数代换**的思路是引入新变量, 把这些受限约束**化掉**, 要么变成自由的正实数, 要么变成更对称、更易处理的形式.

代换的目的通常有两个.

- **化约束为自由**. 把必须满足某条件的变量, 换成天然落在定义域内的新变量.
- **化偏倚为对称**. 把结构不对称的表达式, 换成轮换或对称的新形式, 便于放缩或套用已知不等式.

本节介绍三类最常见的代换.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

5.13.1 Ravi 代换

设 a,b,c 是三角形的三边. 它们必须满足三角不等式

$$a<b+c,\quad b<c+a,\quad c<a+b.$$

直接在这个区域内讨论不等式较为繁琐.**Ravi 代换**把该受限区域转化为正实数的全体.

知乎@余命数

定义 5.4 (Ravi 代换) 设 a,b,c 为三角形的三边. 令

$$x=\frac{b+c-a}{2},\quad y=\frac{c+a-b}{2},\quad z=\frac{a+b-c}{2}$$

则 $x,y,z>0$, 且

$$a=y+z,\quad b=z+x,\quad c=x+y.$$

几何上, x,y,z 正是内切圆在三边上切点分出的切线长. 从顶点 A 出发的两段切线长相等, 记为 x; 从 B 出发记为 y; 从 C 出发记为 z. 于是

知乎@余命数

$$a=y+z,\quad b=z+x,\quad c=x+y,$$

且 $x,y,z>0$ 自动保证三角不等式成立. 反过来, 任意正实数 x,y,z 都对应一个三角形. 关于三边的不等式就转化为关于三个**自由正实数** x,y,z 的不等式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

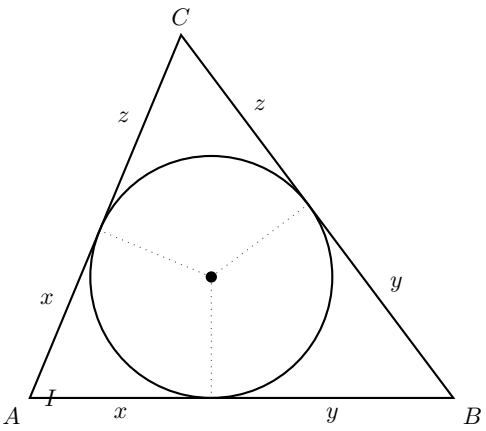


图 5.5 Ravi 代换的几何来源, 内切圆切点分边为 x, y, z

例题 5.50 设 a, b, c 为三角形的三边. 证明, 得

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$$

知乎@余命数

解 作 Ravi 代换 $a=y+z$、$b=z+x$、$c=x+y$ $(x, y, z>0)$.

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2 \\ &= 2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx) \\ ab+bc+ca &= (y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)+(x+y)(y+z) \\ &= x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx) \end{aligned}$$

待证 $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$ 化为

$$2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)<2(x^2+y^2+z^2)+6(xy+yz+zx),$$

即 $0<4(xy+yz+zx)$. 由 $x, y, z>0$, 右边严格为正, 结论成立.

等号仅在三角形退化时可能出现, 此时 x, y, z 中至少一个为 0, 已越出正实数范围, 故严格不等式成立.

注 5.23
Ravi 代换把三角形这个几何约束, 完全翻译成 $x, y, z>0$ 这个代数条件. 此后 AM-GM、柯西、Schur 等工具都可在无约束的正实数上自由施展.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.13.2 乘积代换

当约束为 $abc=1$ 时, 一个常用代换是

$$a=\frac{x}{y},\quad b=\frac{y}{z},\quad c=\frac{z}{x}\quad (x,y,z>0).$$

此时 $abc=1$ 自动成立, 许多分式表达式中的乘积因子会两两抵消. 即便不显式写出 x,y,z, 识别 $\frac{1}{a}=bc$ 这类关系, 就已经是在做乘积代换.

例题 5.51 设 a,b,c 为正实数, 且 $abc=1$. 证明:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

解 约束 $abc=1$ 的关键作用是把倒数与乘积等同. $\frac{1}{a}=bc$、$\frac{1}{b}=ca$、$\frac{1}{c}=ab$. 对左边应用柯西不等式的 Engel 形式.

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^3(b+c)}=\sum_{\text{cyc}}\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}\geq\frac{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2}{\sum a(b+c)}.$$

分母 $\sum a(b+c)=\sum(ab+ac)=2(ab+bc+ca)$. 分子中 $\sum\frac{1}{a}=\sum bc=ab+bc+ca$ (由 $\frac{1}{a}=bc$). 令 $p=ab+bc+ca$, 则

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^3(b+c)}\geq\frac{p^2}{2p}=\frac{p}{2}.$$

由 AM-GM, $p=ab+bc+ca\geq3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3(abc)^{2/3}=3$, 故 $\frac{p}{2}\geq\frac{3}{2}$. 结论成立.

等号成立当且仅当 $a=b=c$ (AM-GM 等号) 且 Engel 形式等号条件 $a(b+c)$ 成比例于 $\frac{1}{a}$ 同时满足, 即 $a=b=c=1$.

注 5.24
此证并未显式写出 $a=\frac{x}{y}$ 等形式, 但 $\frac{1}{a}=bc$ 的识别已经起到了乘积代换的作用. 若令 $a=\frac{x}{y}$、$b=\frac{y}{z}$、$c=\frac{z}{x}$, 则乘积约束自动消失, 分式中的 x,y,z 会大量抵消. 在更复杂的分式不等式中, 显式代换往往更省事.

例题 5.52 设 a,b,c 为正实数, 且 $abc=1$. 证明:

$$a^2+b^2+c^2+3\geq2(a+b+c)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 由 $abc=1$ 及 AM-GM, $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$. 待证等价于

$$a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3\geq 0,$$

即 $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$, 恒成立. 等号当且仅当 $a=b=c=1$.

我们利用 $abc=1$ 确认等号点 $a=b=c=1$ 可达. 约束 $abc=1$ 保证了等号的可达性.

5.13.3 三角代换

当变量满足 $x^2+y^2=1$ 时, 令 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$ $(\theta\in\mathbb{R})$, 约束自动满足, 且可调用三角恒等式. 更一般地, 若 $x,y,z>0$ 且 $xy+yz+zx=1$, 可令

$$x=\tan\frac{A}{2},\quad y=\tan\frac{B}{2},\quad z=\tan\frac{C}{2},$$

其中 A,B,C 为某三角形的内角. 半角正切公式保证 $xy+yz+zx=1$ 当 $A+B+C=\pi$(三角恒等式在 第二卷第 6 章中系统讲解).

例题 5.53 设 x,y 为实数, 且 $x^2+y^2=1$. 求 $x+2y$ 的最大值.

解 令 $x=\cos\theta, y=\sin\theta$. 则

$$x+2y=\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta\right)=\sqrt{5}\sin(\theta+\phi),$$

其中 $\cos\phi=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 最大值为 $\sqrt{5}$, 当 $\sin(\theta+\phi)=1$ 时取得.

也可用柯西不等式.$(x+2y)^2\leq(1^2+2^2)(x^2+y^2)=5$, 最大值 $\sqrt{5}$. 三角代换给出了等号点的参数表示.

例题 5.54 设 $x,y,z>0$, 且 $xy+yz+zx=1$. 证明:

$$x+y+z\geq\sqrt{3}$$

解 由 $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, 得

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\geq 3(xy+yz+zx)=3,$$

故 $x+y+z\geq\sqrt{3}$. 等号当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

用三角代换. 令 $x=\tan\frac{A}{2}$、$y=\tan\frac{B}{2}$、$z=\tan\frac{C}{2}$、$A+B+C=\pi$、$A,B,C>0$. 则 $xy+yz+zx=1$ 自动成立. 目标化为

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时, $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 三者和为 $\sqrt{3}$, 等号成立. 由 tan 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上下凸, 琴生不等式给出

$$\frac{1}{3}\sum\tan\frac{A}{2}\geq\tan\frac{A+B+C}{6}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

故 $\sum\tan\frac{A}{2}\geq\sqrt{3}$. 三角代换把代数约束 $xy+yz+zx=1$ 翻译为角度约束 $A+B+C=\pi$, 从而可调用三角函数的凸性.

> **注 5.25 (增量代换)**
> 对称二元问题中, 常令 $a=m+t, b=m-t(m=\frac{a+b}{2}$ 为平均值, $t=\frac{a-b}{2}$ 为偏差). 这把两个变量拆成平均水平与偏离程度, 便于分析对称函数对偏差的单调性, 见 第5.14节. 变量代换的更多技巧见 第5.4节.

代换法的共通线索是**识别约束的结构, 选择能自动满足该约束的参数化**. 三角形用切线长, 乘积用分式, 圆用三角函数.

5.14 排序与调整思想

我们面对对称不等式与轮换不等式时, 注意到变量位置可以互换而表达式值保持不变. 因此可以**假设变量已按大小排列**, 把无序的代数和变为有序. 排序不等式 (第5.6节) 是这一思想的起点; 本节把它推广到切比雪夫不等式, 并引入与之对偶的**调整法**.

5.14.1 不妨设序的合法性

动手之前, 我们先分清两种对称性.

- **完全对称**. 任意置换变量, 表达式不变. 例如 $a^3+b^3+c^3$ 与 $ab+bc+ca$. 此时可任意假设 $a\geq b\geq c$.
- **轮换对称**. 仅在循环置换 $(a,b,c)\mapsto(b,c,a)$ 下不变. 例如 $a^2b+b^2c+c^2a$. 此时随意假设 $a\geq b\geq c$ 会改变表达式的值, 轮换对称对反序排列一般给出不同结果. 第5.6节 的第一道例题正因如此才改用 AM-GM.

确认合法性之后, 设序才是合法的简化步骤.

5.14.2 切比雪夫不等式

排序不等式比较的是同序和与反序和, 切比雪夫不等式给出更精细的定量形式, 即两个同向单调序列的平均乘积不小于各自平均的乘积.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.17 (切比雪夫不等式) 设 $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ 与 $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ 为两组同序实数. 则

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \ge \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n}\right)$$

即 $\sum a_ib_i \ge \frac{1}{n}(\sum a_i)(\sum b_i)$. 若两组反序 $(a_1 \le \ldots \le a_n, b_1 \ge \ldots \ge b_n)$, 则不等号反向. 等号成立当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$.

知乎@余命数

证明 对任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, 由两组同序, $(a_i - a_j)$ 与 $(b_i - b_j)$ 同号, 或至少一个为零, 故

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0.$$

知乎@余命数

展开得 $a_ib_i + a_jb_j \ge a_ib_j + a_jb_i$. 对所有 i, j 求和.

知乎@余命数

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_i + a_jb_j) \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j + a_jb_i).$$

左边, 对 j 求和时每个 a_ib_i 出现 n 次, 对 i 求和时每个 a_jb_j 出现 n 次, 故左边 $= 2n\sum a_ib_i$. 右边, $\sum_i\sum_j a_ib_j = (\sum a_i)(\sum b_j)$, 同理 $\sum_i\sum_j a_jb_i = (\sum a_j)(\sum b_i)$, 故右边 $= 2(\sum a_i)(\sum b_i)$. 因此

$$2n\sum a_ib_i \ge 2(\sum a_i)(\sum b_i),$$

知乎@余命数

即 $\sum a_ib_i \ge \frac{1}{n}(\sum a_i)(\sum b_i)$. 等号成立当且仅当对所有 i, j 都有 $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$, 即所有 a_i 相等或所有 b_i 相等. □

注 5.26
切比雪夫不等式对排序不等式作定量加强, 给出同序和与平均乘积之间的差距; 排序不等式只说同序和最大. 二者共享同一个代数内核, 即 $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0$.

例题 5.55 设 $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ 为实数, f 为递增函数. 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_if(a_i) \ge \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\right)$$

解 由 f 递增, 序列 $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ 与 $(a_1, \ldots, a_n)$ 同序. 由切比雪夫不等式即得. 这是切比雪夫最典型的应用模式, 递增序列与它在递增函数下的像, 乘积平均不小于各自平均的乘积.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 5.56　设 a,b,c 为正实数. 证明, 得

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

解　不等式完全对称, 不妨设 $a \geq b \geq c > 0$. 则 $a^2 \geq b^2 \geq c^2$, 序列 (a,b,c) 与 (a^2,b^2,c^2) 同序. 由切比雪夫,

$$\frac{a\cdot a^2+b\cdot b^2+c\cdot c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right),$$

即 $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{9}$, 两边同乘 3 即得

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

等号当且仅当 $a=b=c$.

例题 5.57　设 a,b,c 为正实数. 证明, 得

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

解　由 AM-GM 局部配对.

$$\frac{a^2}{b}+b \geq 2a, \quad \frac{b^2}{c}+c \geq 2b, \quad \frac{c^2}{a}+a \geq 2c.$$

三式相加.$\sum \frac{a^2}{b}+(a+b+c) \geq 2(a+b+c)$, 即 $\sum \frac{a^2}{b} \geq a+b+c$. 等号当且仅当 $a=b=c$.

此证用局部 AM-GM. 工具的选择应服务于结构, 切比雪夫适合两组同序序列的乘积和; 当结构是平方比线性时, 局部 AM-GM 往往更直接.

5.14.3 调整法

调整法的思想与排序对偶, 排序把变量按大小排好, 调整法主动**改变**变量的值, 使它们趋于相等, 并证明每一步调整都使目标函数朝我们希望的方向变化.

定理 5.18 (调整法的基本框架) 设 $f(x_1,\dots,x_n)$ 为对称函数, 在紧集 $\{x_i \geq 0,\ \sum x_i = S\}$ 上连续. 若对任意 $x_i \neq x_j$, 把它们替换为 $\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{x_i+x_j}{2}$ (或更一般的磨平变换) 后 f 的值不减, 则 f 在 $x_1=\cdots=x_n=\frac{S}{n}$ 处取得最大值; 若替换后 f 的值不增, 则在该点取得最小值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 在紧集 $\{(x_1,\dots,x_n): x_i\ge 0, \sum x_i = S\}$ 上, 连续函数 f 取到极值. 设极值点为 $(x_1^*,\dots,x_n^*)$. 若某两个分量 $x_i^* \ne x_j^*$, 则磨平变换使 f 严格变化, 与极值性矛盾. 故极值点处所有分量相等. □

例题 5.58 (AM-GM 的调整法证明) 证明: 对正实数 $a_1,\dots,a_n$, 有 $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\dots a_n}$, 等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$.

解 和 $S=a_1+\cdots+a_n$ 固定时, 只需证积 $P=a_1\dots a_n$ 在 $a_1=\cdots=a_n=\frac{S}{n}$ 时最大.

设某两个变量 $a_i\ne a_j$, 不妨 $a_i<a_j$. 令 $a_i'=a_j'=\frac{a_i+a_j}{2}$. 则 $a_i'+a_j'=a_i+a_j$, 和保持不变, 而

$$a_i'a_j'=\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)^2 \ge a_ia_j$$

(由 $(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j})^2\ge 0$). 等号当且仅当 $a_i=a_j$. 故积严格增大.

反复将不相等的变量对磨平, 积单调递增. 在紧集 $\{a_i\ge 0: \sum a_i=S\}$ 上, 连续函数 P 取到最大值; 若最大值点有某两个变量不等, 则可磨平使积严格增大, 矛盾. 故最大值点必使所有变量相等, 此时 $P=(\frac{S}{n})^n$. 故对任意正实数, $P\le(\frac{S}{n})^n$, 即 AM-GM 成立.

例题 5.59 设 a,b,c 为正实数, 且 $a+b+c=3$. 证明:

$$ab+bc+ca\le 3$$

解 由 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=9$, 有 $ab+bc+ca=\frac{9-(a^2+b^2+c^2)}{2}$. 由 $a^2+b^2+c^2\ge\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$(QM-AM 或柯西), 故 $ab+bc+ca\le\frac{9-3}{2}=3$. 等号当且仅当 $a=b=c=1$.

用调整法. 设 $a\ne b$, 令 $a'=b'=\frac{a+b}{2}$, $c'=c$. 则 $a'+b'+c'=3$ 不变, 而

$$\begin{aligned} a'b'+b'c'+c'a'-(ab+bc+ca) &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2+c(a+b)-ab-c(a+b)\\ &= \frac{(a+b)^2}{4}-ab=\frac{(a-b)^2}{4}\ge 0. \end{aligned}$$

故磨平后 $ab+bc+ca$ 不减. 反复磨平至 $a=b=c=1$, 得 $ab+bc+ca\le 3$.

注 5.27 (调整法的严密性)
有限步调整在变量取有理数时可以精确到达相等点; 对一般实数, 需在紧集, 如 $a_i\ge 0$, $\sum a_i=S$ 上利用连续函数取到最值, 再证明最值点必使所有变量相等(否则可继续调整使目标更优, 矛盾). 这一步依赖极值的存在性, 其严格基础见分析初步. 第5.12节 的 Muirhead 定理中, 磨平作用于指数; 调整法作用于变量本身.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

排序在假设中设序, 调整在过程中磨平, 两者都让对称性直接进入证明.

知乎@余命数

5.15 凸性思想

知乎@余命数

注 5.28
本节凸性思想中的二阶导数判定、Jensen 应用与 Young 不等式, 依赖 第3章 的凹凸定义与 第四卷第 16 章. 琴生直觉与均值特例是入口;其余性质在此基础上展开.

我们前面各节的工具, 放缩、构造、代换、排序, 大多在代数层面运作. 凸性思想换一个视角, 从函数图象的**弯曲方向**看待不等式. 若一个函数下凸, 如 $y=x^2$ 或 $y=e^x$, 连接图象上任意两点的弦必位于曲线的上方. 把这一几何事实翻译成代数语言, 就是琴生不等式.

知乎@余命数

第3.6节 已经介绍过琴生不等式的完整陈述与证明. 本节把它放在不等式思想的脉络中, 展示它如何作为均值不等式等经典结果的**母体**, 如何与切线法 (第5.10节) 互为表里, 以及它的边界在哪里.

知乎@余命数

凸性、琴生与切线对照

5.15.1 琴生不等式

定理 5.19 (琴生不等式, 回顾) 设 f 为区间 I 上的下凸函数. 则对任意 $x_1,\dots,x_n\in I$ 与非负权重 λ_i ($\sum\lambda_i=1$),

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

若 f 上凸, 不等号反向. 对严格凹凸函数, 等号成立当且仅当所有正权重对应的 x_i 相等.

证明 证明见 定理 3.10. □

取等权重 $\lambda_i=\frac{1}{n}$, 得算术平均形式.

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n},$$

知乎@余命数

即平均的函数值不超过函数值的平均(下凸情形).

例题 5.60 (由琴生导出 AM-GM) 对正数 $x_1,\dots,x_n$, 证明 $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 取 $f(x)=\ln x$, 定义域 $(0,+\infty)$.$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, f 严格上凸. 由上凸的琴生不等式,

$$\frac{\ln x_1+\cdots+\ln x_n}{n}\le \ln\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right).$$

左边 $=\ln\sqrt[n]{x_1\dots x_n}$. 由 ln 严格递增, 得 $\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

例题 5.61 (幂平均不等式的雏形) 设 $a_1,\dots,a_n>0, p>1$. 证明:

$$\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{1/p}\ge\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

解 取 $f(x)=x^p$ $(x>0)$.$p>1$、$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$、f 下凸. 由琴生,

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^p\le\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}.$$

知乎@余命数

两边开 p 次方(正数, 方向不变)即得. 等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$.

这是幂平均不等式 $M_p\ge M_1$ $(p>1)$ 的特例. 更一般地, 对 $p>q$, 有 $M_p\ge M_q$, 证明可通过对 $t\mapsto t^{p/q}$ 的凸性与琴生完成.

例题 5.62 (Young 不等式) 设 $a,b>0, p,q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明:

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

解 取 $f(x)=e^x$, 下凸. 令 $x_1=\ln(a^p), x_2=\ln(b^q)$, 权重 $\lambda_1=\frac{1}{p},\lambda_2=\frac{1}{q}$. 由琴生,

$$\exp\left(\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)\right)\le\frac{1}{p}e^{\ln(a^p)}+\frac{1}{q}e^{\ln(b^q)}.$$

左边 $=\exp(\ln a+\ln b)=ab$, 右边 $=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. 等号当且仅当 $a^p=b^q$.

5.15.2 权重选择的艺术

琴生不等式的权重 λ_i 可按问题需要自由选取, 恰当选择权重可把约束条件直接编码进不等式.

知乎@余命数

例题 5.63 设 $a,b,c>0$, 且 $a+b+c=1$. 证明:

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge-\ln 3$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

解 取 $f(x)=x\ln x\ (x>0)$.$f''(x)=\frac{1}{x}>0$, f 下凸. 由琴生(等权重),

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}.$$

即 $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{3}\le\frac{1}{3}(a\ln a+b\ln b+c\ln c)$, 故 $a\ln a+b\ln b+c\ln c\ge\ln\frac{1}{3}=-\ln 3$. 等号当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$.

这是信息论中熵的上界 $\sum a_i\ln a_i\ge-\ln n$(在 $\sum a_i=1$ 时)的三元特例.

5.15.3 与切线法的对照

切线法 (第5.10节) 与琴生不等式联系紧密, 对下凸函数曲线恒在切线上方, 即

$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

这正是切线法的局部不等式. 对 n 个点求和并利用 $\sum x_i=nx_0$, 得 $\sum f(x_i)\ge nf(x_0)$, 这与琴生在等权重、等号点为平均值时的结论一致.

知乎@余命数

二者的分工如下.

- **琴生**. 需函数在整个区间上凹凸性一致, 一次给出全局结论; 权重灵活, 适合平均值约束.
- **切线法**. 只需在取值范围内作差定号; 适合凹凸性改变但仍有支撑线的情形(第5.10节 末例).

知乎@余命数

例题 5.64 (同一问题的两种视角) 设 $a,b,c>0$, 且 $a+b+c=3$. 证明:

$$a^2+b^2+c^2\ge 3$$

解 从琴生视角看, 取 $f(x)=x^2$, 下凸 ($f''=2>0$), 由琴生不等式得

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\le\frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

即 $1\le\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, 故 $a^2+b^2+c^2\ge 3$.

从切线法视角看, 等号点 $x_0=1$、$f(1)=1$、$f'(x)=2x$、$f'(1)=2$, 切线 $\ell(x)=1+2(x-1)=2x-1$. 作差得 $x^2-(2x-1)=(x-1)^2\ge 0$, 求和即得 $\sum a^2\ge\sum(2a-1)=2\cdot 3-3=3$.

琴生一步到位; 切线法展示了局部线性估计加求和消元的机制.

知乎@余命数

5.15.4 凹凸性改变时

若函数在区间内改变凹凸性(出现拐点), 琴生不等式要求整个区间上凹凸一致, 此处前提不足. 此时切线法、分段讨论或调整法往往更有效.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

例题 5.65 设 $a,b,c\in(0,1)$, 且 $a+b+c=1$. 证明:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\le\frac{27}{10}$$

解 此题已在 第5.10节 中用切线法证明. 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的二阶导数 $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ 在 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 处变号. 在 $(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 上上凸, 在 $(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$ 上下凸. 取值范围 $(0,1)$ 跨越拐点, 琴生要求整个区间上凹凸一致, 此处前提不足. 切线法在 $x_0=\frac{1}{3}$ 处作支撑线, 作差后分子分解出 $(3x-1)^2(4-3x)$, 在 $(0,1)$ 上定号, 顺利完成证明.

支撑线的存在只要求作差在取值范围内定号.

注 5.29 (七种思想的对应关系)

- **放缩** (第5.9节). 构造中间量, 保持方向, 把握精度;
- **局部化** (第5.10节). 化整体为局部, 切线法是最彻底的形式;
- **构造** (第5.11节). 引入新对象, 让代数关系显现;
- **齐次化与规范化** (第5.12节). 次数分析, Schur 与 Muirhead;
- **代数代换** (第5.13节). 化约束为自由, Ravi、乘积、三角;
- **排序与调整** (第5.14节). 设序与磨平, 切比雪夫与调整法;
- **凸性**(本节). 从弯曲方向看不等式, 琴生为母体, 与切线法互为表里.

知乎@余命数

5.16 进阶不等式

第5.5节 给出了柯西不等式与闵可夫斯基不等式 $p=2$ 的情形. 本节把它们推广到一般的 p 次幂, 并引入幂平均不等式与嵌入不等式.

知乎@余命数

5.16.1 赫尔德不等式

知乎@余命数

定理 5.20 (赫尔德不等式) 设 $x_i>0, y_i>0 (i=1,2,\dots,n), p>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\le\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\tag{5-1}$$

等号当且仅当 x_i^p 与 y_i^q 成比例时成立. 当 $0<p<1$ 时不等式反向.

证明 先证 Young 不等式: 对 $a,b>0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 有

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\tag{5-2}$$

知乎@余命数

这由 $f(t)=\frac{t^p}{p}+\frac{1}{q}-t^{1/p}$ 在 $t>0$ 上的最小值给出, 或由凸函数 e^x 的切线不等式给出.

设 $A=(\sum x_i^p)^{1/p}$, $B=(\sum y_i^q)^{1/q}$. 若 $A=0$ 或 $B=0$ 则结论平凡. 否则令 $a_i=\frac{x_i}{A}, b_i=\frac{y_i}{B}$, 则 $\sum a_i^p=\sum b_i^q=1$. 对每个 i 应用 Young 不等式:

$$a_ib_i\le\frac{a_i^p}{p}+\frac{b_i^q}{q}$$

对 i 求和: $\sum a_ib_i\le\frac{1}{p}\sum a_i^p+\frac{1}{q}\sum b_i^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 还原即得 (5-1). □

取 $p=q=2$, 赫尔德不等式退化为柯西不等式. 赫尔德不等式是柯西不等式在一般 L^p 空间中的推广.

5.16.2 闵可夫斯基不等式

定理 5.21 (闵可夫斯基不等式) 设 $x_i>0, y_i>0 (i=1,2,\dots,n), p>1$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^n(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5-3}$$

等号当且仅当 x_i 与 y_i 成比例时成立. 当 $0<p<1$ 时不等式反向.

证明 展开 $(x_i+y_i)^p=(x_i+y_i)^{p-1}\cdot(x_i+y_i)$, 求和:

$$\sum(x_i+y_i)^p=\sum x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum y_i(x_i+y_i)^{p-1}$$

对右端两项分别应用赫尔德不等式(取 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, q=\frac{p}{p-1}$):

$$\sum x_i(x_i+y_i)^{p-1}\le\left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

同理处理第二项. 两式相加后两边除以 $(\sum(x_i+y_i)^p)^{1/q}$, 利用 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ 即得 (5-3). □

取 $p=2$, 闵可夫斯基不等式给出 $\sqrt{\sum(x_i+y_i)^2}\le\sqrt{\sum x_i^2}+\sqrt{\sum y_i^2}$, 即 L^2 三角不等式. 几何上, $n=2$ 情形正是三角形两边之和大于第三边的坐标表达.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

5.16.3 幂平均值不等式

定理 5.22 (幂平均值不等式) 对 n 个正实数 $x_1,\dots,x_n$ 和权值 $\alpha_i\ge 0(\sum\alpha_i=1)$, 定义 p 次幂平均

$$M_p=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

若 $0<p<q$, 则 $M_p\le M_q$, 等号当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时成立.

证明 设 $r=\frac{q}{p}>1$. 对 $\sum\alpha_i x_i^p$ 应用 Jensen 不等式($t\mapsto t^r$ 在 $t>0$ 上为下凸函数):

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^p\right)^r\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i^p)^r=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^q$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

两边取 $\frac{1}{q}$ 次幂即得 $M_p\le M_q$. □

取 $p=1$, $q=2$ 得算术平均不超过平方平均. 取 $p\to 0$ 的极限得几何平均 $M_0=\prod x_i^{\alpha_i}$, 于是 $M_0\le M_p$ 对一切 $p>0$ 成立, 这正是加权均值不等式.

知乎@余命数

5.16.4 嵌入不等式

定理 5.23 (嵌入不等式) 在 $\triangle ABC$ 中, 对任意实数 x、y、z, 有

$$x^2+y^2+z^2\ge 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C \tag{5-4}$$

等号当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时成立.

证明 构造向量 $\vec{u}=(x,y,z)$, 并利用二次型非负性. 将 (5-4) 的右端移到左端:

$$x^2+y^2+z^2-2yz\cos A-2zx\cos B-2xy\cos C\ge 0$$

知乎@余命数

这是关于 x、y、z 的二次型. 由 $A+B+C=\pi$, 该二次型的系数矩阵的行列式为零(因为 $(\sin A,\sin B,\sin C)$ 是核中的向量), 且其主子式非负, 故半正定, 不等式成立.

等号条件: 二次型的核由 $\sin A:\sin B:\sin C$ 给出, 这正是取等条件. □

知乎@余命数

例题 5.66 (嵌入不等式与柯西不等式的联系) 在 (5-4) 中取 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ (正三角形), 得

$$x^2+y^2+z^2\ge yz+zx+xy$$

这等价于 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$,是恒等式 $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ 的等价形式.

例题 5.67 (用嵌入不等式证明三角形不等式) 在 $\triangle ABC$ 中证明 $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\,S$(Weitzenböck 不等式).

解 在嵌入不等式 (5-4) 中取 $x=a, y=b, z=c$:

$$a^2+b^2+c^2\geq 2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C$$

知乎@余命数

由余弦定理 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$ 等,代入后右边 $=a^2+b^2+c^2-(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2$,这给出恒等式. 改取 $x=y=z=1$:

$$3\geq 2(\cos A+\cos B+\cos C)$$

即 $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$. 再结合 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 与正弦定理,可推出 Weitzenböck 不等式 $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\,S$.

5.17 切比雪夫与 Schur 不等式

第5.14节 给出了切比雪夫不等式的单侧形式并用配对求和证明, 第5.12节 引入了 Schur 不等式 $r\geq 0$ 的形式. 本节给出切比雪夫不等式的双侧完整形式, 它直接从排序不等式 (第5.6节) 推出; 再把 Schur 不等式写成一般参数 $t>0$ 的形式, 建立 $t=1$ 时与三角形不等式的联系.

5.17.1 切比雪夫不等式的双侧形式

定理 5.24 (切比雪夫不等式) 设 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$ 与 $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$ 为两组同序实数, 则

$$n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geq n\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}\tag{5-5}$$

等号成立当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 或 $b_1=\cdots=b_n$.

第5.14节 证明了右半不等式 $\sum a_ib_i\geq\frac{1}{n}(\sum a_i)(\sum b_i)$. 这里用排序不等式给出双侧的统一证明.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 考虑 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 的 n 个循环移位. 对 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 记

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i+k},$$

其中下标 $i+k$ 模 n 取值, 即 $b_{n+j} = b_j$.$S_0 = \sum a_i b_i$ 是同序和, $S_1, \dots, S_{n-1}$ 是乱序和. 由排序不等式, $S_k \le S_0$ 对一切 k 成立. 将这 n 个不等式相加:

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k \le n\, S_0 = n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

知乎@余命数

左端对每个固定的 i, b_{i+k} $(k = 0, \dots, n-1)$ 取遍 $b_1, \dots, b_n$ 各一次, 故

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n-1} b_{i+k} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

知乎@余命数 知乎@余命数

右半不等式得证.

左半不等式: 将序列 $(b_1, \dots, b_n)$ 替换为 $(-b_n, -b_{n-1}, \dots, -b_1)$, 它与 $(a_1, \dots, a_n)$ 同序. 对这两组数应用刚证的右半不等式:

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i(-b_{n+1-i}) \ge \left(\sum a_i\right)\left(\sum(-b_{n+1-i})\right) = -\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right),$$

即 $-n\sum a_i b_{n+1-i} \ge -(\sum a_i)(\sum b_i)$, 两边乘 -1 得左半不等式.

知乎@余命数

等号条件: 右半等号要求所有 $S_k = S_0$, 即每个循环移位都达到同序和. 由排序不等式的等号条件, 这要求 $a_1 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = \cdots = b_n$. □

知乎@

注 5.30 (Abel 求和证法)
切比雪夫不等式也可用 Abel 分部求和证明. 记 $\bar a = \frac{1}{n}\sum a_i, \bar b = \frac{1}{n}\sum b_i$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - n\bar a\bar b = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \bar a)(b_i - \bar b).$$

令 $\alpha_i = a_i - \bar a, \beta_i = b_i - \bar b$, 则 $\sum \alpha_i = 0$. 记 $A_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$. 由 a_i 递减, 前 k 个最大元素之和不小于 $k\bar a$, 故 $A_k \ge 0 (k < n)$.Abel 分部求和给出

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(\beta_k - \beta_{k+1}).$$

由 b_i 递减有 $\beta_k - \beta_{k+1} = b_k - b_{k+1} \ge 0$, 右端每项非负, 故 $\sum a_i b_i \ge n\bar a\bar b = \frac{1}{n}(\sum a_i)(\sum b_i)$. 这与 第5.14节 的配对求和共享同一个恒等式

$$n\sum a_i b_i - \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right) = \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)(b_i - b_j),$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

只是分组方式不同.

5.17.2 Schur 不等式的一般参数形式

定理 5.25 (Schur 不等式) 设 $x,y,z\geq 0,t>0$, 则

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-z)(y-x)+z^t(z-x)(z-y)\geq 0 \tag{5-6}$$

等号成立当且仅当 $x=y=z$, 或两数相等而第三者为 0.

第5.12节 用参数 $r\geq 0$ 陈述了同一不等式并给出了证明. 这里取 $t>0$, 证明思路一致, 记录如下以备引用.

知乎@余命数

证明 由对称性, 不妨设 $x\geq y\geq z\geq 0$. 将左端按 x,y 配合再分离 z 项:

知乎@余命数

$$\text{左端}=(x-y)\left[x^t(x-z)-y^t(y-z)\right]+z^t(x-z)(y-z).$$

其中 $(z-x)(z-y)=(x-z)(y-z)$(两个负因子之积). 逐项判断符号. 由 $x\geq y$ 有 $x-y\geq 0$;$t>0$ 时 $x^t\geq y^t$, 且 $x-z\geq y-z\geq 0$, 故 $x^t(x-z)\geq y^t(y-z)$, 第一项非负. 第二项中 $z^t\geq 0,x-z\geq 0,y-z\geq 0$, 亦非负. 两项之和 ≥ 0.

等号条件:两项同时为零. 第一项为零要求 $x=y$ 或 $x^t(x-z)=y^t(y-z)$;$t>0$ 且 $x>y$ 时 $x^t>y^t$ 且 $x-z>y-z\geq 0$, 乘积严格更大, 故必 $x=y$. 第二项为零要求 $z=0$($t>0$ 时 $z^t=0$)或 $x=z$ 或 $y=z$. 结合得 $x=y=z$, 或 $x=y>z=0$ 及其置换. □

知乎@余命数

5.17.3 $t=1$ 与三角形不等式

取 $t=1$, Schur 不等式展开为

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x). \tag{5-7}$$

用对称多项式 $s_1=x+y+z,s_2=xy+yz+zx,s_3=xyz$ 表示, 这就是 第5.12节 中的 $s_1^3+9s_3\geq 4s_1s_2$.

知乎@余命数

这个代数不等式与几何中的三角形不等式有直接联系. 设 a,b,c 为三角形三边, 由 Ravi 代换 $a=y+z,b=z+x,c=x+y(x,y,z>0)$, 三角形不等式 $a+b>c$ 等价于 $x,y,z>0$. 把 a,b,c 代入 (5-7) 的左端:

$$\sum a^3+3abc=\sum(y+z)^3+3(y+z)(z+x)(x+y).$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

展开化简得 $2(x+y+z)^3-6xyz$. 由均值不等式 $(x+y+z)^3\geq 27xyz$, 该式非负, 于是

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

对一切三角形三边成立.

反过来, 许多关于三角形三边的对称不等式经 Ravi 代换后化为关于正实数 x,y,z 的 Schur 型不等式, Schur 不等式提供了代数保证.

例题 5.68 (Schur 与三角形不等式) 设 a,b,c 为三角形三边. 证明

$$abc\geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

解 记 $s_1=a+b+c$, $s_2=ab+bc+ca$, $s_3=abc$. 展开右端:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=(s_1-2a)(s_1-2b)(s_1-2c).$$

乘开得 $s_1^3-2s_1^2(a+b+c)+4s_1(ab+bc+ca)-8abc=-s_1^3+4s_1s_2-8s_3$. 于是

$$abc-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=s_3-(-s_1^3+4s_1s_2-8s_3)=s_1^3-4s_1s_2+9s_3.$$

由 Schur 不等式 $t=1$, $s_1^3+9s_3\geq 4s_1s_2$, 右端 ≥ 0. 等号当且仅当 $a=b=c$(正三角形).

另一条路线: Ravi 代换 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ $(x,y,z>0)$, 则 $b+c-a=2x, c+a-b=2y, a+b-c=2z$, 不等式化为 $(y+z)(z+x)(x+y)\geq 8xyz$. 由 AM-GM, $y+z\geq 2\sqrt{yz}$, $z+x\geq 2\sqrt{zx}$, $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, 三式相乘即得. 等号当且仅当 $x=y=z$, 即 $a=b=c$.

5.17.4 应用例题

例题 5.69 (切比雪夫双侧: 反序乘积和的上界) 设 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n>0$ 且 $\sum_{i=1}^n a_i=1$. 证明

$$\sum_{i=1}^n a_ia_{n+1-i}\leq\frac{1}{n}.$$

解 在切比雪夫双侧不等式 (5-5) 中取 $b_i=a_i$. 左半给出

$$\Big(\sum a_i\Big)^2\geq n\sum a_ia_{n+1-i},$$

即 $1\geq n\sum a_ia_{n+1-i}$, 故 $\sum a_ia_{n+1-i}\leq\frac{1}{n}$. 等号当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

右半给出 $\sum a_i^2 \geq \frac{1}{n}$，即 QM-AM. 双侧合在一起夹住反序乘积和与同序乘积和.

例题 5.70 (Schur $t=2$) 设 $x,y,z\geq 0$. 证明

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\geq x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y).$$

解 在 Schur 不等式 (5-6) 中取 $t=2$:

$$x^2(x-y)(x-z)+y^2(y-z)(y-x)+z^2(z-x)(z-y)\geq 0.$$

展开第一项 $x^2(x-y)(x-z)=x^4-x^3(y+z)+x^2yz$, 三项求和得

$$\sum x^4-\sum x^3(y+z)+xyz\sum x\geq 0,$$

知乎@余命数

移项即得目标不等式. 等号当且仅当 $x=y=z$, 或两数相等而第三者为 0.

习题

5.1. (放缩)证明: 对任意正整数 $n\geq 2$,

知乎@余命数

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1-\frac{1}{n}$$

提示: 我们把每一项放缩为 $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, 再裂项求和.

5.2. (放缩)证明: 对任意 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,

$$\frac{2x}{\pi}<\sin x<x$$

提示: 我们研究函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的单调性, 也可比较单位圆中的面积.

5.3. (局部化 / 切线法)设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=3$. 证明:

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{3}{2}$$

提示: 我们对 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $x_0=1$ 处作切线.

5.4. (局部化)设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=1$. 证明:

知乎@余命数

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\geq\frac{1}{4}$$

提示: 我们对 $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ 在 $x_0=\frac{1}{3}$ 处作切线.

5.5. (构造)求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+4x+8}$ 的最小值. 提示: 我们把每个根式解释为平面上动点到定点的距离.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.6. (构造)证明:对任意实数 a,b,

$$(a^2+1)(b^2+1)\geq(ab+1)^2$$

提示:我们构造一个二次函数,或者展开后作差;也可把它看作柯西不等式的特例.

5.7. (齐次化)设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=1$. 证明:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$$

提示:我们用 AM-HM,或先齐次化再用 AM-GM.

5.8. (Schur) 设 $a,b,c\geq 0$. 证明,得

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

提示:我们把它写成 $r=1$ 的 Schur 不等式.

5.9. (Muirhead) 设 $a,b,c>0$. 证明,得

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

提示:我们比较对称和 $[4,0,0]$ 与 $[2,1,1]$,验证优超关系.

5.10. (Ravi 代换)设 a,b,c 为三角形的三边. 证明,得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

提示:我们作 Ravi 代换 $a=y+z$ 等,把问题化到正实数上.

5.11. (乘积代换)设 $a,b,c>0$ 且 $abc=1$. 证明:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

提示:我们把它看成内斯比特不等式;可用 $abc=1$ 简化,或直接用 Engel 形式.

5.12. (三角代换)设 x,y 为实数且 $x^2+y^2=1$. 求 $3x+4y$ 的最大值与最小值. 提示:我们令 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$,或用柯西不等式.

5.13. (切比雪夫)设 $a\geq b\geq c>0$. 证明,得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

提示:我们注意到 (a,b,c) 与 $(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b})$ 同序,用切比雪夫;也可直接用内斯比特.

5.14. (调整法)设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=3$. 用调整法证明:

$$a^2+b^2+c^2\geq 3$$

提示:我们将不相等的两变量磨平为平均值,证明平方和严格减小,直至变量相等.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.15. (凸性 / 琴生)设 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=\pi$. 证明:

$$\sin a+\sin b+\sin c\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

提示:我们用 $\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上的上凸性与琴生不等式.

知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

习题解答

第 1 章预备知识

1.1. 解

(a) $P(x,y)=x^2+xy+y^2$: 交换 x,y 不变, 为对称式; 在两元轮换下不变, 为轮换式; 各项为二次, 为齐次式.

(b) $P(a,b,c)=a^2b+b^2c+c^2a$: 在 $a\to b\to c\to a$ 轮换下不变, 为轮换式; 交换 a,b 时变式, 非对称式; 各项为三次, 为齐次式.

(c) $P(x,y,z)=x^3+y^3+z^2$: 交换 x,z (或作轮换) 时式子改变, 非对称、非轮换; 各项次数不全相等, 非齐次式.

(d) $P(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)$: 在轮换 $a\to b\to c\to a$ 下因子重排而积不变, 为轮换式; 交换 a,b 后整体变号, 非对称式; 展开后各项为三次, 为齐次式.

1.2. 解 在轮换 $a\to b\to c\to a$ 下, 因式 $(a-b)$ 依次对应 $(b-c)$ 与 $(c-a)$. 由 P 的轮换性, 这两个因式亦为 P 的因式.

1.3. 解 记原式为 $P(x,y,z)$. 各项为三次项, P 为三次齐次式; 在轮换 $x\to y\to z\to x$ 下不变, 为轮换式.

令 $x=y$, 得

$$P(y,y,z)=y(y^2-z^2)+y(z^2-y^2)+0=0,$$

故 $(x-y)$ 为因式. 由轮换性, $(y-z)$ 与 $(z-x)$ 亦为因式. 于是存在常数 k 使

$$P(x,y,z)=k(x-y)(y-z)(z-x).$$

取 $(x,y,z)=(1,0,-1)$, 有

$$P(1,0,-1)=1(0-1)+0(1-1)+(-1)(1-0)=-2,$$

而

$$(1-0)(0-(-1))(-1-1)=-2,$$

从而 $k=1$. 因而

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)=(x-y)(y-z)(z-x).$$

1.4. 解 以 $y\neq 0$ 为例. 由齐次性, 有

$$F(x,y)=F(ty,y)=y^dF(t,1),$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是 $F(x,y)=0$ 与 $F(t,1)=0$ 等价 $(y\neq 0)$. 原方程的非零解对应于一元方程 $F(t,1)=0$ 的根 $t=\dfrac{x}{y}$, 再由 $x:y=t:1$ 还原.

1.5. **解**

$$(x+2y)^2-(x-y)^2=[(x+2y)-(x-y)][(x+2y)+(x-y)]=3y(2x+y).$$

1.6. **解**

$$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2).$$

1.7. **解**

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=16,$$

故 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=14$. 再用

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=64-12=52.$$

1.8. **解**

$$x^4-16=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4),$$

$$x^4+4x^2+16=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4).$$

1.9. **解**

$$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3),$$

$$6x^2+5xy-6y^2=(3x-2y)(2x+3y).$$

1.10. **解** 对 $P(x)=2x^3-x^2-8x+4$, 有 $a_3=2, a_0=4$. 根据有理根定理, 可能的有理根为

$$\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{2}.$$

代入 $x=1$ 得 $P(1)=2-1-8+4=-3\neq 0$, 再代入 $x=2$, 得

$$P(2)=16-4-16+4=0,$$

故 $(x-2)$ 为因式. 综合除法(系数 $2,-1,-8,4$ 与根 2)得商

$$2x^2+3x-2.$$

继续分解

$$2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2),$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是

$$P(x)=(x-2)(2x-1)(x+2).$$

1.11. **解** 先提取二次项系数 2.

$$y=2(x^2-4x)+5$$

再对括号内的部分配方. 一次项系数 -4 的一半是 -2, 其平方为 4.

$$\begin{aligned}y&=2(x^2-4x+4-4)+5\\&=2[(x-2)^2-4]+5\\&=2(x-2)^2-8+5\\&=2(x-2)^2-3\end{aligned}$$

因为 $(x-2)^2\geq 0$, 所以 $y\geq -3$. 当 $x=2$ 时, 函数取得最小值 -3.

1.12. **解** 原方程可变形为 $(2^x)^2-3\cdot 2^x+2=0$. 令 $t=2^x$. 因为指数函数 $y=2^x$ 的值域为 $(0,+\infty)$, 所以新变量 t 必须满足 $t>0$. 原方程化为关于 t 的一元二次方程 $t^2-3t+2=0$. 解得 $(t-1)(t-2)=0$, 即 $t=1$ 或 $t=2$. 这两个 t 值均满足 $t>0$ 的范围限制. 当 $t=1$ 时, $2^x=1\implies x=0$. 当 $t=2$ 时, $2^x=2\implies x=1$. 所以原方程的解为 $x=0$ 或 $x=1$.

1.13. **解** 利用裂项公式 $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, 原式化为

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

1.14. **解** 分子次数为 2, 分母次数为 1, 先做多项式除法.

$$x^2+3x+5=(x+1)(x+2)+3$$

故

$$\frac{x^2+3x+5}{x+1}=x+2+\frac{3}{x+1}$$

1.15. **解** 直接求 a,b 再平方求和较繁琐. 注意到

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times 2=5$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

PROJECT AKARI

AKARI

内容简介

《中学数学之旅》把初等数学当作一个完整的体系，从初中运算的起点一路讲到大学数学的门口. 全书五卷按数学自身的生长顺序编排，从代数语言与函数出发，经周期、离散与随机，走过几何主干，拧成极限、导数与积分的分析主干，最后扩到复数、空间与线性结构. 每条结论尽量给出推导；高考与竞赛的主干题材全部覆盖，取舍只看一条，它在数学结构里是否承重.

无论你是准备升学的学生、带学生的老师，还是想把数学重新学一遍的人，这本书都用得上.

本系列分卷

第 1 卷：预备知识、集合与映射、函数、函数方程、不等式
第 2 卷：三角函数、数列、统计、计数原理、概率
第 3 卷：平面向量、解三角形、解析几何、极坐标与参数方程、射影几何
第 4 卷：极限与导数、简单的积分、微分方程初步、数学思想浅谈
第 5 卷：复数、立体几何、矩阵与行列式、连分数、常数 e、π 与 γ、无穷乘积

公开版 • 10 月 7 日

Project Akari