PROJECT AKARI

AKARI

知乎 @ 余命数（水无月雫）

中学数学之旅

第三卷·几何主干

Volume III · GEOMETRY

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

公开版 · 10 月 5 日

Project Akari

余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

中学数学之旅

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

rikka.moe

知乎@余命数

余命数 (Midnight Forever)
知乎 @ 余命数
https://rikka.moe

知乎@余命数

中学数学之旅
An Excursion through Secondary School Mathematics
最后更新：October 7, 2026

知乎@余命数

© 2026 余命数
保留所有权利. 书稿版本，禁止修改、倒卖等任何侵犯作者著作权的行为.

知乎@余命数

知乎@余命数

书稿声明

Draft Notice

本书目前为**书稿状态**，意味着：

- 内容尚未完整，部分章节可能缺失或正在编写中
- 文中可能存在笔误、排版错误或数学推导疏漏
- 章节结构与内容安排可能在后续版本中调整
- 习题答案与索引等附录内容可能尚未完善

若您在阅读过程中发现任何错误或有改进建议，
欢迎通过以下方式联系作者：

个人网站：https://rikka.moe

电子邮箱：me@rikka.moe

书籍主页：https://rikka.moe/books

当前版本：Draft October 7, 2026

知乎@余命数

献词

Dedication

谨以此书

献给我家的苏格兰折耳猫
愿你在每一个慵懒的午后，都有阳光与安宁

每一个未曾舞蹈的日子
都是对生命的一种辜负

„Und verloren sei uns der Tag,
wo nicht ein Mal getanzt wurde!"

— 弗里德里希·尼采
Friedrich Nietzsche

— 2026 —

知乎@余命数

关于作者

余命数



Project Akari ·Midnight Forever

2025 届广西新高考二卷考生, 政史地组合, 数学 139 分.

这套书整理自我中学阶段学习数学时的笔记与讲义. 我按一条理想的阅读骨架把代数、离散与随机、几何、分析、线性结构依次铺开, 每条结论都给出推导路径, 把概念彼此生长的过程摊开在纸面上. 愿它陪你走完一段中学数学的旅程.

书籍主页

https://rikka.moe/books

更多信息、勘误表、联系方式等均可在此查看

交流与联系

在线平台

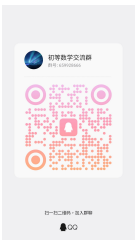
个人主页	`https://rikka.moe`
书籍主页	`https://rikka.moe/books`
知乎	@ 余命数
爱发电	`https://afdian.com/a/writeamathbook`

即时通讯

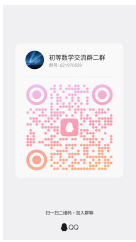
QQ	`2454167821`
交流群	`659928666`
邮箱	`me@rikka.moe`



扫码添加好友



交流群一



交流群二



爱发电赞助

知乎@余命数

欢迎通过以上方式与我交流讨论

知乎@余命数

前言

如果你基于本书制作修改版 PDF, 请保留这里的前言与声明, 谢谢. 想了解更多, 请访问我的主页https://rikka.moe

推动我写这套书的最主要动因是贫穷. 我高中就读于一所普通的省重点, 家里没钱给我补习, 能找到的老师水平也一般.

好在我有一台能联网的手机和一颗热爱学习的心, 于是便用互联网找学习资源, 听网课、看电子书.

这个过程里我攒下大量笔记, 大多记在 Obsidian 上. 高考结束后的 2025 年暑假, 我把这些笔记整理成册, 发到几个群里反响不错, 于是继续写了下去.

我也希望这本书能集百家之长. 市面上的资料和教辅很多, 我想读一本成体系、又贴合自己阅读习惯的书, 于是干脆自己动手写, 权当半个教科书.

这本书花了我不少时间. 如果你觉得有帮助, 欢迎去爱发电https://afdian.com/a/writeamathbook支持一下, 请我吃一碗拼好饭也可以. 书中的疑问或错误, 欢迎随时联系, 邮件 me@rikka.moe、QQ2454167821, 或加入 QQ 群 659928666.

知乎@余命数

吊诡的是, 我觉得教辅太贵, 所以都看电子版.

Obsidian 是一款很好用的笔记软件, 用好了可以打造属于自己的知识库.

关于联系与提问

本人经常在外打工兼职或忙别的事, QQ 私聊不一定看得到, 重要的事情请发知乎私信. 已经写清楚的问题我一般不再重复, 比如分卷本与合订本的区别、各版本之间的区别.

学习方法我也说不出什么有用的. 你观察过学得好的同学就会发现, 无论被谁请上台分享经验, 大多只能说些政治正确的话, 扎实基础、回归课本、多跟老师. 这怪不得他们, 真正掌握一项技能后, 就很难想象不懂它是什么感觉, 一项已经内化的能力, 很难再拆开讲给你听.

即便方法就是“极度的自律、极高的抗挫折能力、成百上千小时的枯燥重复”, 即便有些人同时有智商与基因、家庭托底和超强的专注力与抗挫折力, 学习也没有廉价速成的魔法. 每次有人问我, 我也只能给出和所有人一样的回答, 巩固基础、回归课本、多跟老师、总结错题.

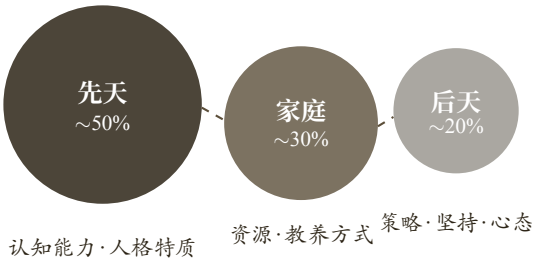
用卖课的人的话说, 就是欢迎多多支持我的项目和电子书. 所以这方面的问题, 就不必再问了.

不过, 考虑到还是有人想知道学习方法. 很好, 下面从比较科学的角度出发, 拒绝政治正确和哔哩哔哩经典学长或学姐分享学习方法的套话, 来说说好的学习方法.

学习成绩的好坏可以认为取决于三大类因素: 先天禀赋、家庭条件和后天努力. 下图用圆的大小表示各自的影响占比, 圆越大代表该因素对成绩差异的解释份额越多.

占比数据综合自 Silventoinen et al. (2020) 在 Scientific Reports 上发表的 28 国双胞胎整合分析(遗传力约 40%–70%, 共享环境约 20%–40%)与 de Zeeuw et al. (2015) 的荷兰双胞胎元分析; 本文取中位数附近的近似值.

知乎@余命数



知乎@余命数

图中三个圆分别代表：

- **先天**，约占一半：认知加工速度、工作记忆容量等人脑硬件参数，以及尽责性、抗压性等人格倾向. 这部分相对稳定，但并非锁死. 早期营养、睡眠和运动会影响其发挥. 有些人的确在某些方面的所谓的感觉更好，又或者说，假如你在婴幼儿时期，甚至还没出生的时候，就接受到了一些对神经系统不太好的物质，这都是实打实的.
- **家庭**，约占三成：家里的藏书量、父母的词汇量和教育期望、能否提供安静的学习环境与课外资源. 家庭条件好在早期尤为关键，随着年级升高其权重逐渐下降. 这里也比较显然，如果家庭是那种书香家庭，父母都是文化人，或者都是中产阶级甚至是富人阶级，请得起清华北大的私教一对一，买学区房、上重高等等，获取好的成绩的概率更大、更轻松. 如果家庭是那种一天到晚都在吵架、家庭暴力、父母没文化而且也不怎么有钱（遗憾的是编者的家庭都是如此，因此我付出了很大的努力），很大概率最后都是成绩一般甚至很差，成为混混或其他.
- **后天**，约占两成：学习方法是否科学、能不能坚持、面对难题时的心态. 虽然占比最小，却是个人最能把控的部分，也是拉开同等条件下人与人差距的主战场. 这也就是唯一可以努力的地方，除非你是家长，否则对于学生，也就是我们而言，只有此路！

虚线表示三类因素之间存在交互，即先天禀赋需要在合适的家庭环境中才能充分发挥，而后天努力的效率又受限于先天的认知基础和家庭提供的资源.

把可控因素提炼出来，成绩的近似模型可以写成：

$$\text{成绩} \approx \underbrace{(\text{认知基础} + \text{尽责性})}_{\text{较稳定}} \times \underbrace{(\text{科学策略} + \text{自我调节})}_{\text{高度可控}} + \underbrace{\text{家庭支持} + \text{教学质量}}_{\text{环境系数}} \tag{0-1}$$

说说，公式里用的是乘法和加法，含义各有侧重.“较稳定”部分与“高度可控”部分之间是乘号，即便先天基础只有六七分，只要方法和自律跟上，乘积依然可观；反过来基础再好，方法为零则乘积也为零. 加在最外面的“环境系数”是加分项，好的家庭和老师能把整体水平往上抬一截，但它们替代不了主体部分的乘积.

Poropat (2009) 的元分析，样本逾七万人，显示尽责性是大五人格中对学业成绩最强的非智力预测因子，其对大学成绩的预测效力与智力相当.

ACE 模型源自行为遗传学经典范式：A 为加性遗传，C 为共享环境，E 为非共享环境.Lee et al. (2018) 在 Nature Genetics 上发表了百万级样本的 GWAS，其多基因评分解释受教育年限约 11%–13% 的变异.

Hart & Risley (1995) 在 Meaningful Differences 中跟踪观测了 42 户家庭三年，发现专业人员家庭幼儿在三岁前累计听到约 3000 万词，领取福利金的家庭约 1000 万词，“三千万词鸿沟”由此得名；后续研究对其取样和方法有争议，但方向一致.

Duckworth & Seligman (2005) 在 Psychological Science 上对八年级生的纵向研究中发现，自控力对期末成绩的方差解释量约为 IQ 的两倍有余.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

“科学策略”指的是有实证支撑的学习技术. 合上书本逼自己回忆的主动检索, 以及在快要忘记时复习的间隔重复, 其效果远大于被动重读和划重点.“自我调节”涵盖制定计划、监控进度和在出错时及时纠正方向的能力.

先天和家庭设定了起跑线和跑道状况, 后天的高质量努力决定你能在这条道上跑多远.

所以, 动用你聪明的小脑袋瓜, 评估自身的情况, 决定从何入手, 别去问别人的学习方法. 你首先是你自己的, 如果你自己都不知道自己要做什么, 就不要偷懒问别人了.Like WTF, 如果你是个普通家庭, 你去问一个有钱人出身的竞赛背景的学霸, 问学习方法, 这本身就荒谬.

当然, 还有一个很好的学习习惯, 那就是去爱发电支持作者:), 推出更多的学习资源, 助你一臂之力.

Dunlosky et al. (2013) 在 Psychological Science in the Public Interest 上评定了十种常用学习技术, practice testing 与 distributed practice 获评高效用, rereading 与 highlighting 获评低效用.

知乎@余命数

如何获取无水印版

本书的基础版本， 含水印免费开放， 任何人都可以在我的主页`https://rikka.moe/books`下载. 如果你想获取无水印版, 可以在爱发电上支持本项目:

1. 打开爱发电页面:`https://afdian.com/a/writeamathbook`
2. 选择对应的赞助档位(通常会标注“无水印版”或“完整版”), 完成赞助
3. 赞助后在爱发电的消息里会收到无水印版 PDF 的下载链接; 如果没有收到, 请发邮件或在知乎私信告诉我你的爱发电昵称

无水印版与免费下载版的**内容完全一致**, 差别只在水印. 你不花钱也能读到一模一样的数学内容;付费只是为了去掉水印、支持项目运转.

既然可以免费下到, 为什么要花钱买?

我一直用中世纪或文艺复兴时期王公贵族资助艺术家来比喻这种捐赠的模式, 或者更恰当的, 是 18-19 世纪文人的集资预订, 又或者是数字公共品理论。

许多高中生(包括我)因为高中的时候穷, 没钱, 所以喜欢白漂电子书资料。毕竟在我那时候, 任何没有 DRM(数字版权管理技术)的电子书都能被随意复制粘贴和传播, 盗版网课也有很多。很多时候不是不想支持正版, 而是没钱。与其到处找资源, 不如加成千上万个资料群, 去点那些夸克网盘(天下没有免费的午餐, 夸克网盘对分享资料的人也是有利可图的), 下一堆资料。虽然下了或者存了以后, 可能没有时间看或者基本不看, 但至少满足了收集欲, 以及一种“我在学习”的感觉。

但是, 与其在网盘里存 500G 的名师网课和状元笔记, 或者花重金买各种名师的网课和资料, 不如把钱留给真正对你有用的东西。如果你觉得 “这本书确实对我有用”、写得好, 或者在其他方面给你带来了价值, 不妨去我的爱发电`https://afdian.com/a/writeamathbook`花 10～30 块来支持我, 并获得无水印版。

其实 10 块钱，吃一次拼好饭差不多就花完了。所以我想了一句广告语：用一次拼好饭的钱，来支持下一位创作者。即使实际上你可以白漂（毕竟这是公共品，一个人的占用不会导致另一个人占用的减少），但你的支持，能让互联网上的创作者感到生活更加美好。

更重要的是，你今天怎么对待创作者，就是你希望将来别人怎么对待你。总有一天，你也会在网上创作：可能是一篇文章，一门课。到那时你会明白，被人认可的感觉有多重要，哪怕对方只付了一次拼好饭的钱。

公共品之所以能一直存在，是因为总有一些人，在可以不付钱的时候，仍然愿意为自己认可的东西付一点点。创作者因此能继续创作，受众也因此能继续读到好东西，这才是真正的双赢。而你今天的这一点点，就是在把这个循环往下传。

知乎 知乎@余命数

试用 Akari Web 平台

知乎@余命数

除了纸质书之外，Project Akari 还在做一套在线学习工具，即 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）.

Project Akari 是一项旨在结合人工智能教育、教育数据挖掘、学习分析，并基于认知心理学的研究成果，搭建一款旨在帮助学生高效地学习数学和计算机科学方面知识的智能辅导系统，或称为学习引擎.

余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

因此，我们的目的就是，尽可能量化学生的知识状态，并结合算法，智能评价和判断学生目前的学习状态，辅助其真正习得和掌握一样东西.

我们的哲学是，让用户用效率最高的方式学到知识，为此我们开发了一整套配合的算法，并在课程等设计上尝试最小化认知负担，采取更互动的方式以激发主动性. 量化学习的一切，并且优化，便是一切的出发点和落脚点.

知乎@余命数

这本书写给谁

知乎@余命数

本书的目标读者有三类：

- **在校高中生**：跟着课堂教学同步使用，课上没听懂的章节回来对着书再看一遍推导. 标题带 $*$ 的选读内容可以先跳过，等基础扎实了再回头啃.
- **复读生或自学备考者**：按目录顺序系统过一遍，重点关注每节的例题和章末习题. 如果你的时间紧张，优先读函数、三角、数列和解三角形四章，即高考分值密集的区域.
- **想重温数学的成年人**：你可能忘了大半高中内容但又不想从初中补起. 挑感兴趣的章节直接读就好，遇到前置知识不清楚的地方顺着交叉引用回去翻.

不管你是哪种读者，建议的做法都一样，先看正文搞懂逻辑链，再做例题（盖上解答自己想），最后做章末习题检验. 光看不练等于白看.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

本书的结构

各卷可独立阅读，也可合订通读. 分卷本在文前附有本卷的分册前言与本卷导读；合订本在每卷分隔页之后给出本卷导读，便于按卷回看. 标题中带 * 的章节多为选读或拓展，初读时可略，需要时再补.

关于版本与系列

本书目前仍是书稿，个别地方尚未完整，可能存在笔误或疏漏，若发现错误或有建议，欢迎联系作者. 本版本是 2026 年按学习路径重排的重要更新，调整了五卷章序，把数列章尾的分析内容并入极限与导数，把平面向量提到解三角形之前.

本书属于 Project Akari 系列.Akari 取自日文“あかり”，意为光，寓意是让好的学习材料更容易被找到、更容易被用起来.

Project Akari 的另一部书稿《函数与导数》将函数、极限与导数相关内容单独成书，系统展开. 两本书可以独立阅读，也可以互相参照. 配套的 Akari Web 平台（`https://kirie.io`）提供笔记、记忆卡片和在线练习，与书稿配合使用.

本系列的基础版本免费开放，完整版本以极低价格提供. 知识不应该是奢侈品，这是我做这件事的底线.

从写作、排版到软件开发，Project Akari 的每一步都是我一个人完成的. 服务器和运营成本靠书的销售收入以及我个人的工作收入来覆盖. 这个项目既是学习方法的实践，也是工程能力的验证.

发现错误怎么办

一个人的精力和眼力终究有限，书里难免有笔误、推导疏漏乃至概念性错误. 如果你发现了，请按以下方式反馈，我能更快地定位和修正：

1. 说明在哪一卷、哪一章、哪一节，或直接给页码和小标题
2. 引用书中的原文或公式编号
3. 写出你认为正确的版本或质疑的理由

最快的渠道是知乎私信 `https://www.zhihu.com/people/yushumi-shu`，其次是邮件 `me@rikka.moe`. 有价值纠错的读者名字会列入后续版本的鸣谢名单.

致谢

这本书能走到今天，离不开很多人的帮助.

首先要感谢每一位读过草稿、提出意见的同学和朋友. 你们在群里随手指出的一道错题、一处不通顺的表达，聚沙成塔地把这本书往前推了一步.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

感谢爱发电上的赞助者们. 你们的每一笔支持都实实在在地变成了服务器费用和我碗里的拼好饭, 让我能在打工之余腾出手来继续写.

感谢家人容忍我把无数个周末和假期耗在了电脑屏幕前. 虽然你们不完全理解我在做什么, 但从没拦过我.

最后感谢你, 正在读这段字的陌生人. 一本书的价值在被翻开的那一刻才算兑现.

版权与授权

本系列的基础版本依据**知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际协议**(CC BY-NC-ND 4.0) 开放给个人学习者免费使用. 完整版本以极低价格提供, 销售收入用于覆盖服务器与运营成本. 商业使用、机构采购或翻译授权请联系作者.

防盗版与使用声明

本书为 Project Akari 系列出版物. 本 PDF 仅供合法获取者个人学习使用, 禁止以下行为:

- 将本 PDF 或其任何部分上传至任何公开网络平台、网盘、论坛或即时通讯群组;
- 对本 PDF 进行二次售卖、捆绑销售或用于任何商业用途(已获作者书面授权者除外);
- 将本书内容用作机器学习或人工智能训练语料;
- 移除、涂改或遮盖本书的水印、版权信息、读者指纹或页脚标识;
- 修改 PDF 元数据后以原书名、作者名重新分发.

如发现盗版或侵权行为, 欢迎通过以下渠道举报:

- 书籍主页:https://rikka.moe/books
- 邮箱:me@rikka.moe

版本指纹(用于溯源与正版核验):

读者标识 DRAFT-REVIEW

文档哈希 DRAFT-REVIEW

编译日期 October 7, 2026

关于修改与再分发的声明

本书由作者独自维护并发布, 是本项目唯一的**权威正版来源**. 任何对本 PDF 或其源文件的内容、水印、版权信息、读者指纹、PDF 元数据的删改、涂改或遮盖, 均视为对本声明与著作权法的违反.

修改后的版本**不得**保留以下任一标识并以任何形式分发, 否则视为侵权:

- 书名《中学数学之旅》及 Project Akari 系列名称;
- 作者署名"余命数"及相关社交账号;
- 版权页、前言中任何声明性文字;
- 页脚隐性指纹与页面水印.

欢迎读者基于本书内容做学习笔记与摘录，但请在分发时注明来源与原作者. 如需做系统性改编，如翻译、缩写、教材化使用，请先联系作者取得书面授权.

正版核验与联系方式见版权页，或访问 https://rikka.moe/books.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

分册前言

写这一卷时我把方法排序换了几次. 试过的方案里, 先讲解析几何再补向量, 向量反而沦为用完即弃的脚手架; 先把极坐标压到分析卷之后, 参数方程与轨迹又失了支撑. 最后落到这套顺序, 几何主干的主线是**先给工具, 再给应用**.

知乎@余命数

平面向量建立加减、数乘、数量积与定比分点, 使解三角形中的四心表示与解析几何的坐标语言有公共底座. 解三角形以正弦、余弦定理处理边角关系, 并保留建系法作为保底策略. 解析几何把点变成坐标、把直线与曲线变成方程; 设点法与设线法贯穿题型. 极坐标与参数方程紧随其后, 服务离心角、轨迹与旋转对称, 不再压到分析卷之后当作附录. 射影几何拓宽交比与极点极线的视野, 建议在二次曲线之后作为选读.

射影几何在国内高中主流教辅里几乎绝迹. 我最初也是从一本东北欧的解析几何旧书里看到交比, 才意识到高考压轴中直线为何必过定点的论证, 其实有更深层的几何解释.

读完本卷, 形与数应能彼此翻译. 它承上衔接第二卷的三角工具, 启下通向第四卷的变化率语言与第五卷的数系、空间扩展.

射影几何标有 $*$, 为基础轨选读, 初读可略. 解析几何部分偶尔用到导数等分析工具, 相应位置都注明了出处在第四卷, 基础轨读者可先按坐标法与初等代数处理.

也谢谢那个没有放弃的自己, 几次推翻排序换来的这点心得.

本书为书稿状态, 内容尚不完善, 可能存在笔误或疏漏. 如有问题或建议, 欢迎联系作者 `https://rikka.moe`, 或发送邮件至 `me@rikka.moe`.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

本卷导读

本卷线索

第三卷先建立向量语言，再用代数框架翻译几何. 坐标、方程与不变式让位置关系变得可计算、可证明，几何判断由此落到可以操作的推演上.

章节地图

- ▷ **平面向量**　运算、数量积、坐标表示与定比分点. 这套语言贯穿解三角形的四心表示与解析几何的全程，是本卷两章的公共底座.
- ▷ **解三角形**　以正弦、余弦定理处理边角关系，配合最值与建系法，几何量由此转成可解的方程.
- ▷ **解析几何**　在向量底座上统一直线、圆与二次曲线；设点法、设线法贯穿题型.
- ▷ **极坐标与参数方程**　承接解析几何，处理离心角、轨迹与旋转对称，为曲线提供另一套描述方式.
- ▷ **射影几何**　交比、调和与极点极线，从观念与结构上回看二次曲线的内在联系.

向后展望

第四卷将拧成分析主干：极限与导数（含数列极限、级数、泰勒）、积分与微分方程，并以思想方法章收束. 第三卷建立的坐标语言，是这些扩展的共同底座.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

目录

关于作者 i

前言 iii

分册前言 xi

本卷导读·第三卷 xiii

第一章 平面向量 2

1.1 向量代数 2
1.2 定比分点与共线定理 42
1.3 向量外积与混合积 58

第二章 解三角形 66

2.1 正弦定理和余弦定理 67
2.2 范围与综合 91
2.3 保底的建系法 126
2.4 非常规题型 132
2.5 梅涅劳斯定理与塞瓦定理 136
2.6 斯特瓦尔特定理与三角形特殊点 141
2.7 托勒密定理与西姆松定理 145

第三章 解析几何 152

3.1 直线与圆 152
3.2 线性规划初步 * 170
3.3 二次曲线 202
3.4 设点法的技术基础 265
3.5 设点法的参量选择 277
3.6 设点法的典型应用 287
3.7 联立运算的基础准备 297
3.8 直线方程的形式选择 320
3.9 联立后的代数处理技巧 330
3.10 一次式与法线式 351
3.11 直线偶与齐次化 358
3.12 三角形的心 363
3.13 共圆点与共轴圆 367

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

3.14 轨迹方程 . . . 372
3.15 解析法证几何题 . . . 383
3.16 解析几何思想与方法论 . . . 391
3.17 隐圆 . . . 394
3.18 直线与圆的综合应用 . . . 404
3.19 垂直弦问题 . . . 416
3.20 斜率和差商积 . . . 429
3.21 圆幂与反演 . . . 442
3.22 圆锥曲线的光学性质 . . . 447
3.23 焦点弦 . . . 451

第四章 极坐标与参数方程 * 458

第五章 射影几何 488
5.1 源起与观念 . . . 488
5.2 单比与交比 . . . 489
5.3 二次曲线的极点与极线 . . . 494
5.4 极点与极线的几何作图 . . . 503
5.5 笛沙格定理与帕普斯定理 . . . 509
5.6 帕斯卡与布里昂桑 . . . 513

习题解答 519
第 2 章解三角形 . . . 519
第 3 章解析几何 . . . 524
第 5 章射影几何 . . . 525

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

第 1 章

平面向量

基础语言

「几何无王者之路。」

——欧几里得

第一章 平面向量

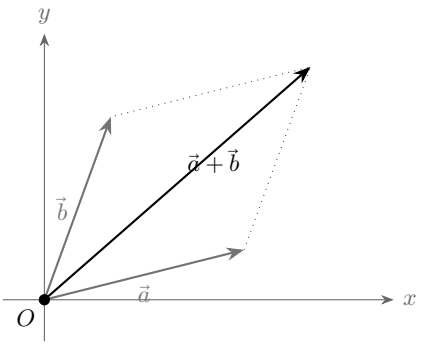
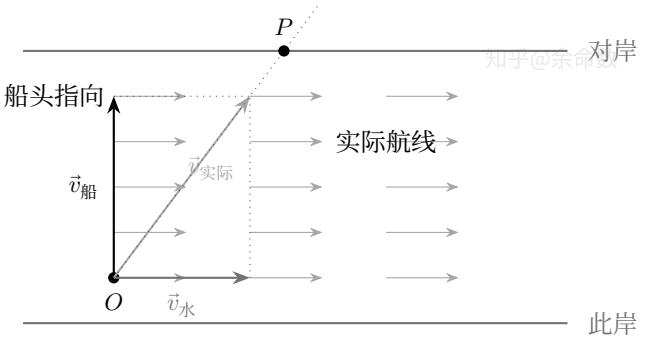


图 1.1 向量将方向与长度从具体线段中抽象出来, 使平移、投影与夹角可计算

本章把几何量改写成可运算的对象. 向量既服务三角形中的边角关系, 也是解析几何中点、直线与轨迹的默认语言.

知乎@余命数

1.1 向量代数



经典几何学的研究对象是点、线、面等不动的形体. 然而物理世界充满了运动与力, 这些量兼具大小与方向. 要将这些动态的、有方向的量纳入数学体系, 需要引入一种新的代数结构.

想象一艘船试图渡过一条湍急的河流. 船长始终将船头垂直指向对岸, 此时船速为 $\vec{v}_{船}$, 但河水以 $\vec{v}_{水}$ 将船向下游推. 最终, 船的实际航线沿着一条斜线(速度记为 $\vec{v}_{实际}$)到达对岸的下游某处.

在物理中, 力的合成与相对运动都涉及一些既带 **大小**, 如速率与力的大小, 又带 **方向**的物理量. 如何用数学语言精确描述这些带方向的量并加以计算, 是新的课题. 船长想精确地在正对岸靠岸,就必须调整船头方向以抵消水流影响. 此时,代数中的普通数字, 即标量, 已然无能为力. 需要引入一种能把大小与方向融为一体

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

的数学工具, 这就是 **向量**. 这个结构的起点, 是一个比向量更原始、更具体的几何实体, 即有向线段.

1.1.1 从有向线段到向量

1.1.1.1 有向线段

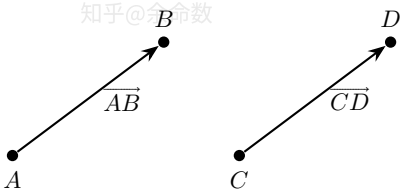
先定义一个局限于特定位置的几何对象.

定义 1.1 (有向线段) 在空间中给定有序的一对点 A 和 B, 从点 A 指向点 B 的线段称为一条**有向线段**, 记作 $\overrightarrow{AB}$.

- 点 A 称为该有向线段的**起点**.
- 点 B 称为该有向线段的**终点**.

一条有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 包含三个基本要素, 即**起点**、**长度**与从 A 指向 B 的**方向**, 三者分别给出位置、大小与方向. 如图所示, 有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 是两个不同的几何

知乎@余命数



有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$

知乎@余命数 知乎@余命数

对象, 因为它们的起点不同. 然而, 物理学的位移或力并不关心起点, 只要长度相等且方向相同, $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 就代表同一个物理实体. 例如, 向东北方向移动 5 公里这一位移, 无论从何处开始, 其本身是不变的.

为了捕捉这种独立于位置的有向的大小, 需定义一种等价关系.

定义 1.2 (有向线段的等价) 两条有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 被认为是**等价**的, 如果其中一条可以通过平移变换得到另一条.

从几何上看, 这等价于要求四边形 $ABDC$ 是一个平行四边形.(注意顶点的顺序). 这同时保证了 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的长度相等且方向相同.

这种等价关系具有数学上的完备性:

- **自反性**: $\overrightarrow{AB}$ 与自身等价.
- **对称性**: 若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 等价, 则 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 等价.
- **传递性**: 若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 等价, 且 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 等价, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 等价.

知乎@余命数

这种关系将所有向线段划分成一个个互不相交的集合, 每个集合中的所有成员都相互等价. 这个集合, 这个抽象的整体, 就是向量.

定义 1.3 (向量) 一个**向量**是所有相互等价的有向线段所构成的**等价类**.

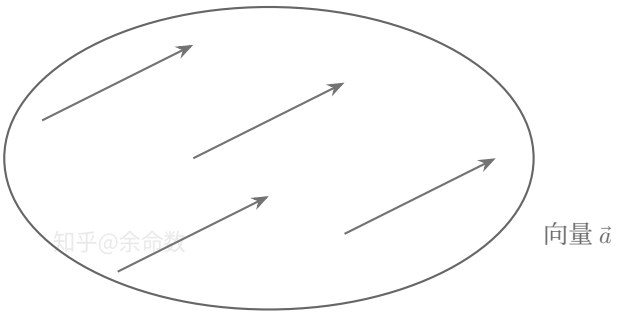


图 1.2 向量 $\vec{a}$ 是一个抽象概念, 它是所有这些长度和方向相同的有向线段的集合. 其中任意一条都是该向量的一个**几何表示**或**代表**.

这个从具体到抽象的定义,将向量从对特定起点和终点的关注中解放出来,使之成为**自由向量**. 可任意平移它的几何表示, 而不改变向量本身. 这为后续的代数运算提供了理论基础.

1.1.2 向量的基本属性与线性运算

已将向量定义为一个抽象的等价类, 它封装了大小与方向这两个信息, 并摆脱了具体位置的束缚. 接着的任务, 是为这些数学对象建立一套自洽的代数运算法则.

1.1.2.1 向量的基本属性

在定义运算之前, 先要明确向量自身的几个基本属性.

- **模**: 向量 $\vec{a}$ 的模, 记作 $|\vec{a}|$, 是其等价类中任意一个有向线段代表的长度. 模是一个非负实数, 它唯一地刻画了向量的大小.
- **相等**: 两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 相等, 记作 $\vec{a}=\vec{b}$, 当且仅当它们的模相等且方向相同. 从等价类的角度看, 它们属于同一个集合.
- **零向量**: 模为 0 的向量称为零向量, 记作 $\vec{0}$. 它的起点与终点重合, 其几何表示为一个点. 由于零向量没有长度, 方向视为任意. 在向量加法中, 零向量是类似于数字 0 的(加法单位元): $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
- **单位向量**: 模为 1 的向量称为单位向量. 单位向量是纯粹的方向载体. 对于任意一个非零向量 $\vec{a}$, 与其方向相同的单位向量可以通过将其自身除以其模得到:

$$\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此, 任何向量都可以表示为其模与它的单位向量的乘积: $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}$.

- **相反向量**: 与向量 $\vec{a}$ 模相等但方向相反的向量, 称为 $\vec{a}$ 的相反向量, 记作 $-\vec{a}$. 它是向量加法中的逆元: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. 若 $\vec{a}$ 的一个代表是 $\overrightarrow{AB}$, 则 $-\vec{a}$ 的一个代表是 $\overrightarrow{BA}$.

  逐项说明如下.

1.1.2.1.1 模 向量 $\vec{a}$ 的模, 记作 $|\vec{a}|$, 在几何上直观地表现为其任意代表有向线段的长度. 然而, 其更基本意义在于, 模是在向量空间上定义的一个**范数**. 范数是一个将向量映射到非负实数的函数, 它满足三个基本公理:

- **正定性**: $|\vec{a}| \geq 0$, 且 $|\vec{a}| = 0$ 当且仅当 $\vec{a} = \vec{0}$.
- **齐次性**: 对于任意实数 λ, 有 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.
- **三角不等式**: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

模给出长度的度量, 也是赋予一个纯代数空间以几何拓扑结构的根本工具. 有了模, 可定义向量之间的**距离** ($d(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a} - \vec{b}|$), 进而分析收敛、极限与连续性等分析学概念. 因此, 模把代数与分析联系起来.

1.1.2.1.2 相等 两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 相等, 记作 $\vec{a} = \vec{b}$, 当且仅当它们的模相等且方向相同. 这一看似平凡的定义, 实则已经排除了位置的影响. 从对向量的构造性定义出发, $\vec{a} = \vec{b}$ 的真正含义是, 向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 属于**同一个等价类**. 即, 代表 $\vec{a}$ 的任意有向线段 $\overrightarrow{AB}$, 与代表 $\vec{b}$ 的任意有向线段 $\overrightarrow{CD}$, 都是相互等价的. 这种等价关系的确立, 使得向量摆脱了其几何代表的具体位置, 成为一个**自由向量**. 正是这种自由, 才使得可将不同位置的向量进行平移、首尾相接或共起点放置, 从而为向量的代数运算, 如加法提供了理论上的合法性与可能性.

1.1.2.1.3 零向量 模为 0 的向量称为零向量, 记作 $\vec{0}$. 它在几何上对应一个点, 其方向被规定为任意. 这一定义的代数意义在于, 零向量是向量加法运算的**单位元**. 在任何一个代数群中, 单位元是那个与其他元素运算后不改变该元素的特殊元素. 对于向量空间, 这表现为对于任意向量 $\vec{a}$, 恒有

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

1.1.2.1.4 单位向量 模为 1 的向量称为单位向量. 如果说模是向量大小信息的载体, 那么单位向量就是方向信息的纯粹载体. 将一个非零向量 $\vec{a}$ 除以其模, 即 $\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, 这一过程被称为**规范化**. 规范化操作说明了向量的一个基本结构分解, 即任何非零向量 $\vec{a}$ 都可以唯一地表示为其模与它的单位向量的乘积:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}_{\vec{a}}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这是一种向量的**极分解**, 类似于复数中的极坐标表示 $z = re^{i\theta}$. 它将一个向量蕴含的两种信息, 即大小与方向, 进行了彻底的分离. 在诸多物理与工程应用中, 常关心过程的方向, 此时单位向量便成为描述该过程最简洁有力的工具. 所有单位向量的终点集合, 构成了向量空间中的单位球面(在二维平面上即单位圆), 这是研究向量旋转等变换的一个基本几何舞台.

1.1.2.1.5 相反向量 与向量 $\vec{a}$ 模相等但方向相反的向量, 称为 $\vec{a}$ 的相反向量, 记作 $-\vec{a}$. 在代数结构中, 相反向量是向量加法运算的**逆元**. 对于群中的每一个元素, 都必须存在一个逆元, 使得该元素与逆元运算的结果是单位元. 对于向量空间, 这表现为对于任意向量 $\vec{a}$, 恒有

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

相反向量的存在, 保证了向量加法群的完整性, 并由此自然地导出了向量减法的定义, 即减去一个向量等价于加上它的相反向量. 没有相反向量, 就没有封闭的代数系统, 向量的线性运算也将无从谈起. 从几何上看, 若 $\vec{a}$ 的一个代表是 $\overrightarrow{AB}$, 则 $-\vec{a}$ 的一个代表是 $\overrightarrow{BA}$, 这正给出了相反向量的几何直观.

例题 1.1 判断命题甲"$\vec{a} = \vec{b}$"是命题乙"$|\vec{a}| = |\vec{b}|$"的什么条件?

解 此题考察对向量概念的把握, 要点在于区分向量相等与向量的模相等.

若 $\vec{a} = \vec{b}$, 即向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小和方向完全相同. 既然大小相同, 那么它们的模必然相等, 即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. 因此, 甲能够推出乙, 甲是乙的充分条件.

反之, 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 这只说明两个向量的长度相等. 它们的方向可能不同. 例如, 令 $\vec{a}$ 是一个非零向量, 而 $\vec{b} = -\vec{a}$, 则 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 但 $\vec{a} \neq \vec{b}$. 因此, 乙无法推出甲, 甲不是乙的必要条件.

"$\vec{a} = \vec{b}$"是"$|\vec{a}| = |\vec{b}|$"的**充分不必要条件**.

1.1.2.2 向量加法

向量加法的几何动机源于对连续位移的描述. 想象一个质点从点 A 移动到点 B, 产生位移 $\overrightarrow{AB}$; 接着又从点 B 移动到点 C, 产生位移 $\overrightarrow{BC}$. 整个过程的净效果是从起点 A 直接到达终点 C 的位移 $\overrightarrow{AC}$. 这个首尾相接、连接始末的直观过程, 被抽象为向量加法的基本法则.

定理 1.1 (向量加法的三角形法则) 设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为任意两个向量. 取 $\vec{a}$ 的一个代表 $\overrightarrow{AB}$, 并取 $\vec{b}$ 的一个以 B 为起点的代表 $\overrightarrow{BC}$. 则向量和 $\vec{a} + \vec{b}$ 由有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 所代表.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 此定理**定义**了向量加法, 也给出了具体的几何作图方法. 定义必须唯一且自洽, 向量和的最终结果不应依赖于最初为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 选取的几何代表的位置. 任务是证明这一点, 即证明向量加法是**良定义的**.

设 $\overrightarrow{AB}$ 是向量 $\vec{a}$ 的一个代表, $\overrightarrow{BC}$ 是向量 $\vec{b}$ 的一个代表. 根据定义, 它们的和 $\vec{a}+\vec{b}$ 是由 $\overrightarrow{AC}$ 所代表的向量.

现在, 在平面上另选一点 A', 并作 $\overrightarrow{A'B'}$ 作为 $\vec{a}$ 的另一个代表. 同样, 作 $\overrightarrow{B'C'}$ 作为 $\vec{b}$ 的另一个代表. 现证由这条新路径得到的和向量代表 $\overrightarrow{A'C'}$ 与原始的代表 $\overrightarrow{AC}$ 是等价的.

知乎@余命数

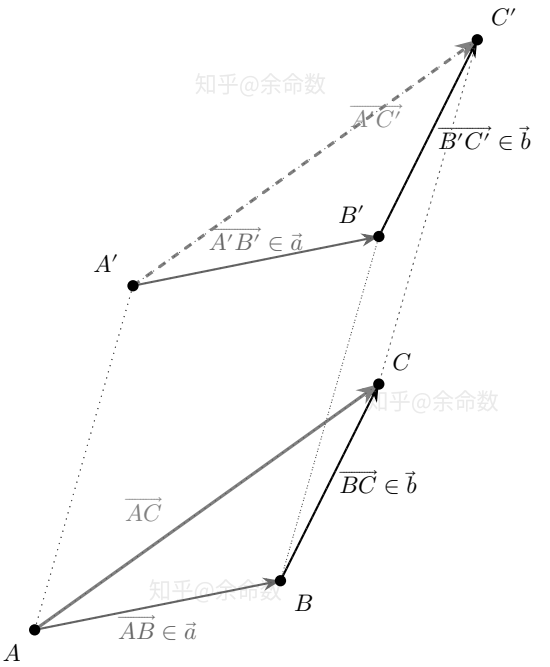


图 1.3　向量加法定义的良定义性

根据向量相等的定义, 有向线段等价于可通过平移重合. 因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$ 都是向量 $\vec{a}$ 的代表, 所以它们等价. 即四边形 $ABB'A'$ 是一个平行四边形. 由平行四边形的性质, 得 $\overrightarrow{AA'}$ 与 $\overrightarrow{BB'}$ 等价.

同理, 因为 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{B'C'}$ 都是向量 $\vec{b}$ 的代表, 所以它们等价. 即四边形 $BCC'B'$ 是一个平行四边形. 由此得 $\overrightarrow{BB'}$ 与 $\overrightarrow{CC'}$ 等价.

接着, 利用向量等价关系的传递性: 既然 $\overrightarrow{AA'}$ 等价于 $\overrightarrow{BB'}$, 且 $\overrightarrow{BB'}$ 等价于 $\overrightarrow{CC'}$, 那么 $\overrightarrow{AA'}$ 必然等价于 $\overrightarrow{CC'}$.

最后, $\overrightarrow{AA'}$ 与 $\overrightarrow{CC'}$ 等价, 这一结论的几何意义是四边形 $ACC'A'$ 是一个平行四边形. 根据平行四边形的性质, 其另一对边也必然平行且等长, 即 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{A'C'}$ 等价.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这就证明了, 无论如何选取向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的代表, 最终得到的和向量的代表总是彼此等价的, 它们都属于同一个唯一的等价类. 因此, 向量加法的三角形法则是一个良定义的运算. □

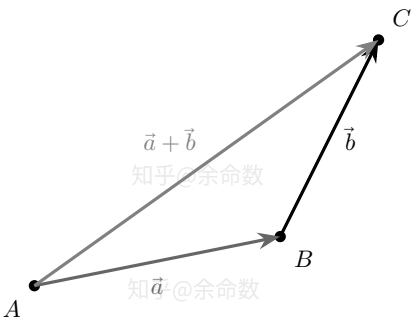


图 1.4 三角形法则: 向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 首尾相接, 其和为从 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点的向量.

当两个向量的作用是同时发生时, 例如, 共同作用于一点的两个力, 平行四边形法则提供了更直观的几何图像.

定理 1.2 (向量加法的平行四边形法则) 设两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 具有共同的起点 O. 以它们的代表 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$, 则从公共起点 O 出发的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 代表它们的和 $\vec{a}+\vec{b}$.

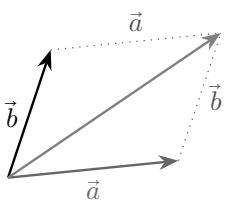
证明 平行四边形法则与三角形法则等价. 在平行四边形 $OACB$ 中, 对边平行且等长, 因而 $\overrightarrow{AC}$ 是向量 $\overrightarrow{OB}$ 的一个等价代表, 即 $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. 又 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. 在 $\triangle OAC$ 中应用三角形法得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$$

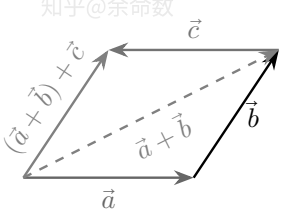
因此对角线 $\overrightarrow{OC}$ 代表向量和 $\vec{a}+\vec{b}$. □

向量加法如同实数加法一样, 满足以下运算律:

- **交换律**: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- **结合律**: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



结合律

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.2 化简向量表达式 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}$.

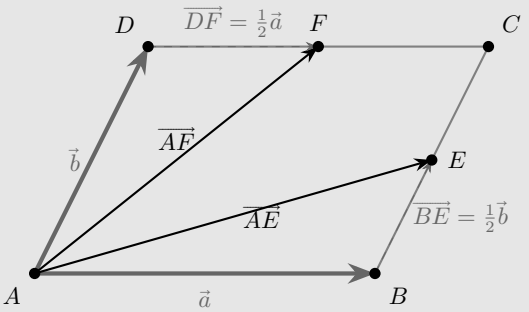
解 前一个向量的终点恰为后一个向量的起点, 形成首尾相接的链条. 由向量加法结合律,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{EB}&=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\\&=\overrightarrow{AB},\end{aligned}$$

知乎@余命数

故原表达式化简为 $\overrightarrow{AB}$. 一串首尾相接的向量之和, 即从第一个向量的起点直接指向最后一个向量终点的向量.

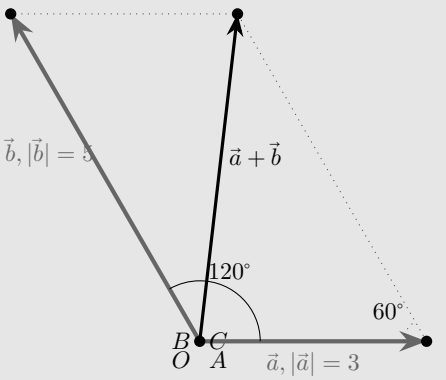
例题 1.3 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E,F 分别是边 BC,DC 的中点. 若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AF}$.



解 此问题要求将目标向量沿一条由已知基向量组成的路径表示. 表示 $\overrightarrow{AE}$, 取路径 $A\to B\to E$. 由三角形法则 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$, 已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. 因 E 为 BC 中点, $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; 又平行四边形中 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 故 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$, 代入得 $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$. 表示 $\overrightarrow{AF}$, 取路径 $A\to D\to F$. 由三角形法则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$, 已知 $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. 因 F 为 DC 中点, $\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$; 又 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, 故 $\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$, 代入得 $\overrightarrow{AF}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$.

例题 1.4 已知两个非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=5$, 且它们的夹角为 120°. 求 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 的值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



在 $\triangle OAC$ 中应用余弦定理

解 求向量和的模长, 是平行四边形法则的直接数量化应用. 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. 以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$. 根据平行四边形法则, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$. 所求 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 就是对角线 OC 的长度.

在 $\triangle OAC$ 中, $OA = |\vec{a}| = 3$, $AC = OB = |\vec{b}| = 5$. 由 $OB \parallel AC$, $\angle OAC$ 与 $\angle AOB$ 互补, 即 $\angle OAC = 180° - 120° = 60°$. 在 $\triangle OAC$ 中应用余弦定理求第三边 OC:

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 - 2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle OAC)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(60°)$$

$$= 9 + 25 - 30 \cdot \tfrac{1}{2} = 19,$$

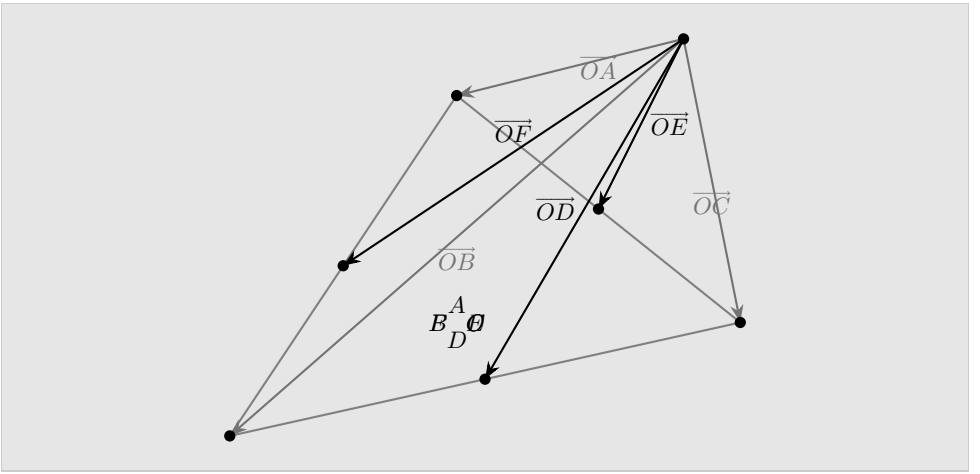
故 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.

例题 1.5 设 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内任意一点, 点 D, E, F 分别是边 BC、CA、AB 的中点. 求证

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

解 这是关于中点与任意基点的普适命题, 证明要点是把等式两边的向量都用以 O 为起点的向量表示. 由中线模型,

$$\overrightarrow{OD}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{OE}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}),\quad \overrightarrow{OF}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

三式相加得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}&=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\\&=\tfrac{1}{2}(2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

知乎@余命数

与右边相等, 命题得证.

1.1.2.3 向量减法

如果说向量加法回答了下一步去哪的问题, 那么向量减法则回答了如何从 B 到 A 的问题. 它描述了两个由同一起点出发的向量终点之间的相对位移.

定义 1.4 (向量减法) 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差定义为 $\vec{a}$ 加上 $\vec{b}$ 的相反向量, 即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

为了说明其基本的几何意义, 考虑共起点的向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 和 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. 根据三角形法则, 有

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$$

移项可得

知乎@余命数

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这一结论极为重要. **两个共起点向量之差, 是连接它们终点的向量, 方向由减向量**

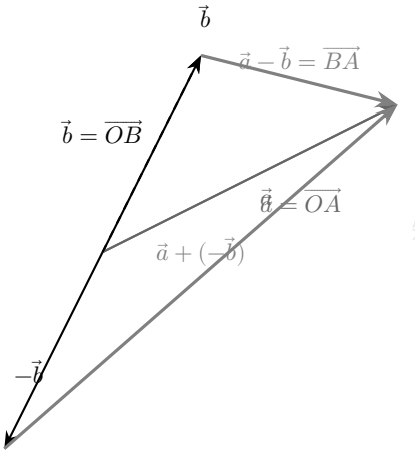
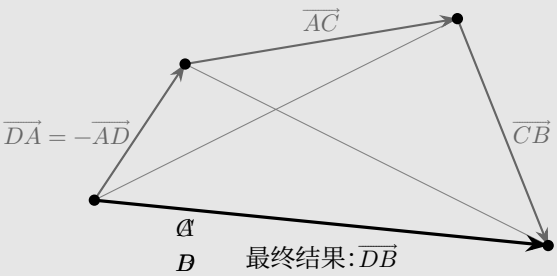


图 1.5 向量减法的几何意义. 左图: 共起点时, 差向量由减向量终点指向被减向量终点. 右图: 其等价于加上相反向量.

的终点指向被减向量的终点.

例题 1.6 在四边形 $ABCD$ 中, 化简表达式 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.



解 处理加减混合运算, 先把减法转为加法, 减一向量即加其相反向量,

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}.$$

由向量加法交换律重排各项使之首尾相接,

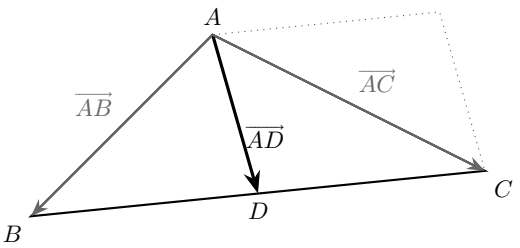
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}&=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB},\end{aligned}$$

故原式化简为 $\overrightarrow{DB}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 若 D 是边 BC 的中点, 则

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD} \tag{1-1}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

证明 在 $\triangle ABD$ 中, 有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$. 在 $\triangle ACD$ 中, 有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$. 将上述两式相加:

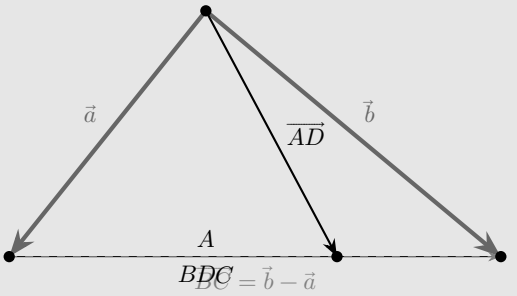
知乎@余命数

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\\&=2\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})\end{aligned}$$

因为 D 是线段 BC 的中点, 向量 $\overrightarrow{DB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 是相反向量. 因此, $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$. 代入即得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$. □

知乎@余命数

例题 1.7 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 且满足 $BD=2DC$. 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, 试用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$.



知乎@余命数　知乎@余命数

解 取路径 $A\to B\to D$, 由向量加法法则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, 其中 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 已知, 只需用基向量表示 $\overrightarrow{BD}$. 点 D 在线段 BC 上, 条件 $BD=2DC$ 给出 $BD=\dfrac{2}{3}BC$, 即 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. 由向量减法的几何意义 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$,代入得 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})$. 回代到 $\overrightarrow{AD}$ 中,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\tfrac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})\\&=\vec{a}+\tfrac{2}{3}\vec{b}-\tfrac{2}{3}\vec{a}=\tfrac{1}{3}\vec{a}+\tfrac{2}{3}\vec{b}.\end{aligned}$$

1.1.2.4 标量乘法

标量乘法定义了一个实数 λ 与一个向量 $\vec{a}$ 之间的运算. 其结果 $\lambda\vec{a}$ 仍是一个向量, 几何上表示对原向量 $\vec{a}$ 进行沿其自身方向的伸缩或反向.

知乎@余命数

定义 1.5 (标量乘法) 实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量, 满足:

1. **模**: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.
2. **方向**:
   - 若 $\lambda > 0$, $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相同.
   - 若 $\lambda < 0$, $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相反.
   - 若 $\lambda = 0$, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.



图 1.6 标量乘法对向量 $\vec{a}$ 的作用.

标量乘法与向量加法共同满足分配律, 这建立起向量代数与实数代数之间的联系:

- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

这些线性运算共同构成了向量空间的基本结构, 是后续所有解析几何理论的代数基础.

1.1.2.5 分析向量的除法

在建立了向量的加、减、数乘以及两种乘积(数量积与向量积)之后, 能否定义向量的除法成为自然的问题. 要回答它, 须先回到除法运算的根本意义.

在实数域中, 除法是乘法的逆运算.a 除以 b (a/b), 就是寻找一个唯一的数 x, 使得

$$b \cdot x = a$$

若对于任意的 a 和非零的 b, 都能找到这样一个唯一的 x, 则此代数系统中的除法是**良定义的**.

将这个思想模板套用到向量上, 定义"向量 $\vec{a}$ 除以向量 $\vec{b}$", 就意味着我们要寻找一个**唯**一的向量 $\vec{x}$, 使得

$$\vec{b} \text{ 某种符号 } \vec{x} = \vec{a}$$

其中某种符号代表一种向量乘法. 然而, 向量的乘法有两种截然不同的形式, 即数量积 ($\cdot$) 与向量积 ($\times$), 问题因此分为两路, 分别考察这两种乘法是否允许良定义的逆运算.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

先尝试基于数量积来定义除法. 为此需要解方程:

$$\vec{b}\cdot\vec{x}=\vec{a}$$

立即遇到一个无法逾越的障碍, **类型不匹配**. 方程的左侧, $\vec{b}\cdot\vec{x}$, 根据定义是一个**标量**(一个实数). 而方程的右侧, $\vec{a}$, 是一个**向量**. 一个标量永远不可能等于一个非零向量, 这在根本上是矛盾的.

为了让探索继续, 不妨调整问题, 改用一个标量 k 除以一个向量 $\vec{b}$, 这对应于求解关于向量 $\vec{x}$ 的方程.

$$\vec{b}\cdot\vec{x}=k$$

这个方程在代数类型上是自洽的. 根据数量积的几何解释, 它要求向量 $\vec{x}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影是一个固定的值. 设 $\vec{b}$ 的方向上的单位向量为 $\vec{e}_{\vec{b}}$, 则投影长度为

$$|\vec{x}|\cos\theta=\frac{k}{|\vec{b}|}$$

其中 θ 是 $\vec{b}$ 与 $\vec{x}$ 的夹角. 如图所示, 所有满足条件的向量 $\vec{x}$ 的终点构成了一个垂

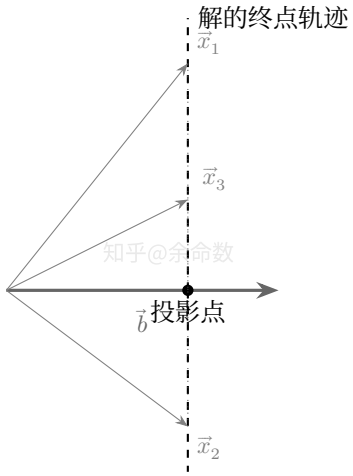


图 1.7 方程 $\vec{b}\cdot\vec{x}=k$ 的解. 任何以 O 为起点, 终点落在垂直于 $\vec{b}$ 的特定直线, 或平面上的向量 $\vec{x}$ 都是该方程的解.

直于 $\vec{b}$ 的直线或平面, 分别对应二维空间与三维空间. 即方程的解有**无穷多个**. 由于除法要求解是唯一的, **数量积不存在逆运算**. 它在运算中丢失了关于 $\vec{x}$ 垂直于 $\vec{b}$ 的分量信息, 这种信息损失是不可逆的.

接着, 尝试基于向量积来定义除法. 为此需要解方程:

$$\vec{b}\times\vec{x}=\vec{a}$$

这一次, 方程两边的类型是匹配的, 向量积的结果是一个向量. 这看起来更有希望.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

然而, 先面临一个**可解性的限制**. 根据向量积的定义, 向量 $\vec{b}\times\vec{x}$ 必然同时垂直于 $\vec{b}$ 和 $\vec{x}$. 即, 等式右边的向量 $\vec{a}$ 必须也垂直于 $\vec{b}$, 即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 如果 $\vec{a}$ 不垂直于 $\vec{b}$, 那么这个方程**根本没有解**. 一个良定义的除法不应该只对极少数特殊情况有解.

即使满足可解性条件 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 解的唯一性问题依然存在. 假设我们找到了一个解 $\vec{x}_0$, 使得 $\vec{b}\times\vec{x}_0=\vec{a}$. 接着构造一个新的向量 $\vec{x}=\vec{x}_0+\lambda\vec{b}$, 其中 λ 是任意实数. 计算 $\vec{b}\times\vec{x}$:

$$\begin{aligned}\vec{b}\times\vec{x}&=\vec{b}\times(\vec{x}_0+\lambda\vec{b})\\&=(\vec{b}\times\vec{x}_0)+(\vec{b}\times\lambda\vec{b})\quad\text{(向量积对加法满足分配律)}\\&=\vec{a}+\lambda(\vec{b}\times\vec{b})\end{aligned}$$

由于任何向量与自身的向量积都是零向量 ($\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$), 上式变为:

$$\vec{b}\times\vec{x}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

故, 如果 $\vec{x}_0$ 是一个解, 那么所有形如 $\vec{x}_0+\lambda\vec{b}$ 的向量都是解! 几何上, 所有的解向

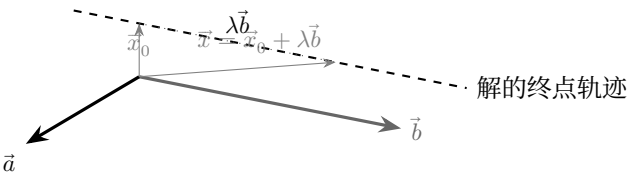


图 1.8 方程 $\vec{b}\times\vec{x}=\vec{a}$ 的解. 若 $\vec{x}_0$ 是一个解, 则所有终点在过 $\vec{x}_0$ 终点且平行于 $\vec{b}$ 的直线上的向量都是解.

量的终点构成了一条平行于向量 $\vec{b}$ 的直线. 再次得到**无穷多个解**. 其根源在于, 向量积运算存在**零因子**, 即两个非零向量的向量积可以是零向量, 当它们共线时. 这与实数乘法中"$ab=0\implies a=0\text{ or }b=0$"的性质截然不同. 拥有零因子的代数结构通常都不支持除法.

于是, 无论基于数量积还是向量积, 都无法建立起一个良定义的向量除法. 其根本原因在于, 两种乘法都是多对一的映射, 它们在运算过程中都不可避免地丢失了输入向量的某些信息, 使得逆向求解无法得到唯一的结果. 且向量代数系统, 尤其是向量积, 包含零因子, 这从根本上破坏了除法所依赖的唯一性.

1.1.3 共线定理与平面向量基本定理

上述运算共同构成了向量的线性结构, 要点是共线与线性组合的概念.

1.1.3.1 向量共线定理

向量 $\vec{a}$ ($\vec{a}\neq\vec{0}$) 与向量 $\vec{b}$ 共线的充分必要条件是, 存在**唯**一的实数 λ, 使得

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}\tag{1-2}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 **必要性（由共线 $\Longrightarrow$ 存在 λ）**假设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，且 $\vec{a}\neq\vec{0}$. 若 $\vec{b}=\vec{0}$，取 $\lambda=0$ 即可. 若 $\vec{b}\neq\vec{0}$，且与 $\vec{a}$ 方向相同，则其单位向量相同，$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. 整理得 $\vec{b}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 令 $\lambda=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}>0$. 若与 $\vec{a}$ 方向相反，则单位向量互为相反，$\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. 整理得 $\vec{b}=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 令 $\lambda=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}<0$.

充分性（由存在 λ $\Longrightarrow$ 共线）假设存在实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. 根据向量数乘的定义，向量 $\vec{b}$ 的方向或者与 $\vec{a}$ 相同 ($\lambda>0$)，或者相反 ($\lambda<0$)，或者是零向量 ($\lambda=0$). 任何情况下，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 均共线.

唯一性假设存在 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 使得 $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}$ 且 $\vec{b}=\lambda_2\vec{a}$. 则 $\lambda_1\vec{a}=\lambda_2\vec{a}$，故 $(\lambda_1-\lambda_2)\vec{a}=\vec{0}$. 由于 $\vec{a}\neq\vec{0}$，必有 $\lambda_1-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$. 这与假设矛盾. □

知乎@余命数

例题 1.8　判断命题 p“存在实数 k，使得 $\vec{a}=k\vec{b}$”是命题 q“向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”的什么条件？

解　本题旨在辨析向量共线的代数表示与其几何定义之间的细微差别，其陷阱在于对零向量的考虑.

余命数　知乎@余命数

若存在实数 k 使得 $\vec{a}=k\vec{b}$，根据数乘的几何意义，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 必然共线. 所以，p 是 q 的充分条件.

反之，若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，可取反例. 当 $\vec{b}=\vec{0}$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，根据定义，任何非零向量都与零向量共线，所以此时命题 q 为真. 然而，不存在任何实数 k 能够使得一个非零向量 $\vec{a}$ 等于 $k\vec{0}=\vec{0}$. 即此时命题 p 为假.

由于找到一个 q 为真而 p 为假的情况，所以 q 不能推出 p. p 不是 q 的必要条件. 命题 p 是命题 q 的**充分不必要条件**.

知乎@余命数

此定理将几何上的共线关系，转化为代数上的倍数关系，是进行向量论证和计算的基础.

知乎@余命数

1.1.3.2　平面向量基本定理

当将视野扩展到整个平面，能否用少数几个基本向量的线性运算表示出平面内的所有向量，成为自然的问题.

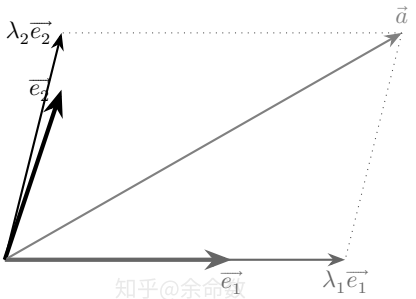
定理 1.3 (平面向量基本定理)　如果 $\overrightarrow{e_1}$ 和 $\overrightarrow{e_2}$ 是同一平面内的两个**不共线**向量，那么对于该平面内的**任意**一个向量 $\vec{a}$，存在**唯**一的一对实数 λ_1,λ_2，使得

$$\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2} \tag{1-3}$$

我们称不共线的向量 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 为表示该平面内所有向量的一组**基底**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 **存在性**: 取诸向量共起点的代表 $\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. 过点 A 作直线平行于 OE_2, 交直线 OE_1 于 A_1; 再过点 A 作直线平行于 OE_1, 交直线 OE_2 于 A_2.



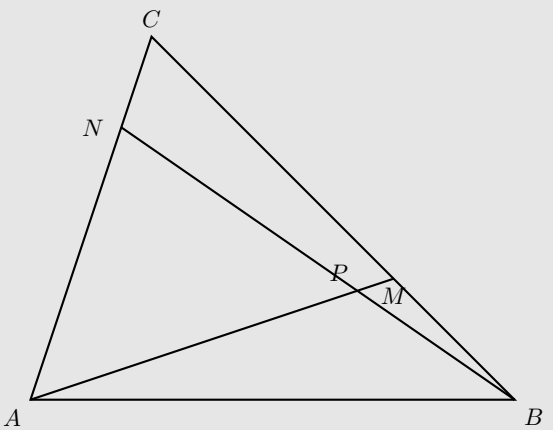
知乎@余命数

由平行四边形法则,$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$. 由于 $\overrightarrow{OA_1}$ 与 $\overrightarrow{e_1}$ 共线,故存在 λ_1 使 $\overrightarrow{OA_1}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}$. 同理存在 λ_2 使 $\overrightarrow{OA_2}=\lambda_2\overrightarrow{e_2}$. 故 $\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$.

唯一性: 假设另有一对实数 (μ_1,μ_2) 满足要求. 则 $\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}=\mu_1\overrightarrow{e_1}+\mu_2\overrightarrow{e_2}$, 整理得 $(\lambda_1-\mu_1)\overrightarrow{e_1}=(\mu_2-\lambda_2)\overrightarrow{e_2}$. 由于 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 不共线, 此等式成立的唯一可能是系数均为零, 即 $\lambda_1=\mu_1$ 且 $\lambda_2=\mu_2$. □

这一定理的重大意义在于, 它为平面内的所有向量建立了一个坐标系. 任何向量都可以在这个坐标系下被唯一地分解.

例题 1.9 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 在边 BC 上, 满足 $BM:MC=1:2$. 点 N 在边 AC 上, 满足 $AN:NC=3:1$. 线段 AM 与 BN 交于点 P. 求 $AP:PM$ 的值.



解 此题是关于共线和交点问题的经典模型, 思路如下: **对于同一个向量, 其在同一组基底下的表示是唯一的.**

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

以点 A 为原点，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 和 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 为基向量. 由于 A,P,M 三点共线，向量 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AM}$ 共线. 因此存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AM}$. 由定比分点公式 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$，代入得 $\overrightarrow{AP}$ 的第一个表达式

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{2\lambda}{3}\vec{b}+\frac{\lambda}{3}\vec{c}\quad\cdots\cdots(1).$$

又 B,P,N 三点共线，向量 $\overrightarrow{BP}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 共线，故存在实数 μ 使 $\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BN}$. 由向量减法 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\mu(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})$，整理得 $\overrightarrow{AP}=(1-\mu)\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AN}$. 已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{4}\vec{c}$，代入得第二个表达式

$$\overrightarrow{AP}=(1-\mu)\vec{b}+\frac{3\mu}{4}\vec{c}\quad\cdots\cdots(2).$$

由平面向量基本定理，$\overrightarrow{AP}$ 在基底 $\{\vec{b},\vec{c}\}$ 下的表示唯一，故 (1) 与 (2) 中 $\vec{b},\vec{c}$ 的系数分别相等，

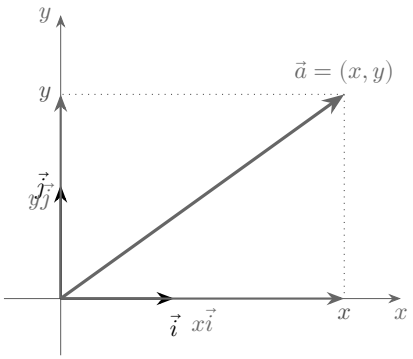
$$\begin{cases}\frac{2\lambda}{3}=1-\mu\\ \frac{\lambda}{3}=\frac{3\mu}{4}\end{cases}$$

这是一个关于 λ,μ 的二元一次方程组. 解得 $\lambda=\frac{9}{10}$.

$\overrightarrow{AP}=\frac{9}{10}\overrightarrow{AM}$ 意味着 $AP=\frac{9}{10}AM$. 因此 $PM=\frac{1}{10}AM$，故 $AP:PM=9:1$.

1.1.4 向量的坐标表示

为了计算的方便，通常选一组最特殊基底. 在直角坐标系中，分别与 x 轴和 y 轴正方向相同，且长度为 1 的单位向量，记作 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$.



根据平面向量基本定理，任何向量 $\vec{a}$ 都可以唯一地表示为 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$. 我们便将这对唯一的实数 (x,y) 称为向量 $\vec{a}$ 的**坐标**，记作

$$\vec{a}=(x,y)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

向量的运算也就相应地转化为其坐标的运算.

向量的坐标运算

设 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$, 则

- **加法** $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
- **减法** $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
- **数乘** $k\vec{a}=(kx_1,ky_1)$
- **模** $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

证明 这些运算规则把向量代数与解析几何联系起来. 其证明的基础在于平面向量基本定理, 即任何一个向量都可以唯一地表示为一组基向量的线性组合. 在所选取的标准笛卡尔坐标系中, 这组基底是相互正交的单位向量 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$ 和 $\vec{b}=(x_2,y_2)$. 根据坐标的定义, 这等价于

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\quad\text{以及}\quad\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$$

从向量加法的抽象定义出发, 利用向量运算的代数性质推导.

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})\\&=(x_1\vec{i}+x_2\vec{i})+(y_1\vec{j}+y_2\vec{j})&&\text{(向量加法的交换律与结合律)}\\&=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}&&\text{(标量乘法对加法的分配律)}\end{aligned}$$

根据平面向量基本定理的唯一性, 向量和 $\vec{a}+\vec{b}$ 在基底 $\{\vec{i},\vec{j}\}$ 下的坐标是唯一的, 即 (x_1+x_2,y_1+y_2).

同理, 向量减法可以看作是加上一个相反向量.

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})-(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})\\&=(x_1\vec{i}-x_2\vec{i})+(y_1\vec{j}-y_2\vec{j})\\&=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}\end{aligned}$$

因此, 差向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 的坐标为 (x_1-x_2,y_1-y_2).

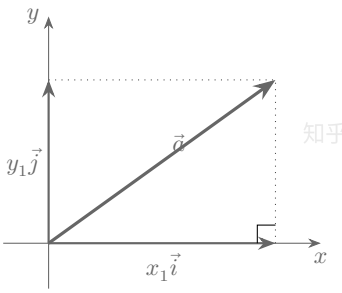
设 $k\in\mathbb{R}$ 为一个标量.

$$\begin{aligned}k\vec{a}&=k(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\\&=k(x_1\vec{i})+k(y_1\vec{j})&&\text{(标量乘法对向量加法的分配律)}\\&=(kx_1)\vec{i}+(ky_1)\vec{j}&&\text{(标量乘法的结合律)}\end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因此, 向量 $k\vec{a}$ 的坐标为 (kx_1, ky_1).

向量 $\vec{a}$ 的模是其几何长度. 向量 $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ 可以看作是两个向量 $x_1\vec{i}$ 和 $y_1\vec{j}$ 的和. 向量 $x_1\vec{i}$ 位于 x 轴上, 其长度为 $|x_1\vec{i}| = |x_1||\vec{i}| = |x_1|$. 向量 $y_1\vec{j}$ 位于 y 轴上, 其长度为 $|y_1\vec{j}| = |y_1||\vec{j}| = |y_1|$. 由于基向量 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 相互垂直, 这两个分量向量也相互垂直.



根据向量加法的平行四边形法则(在此处退化为矩形), 向量 $\vec{a}$ 是以 $x_1\vec{i}$ 和 $y_1\vec{j}$ 为邻边的矩形的对角线. 根据勾股定理, 该对角线的长度, 即 $\vec{a}$ 的模为:

$$|\vec{a}|^2 = |x_1\vec{i}|^2 + |y_1\vec{j}|^2 = x_1^2 + y_1^2$$

因此, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. □

一个基本的结论是, 如果两点坐标为 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$, 那么由 A 指向 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

即"**终点坐标减去起点坐标**".

例题 1.10　已知点 $A(-1, 2), B(2, 1), C(3, 4)$, 求向量 $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ 的坐标及其模.

解　首先, 根据终点减起点法则求出基准向量的坐标.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), 1 - 2) = (3, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (3 - 2, 4 - 1) = (1, 3)$$

接下来, 进行向量的线性运算.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = 2(3, -1) - (1, 3)\\ &= (6, -2) - (1, 3) = (5, -5)\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

最后, 求出向量 $\vec{u}$ 的模.

$$|\vec{u}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

例题 1.11 平面内向量 $\overrightarrow{OA} = (1,7), \overrightarrow{OB} = (5,1), \overrightarrow{OP} = (2,1)$. 点 X 为直线 OP 上的一个动点.

(1) 当 $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ 取最小值时, 求 $\overrightarrow{OX}$ 的坐标;

(2) 当点 X 满足 (1) 的条件和结论时, 求 $\cos\angle AXB$ 的值.

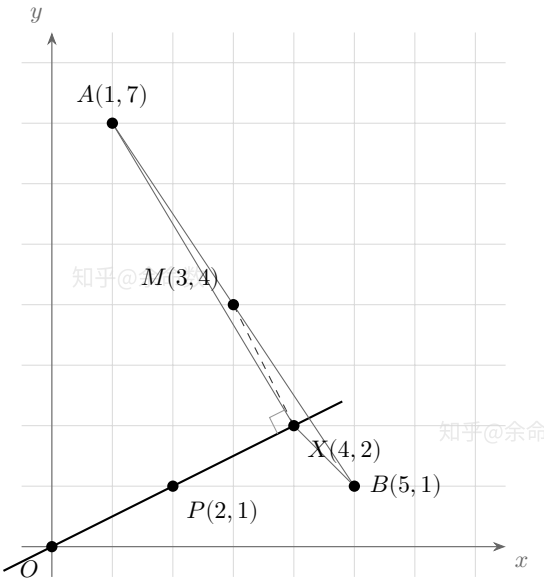


图 1.9 向量关系几何示意图

解 (1) 先对目标数量积 $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ 进行几何转化. 引入线段 AB 的中点 M. 则 $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}$, 且 $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}$. 由于 M 是中点, $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}$. 代入数量积表达式:

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = (\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{MA}) = |\overrightarrow{XM}|^2 - |\overrightarrow{MA}|^2$$

注意到, 点 A, B 是定点, 故中点 M 和线段长 $|\overrightarrow{MA}|$ 均为定值. 因此, 欲使 $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ 取得最小值, 等价于使 $|\overrightarrow{XM}|^2$ 取得最小值, 这也等价于使点 X 到定点 M 的距离 $|\overrightarrow{XM}|$ 最小.

点 X 是直线 OP 上的动点, 故此问题转化为寻找直线上一点 X, 使其到直线外一点 M 的距离最短. 根据平面几何的基本定理, 这个最短距离在 X 为 M 在直线 OP 上的正交投影点时取得. 此时, 向量 $\overrightarrow{MX}$ 必须与直线 OP 的方向向量 $\overrightarrow{OP}$ 垂直.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

首先, 计算中点 M 的坐标, 得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}((1,7) + (5,1)) = \frac{1}{2}(6,8) = (3,4)$$

由于点 X 在直线 OP 上, 存在唯一的实数 t, 使得 $\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OP} = t(2,1) = (2t,t)$. 向量 $\overrightarrow{MX}$ 可以表示为:

知乎@余命数

$$\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM} = (2t,t) - (3,4) = (2t-3, t-4)$$

知乎@余命数

施加垂直条件 $\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$:

$$(2t-3, t-4) \cdot (2,1) = 0$$

$$2(2t-3) + 1(t-4) = 0 \implies 4t - 6 + t - 4 = 0 \implies 5t = 10 \implies t = 2$$

当 $t = 2$ 时, $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ 取得最小值. 此时, $\overrightarrow{OX}$ 的坐标为:

知乎@余命数

$$\overrightarrow{OX} = 2\overrightarrow{OP} = 2(2,1) = (4,2)$$

知乎@余命数

(2) 根据 (1) 的结论, 取点 X 的坐标为 $(4,2)$. 任务是计算 $\cos\angle AXB$. 根据数量积的夹角公式:

$$\cos\angle AXB = \frac{\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}}{|\overrightarrow{XA}||\overrightarrow{XB}|}$$

知乎@余命数

先计算分子和分母所需的各个向量与模长.

知乎@余命数

$$\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX} = (1,7) - (4,2) = (-3,5)$$

$$\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OX} = (5,1) - (4,2) = (1,-1)$$

接着计算数量积, 得

$$\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = (-3)(1) + (5)(-1) = -3 - 5 = -8$$

计算模长, 得

$$|\overrightarrow{XA}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$|\overrightarrow{XB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

最后, 将这些值代入夹角公式:

$$\cos\angle AXB = \frac{-8}{\sqrt{34}\sqrt{2}} = \frac{-8}{\sqrt{68}} = \frac{-8}{2\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

知乎@余命数

1.1.5 平面向量的数量积

已定义向量的加、减、数乘运算, 其结果仍然是向量. 接下来要考虑两个向量能否相乘, 若能, 乘积是向量还是标量. 物理学给出基本启示. 当一个力 F 作用于一个物体, 使其产生位移 s 时, 力所做的功 W 是一个标量, 其大小同时取决于力的大小、位移的大小及它们之间的夹角. 具体地, $W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$. 这个例子启发我们定义一种新的向量乘法, 其结果是一个标量, 故称其为**数量积**, 又因其符号形如点, 也称为**点积**.

知乎@余命数

1.1.5.1 数量积的定义与几何意义

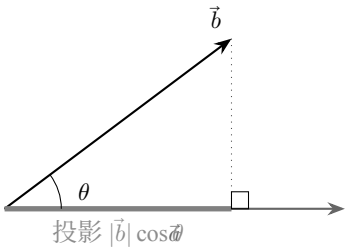
定义 1.6 (数量积) 已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 它们的夹角为 θ. 我们定义它们的数量积为一个**标量**.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \tag{1-4}$$

如果其中一个向量为零向量, 则数量积为 0.

知乎@余命数

数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的几何意义是, 向量 $\vec{a}$ 的模 $|\vec{a}|$ 与向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的**投影** $|\vec{b}|\cos\theta$ 的乘积.



知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

1.1.5.2 数量积的性质与坐标表示

- $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 或 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$(交换律).
- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$(分配律).

注 1.1 (垂直的判定)
判断两个非零向量是否垂直, 是数量积最重要的应用之一.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\theta=90^\circ\iff\cos\theta=0\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

知乎@余命数

设基向量 $\vec{i}=(1,0),\vec{j}=(0,1)$. 显然 $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1,\vec{i}\cdot\vec{j}=0$. 对于 $\vec{a}=(x_1,y_1)=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ 和 $\vec{b}=(x_2,y_2)=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$, 有

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})\\&=x_1x_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+x_1y_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+y_1x_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+y_1y_2(\vec{j}\cdot\vec{j})\\&=x_1x_2(1)+x_1y_2(0)+y_1x_2(0)+y_1y_2(1)\\&=x_1x_2+y_1y_2\end{aligned}$$

知乎@余命数

得数量积的坐标计算公式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2 \tag{1-5}$$

由此, 可推导出坐标形式下的模长和夹角公式.

- **模长** $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$
- **夹角** $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

知乎@余命数

例题 1.12　已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=3$, 且它们的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$. 求向量差 $\vec{a}-2\vec{b}$ 的模 $|\vec{a}-2\vec{b}|$.

知乎@余命数

解　处理向量模的问题, 一个有力的代数工具是利用公式 $|\vec{v}|^2=\vec{v}\cdot\vec{v}$. 将此方法应用于向量 $\vec{a}-2\vec{b}$:

$$\begin{aligned}|\vec{a}-2\vec{b}|^2&=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot(2\vec{b})-(2\vec{b})\cdot\vec{a}+(2\vec{b})\cdot(2\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})-2(\vec{b}\cdot\vec{a})+4(\vec{b}\cdot\vec{b})\\&=|\vec{a}|^2-4(\vec{a}\cdot\vec{b})+4|\vec{b}|^2.\end{aligned}$$

知乎@余命数

代入已知值 $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-3$,

$$\begin{aligned}|\vec{a}-2\vec{b}|^2&=(2)^2-4(-3)+4(3)^2\\&=4+12+4(9)=52,\end{aligned}$$

故所求模为 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

1.1.6 走路法

向量加法的三角形法则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 是向量代数中最基本的运算之一, 它在几何上直观地表现为一个连续的位移过程. 这种首尾相接、连接始末的构造, 我

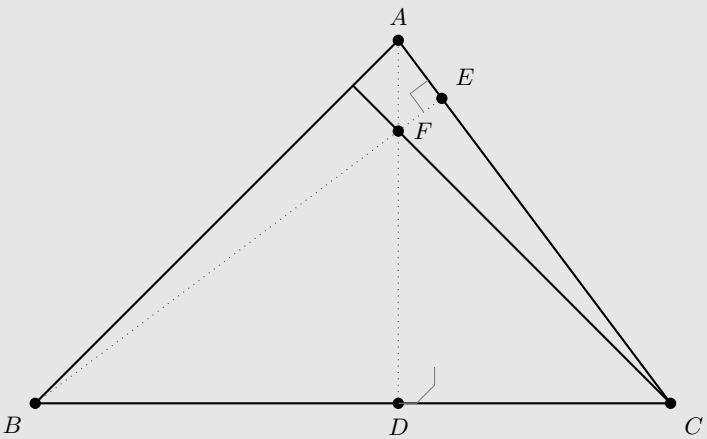
知乎@余命数

们称之为**走路法**. 它的基本意义在于, 它为将复杂的几何路径问题转化为一系列有序的代数运算提供了最直接的途径. 任何一个从点 P_1 到点 P_n 的路径, 无论多么曲折, 都可以被分解为向量之和 $\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}=\overrightarrow{P_1P_n}$.

这种方法的优势在于其系统性与普适性. 它将对图形空间位置关系的直观依赖, 转化为对向量代数法则的严格运用. 相较于综合几何学中常常需要依赖辅助线构造和灵感的解题模式, 向量走路法提供了一种更为程序化的路径, 建立向量关系, 进行代数演算, 直至获得最终的几何结论. 诚然, 任何有效的方法都包含其独特的技巧, 例如参考点的巧妙选取, 其优势在于, 它用极少的公理和运算规则, 便能构建起解决大量几何问题的统一框架.

知乎@余命数

例题 1.13 在 $\triangle ABC$ 中, 高线 AD 与 BE 相交于点 F. 求证: $CF\perp AB$.



解 三角形两条高线交于 F, 需证第三条也过 F, 即垂心. 将垂直关系代数化: $\vec{u}\perp\vec{v}$ 当且仅当 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

取两条已知高线的交点 F 为原点, 记顶点 A,B,C 的位置向量为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. 高线 AD 过原点, 故 $\vec{a}$ 与 AD 共线, $AD\perp BC$ 等价于 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. 由走路法 $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, 得

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0.$$

同理, $BE\perp AC$ 给出

$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0.$$

欲证 $CF\perp AB$, 即 $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$.

展开前两式: $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{a}$. 由数量积交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, 得

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是

$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0,$$

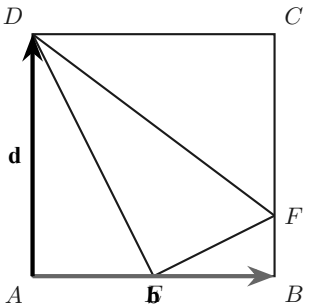
故 $CF\perp AB$. 证明全程只用数量积代数, 未建坐标, 也未添辅助线.

例题 1.14　如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是 AB 中点, $3BF=FC$, 求证: $DE\perp EF$.

证明　此题涉及中点与定比分点, 这类条件在向量代数中具有简洁的表述, 并且正方形的垂直与等长边为向量运算提供了简洁的代数性质. 因此, 采用走路法证明.

走路法的要点在于, 选取一个合适的基点为原点, 并以从该点出发的向量为基本元素来表示图中的其他所有向量, 从而将几何问题转化为代数问题. 以点 A 为原点, 令基向量为 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$ 和 $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$.

知乎@余命数



由于 $ABCD$ 是正方形, 这两个基向量的长度相等, 且相互垂直. 这一几何性质反映在代数上, 即

$$|\mathbf{b}|=|\mathbf{d}|,\quad \text{且}\quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}=0.$$

接着, 用基向量表示图中相关点的向量. 这好比从原点 A 走到目标点. 点 D 的位置向量即为 $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$. 点 E 是 AB 的中点, 故其位置向量为 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$. 点 F 在边 BC 上, 由 $3BF=FC$ 知, F 是 BC 的一个四等分点, 且 $BF=\frac{1}{4}BC$. 注意到 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$. 于是, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\mathbf{d}$. 从 A 到 F 的路径可以分解为先到 B 再到 F, 故

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\mathbf{b}+\frac{1}{4}\mathbf{d}.$$

现在构造待证垂直的两个线段所对应的向量 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{d},$$
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\mathbf{b}+\frac{1}{4}\mathbf{d}\right)-\frac{1}{2}\mathbf{b}=\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{4}\mathbf{d}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为了证明 $DE \perp EF$, 只需验证其方向向量的数量积为零. 计算数量积, 得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EF} &= \left(\frac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{d}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{4}\mathbf{d}\right)\\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})+\frac{1}{8}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-\frac{1}{2}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})-\frac{1}{4}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d})\\ &= \frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2+\frac{1}{8}(0)-\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{4}|\mathbf{d}|^2.\end{aligned}$$

利用 $|\mathbf{b}|^2=|\mathbf{d}|^2$ 这一性质, 上式的结果为

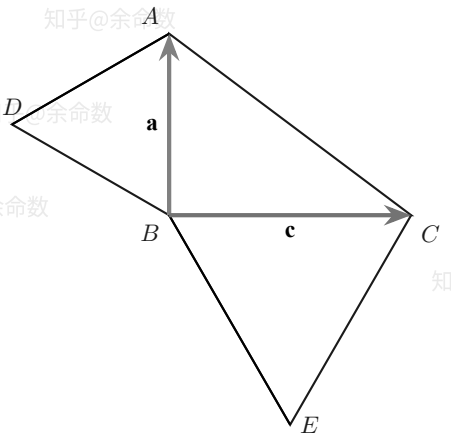
$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2-\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2=0.$$

数量积为零, 故向量 $\overrightarrow{DE}$ 与 $\overrightarrow{EF}$ 相互正交, 故线段 DE 与 EF 垂直. □

例题 1.15 如图, 以 $\triangle ABC$ 的 AB 和 BC 边分别向外作等边 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$, 且 $AB \perp BC$. 求证: $BE \perp AD$.

证明 此题的条件涉及在三角形边上构建新的几何图形, 且包含旋转与垂直关系, 这正是向量法展现其优势的领域. 向量的代数运算能简洁地处理旋转与投影.

要点在于选择合适的原点与基向量. 点 B 是两个等边三角形的公共顶点, 且是垂直关系 $AB \perp BC$ 的交点, 因此以点 B 为原点进行向量分析最为便捷. 令基向量为 $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$.



根据题设, $AB \perp BC$, 即基向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 相互垂直. 其代数体现为它们的数量积为零:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=0.$$

欲证 $BE \perp AD$, 这等价于证明 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. 为此, 需用基向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}$ 表示出 $\overrightarrow{BE}$ 和 $\overrightarrow{AD}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

向量 $\overrightarrow{BE}$ 是由向量 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$ 绕点 B 向外顺时针旋转 60° 得到的. 向量 $\overrightarrow{BD}$ 是由向量 $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}$ 绕点 B 向外(逆时针)旋转 60° 得到的. 接着, 表示目标向量: 向量 $\overrightarrow{BE}$ 已由上述旋转定义. 向量 $\overrightarrow{AD}$ 可以通过走路得到, 从 A 到 D 等价于从 A 先回到 B, 再从 B 走到 D. 故

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=-\mathbf{a}+\overrightarrow{BD}.$$

现在, 计算数量积 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{BE}\cdot(-\mathbf{a}+\overrightarrow{BD})\\&=\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BE}\cdot\mathbf{a}.\end{aligned}$$

知乎@余命数

利用数量积的几何定义 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta$ 来计算右侧的两项. 对于 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}$: $|\overrightarrow{BE}|=|\overrightarrow{BC}|=|\mathbf{c}|$, 且 $|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{BA}|=|\mathbf{a}|$. 向量 $\overrightarrow{BD}$ 由 $\mathbf{a}$ 逆时针旋转 60° 得到, 向量 $\overrightarrow{BE}$ 由 $\mathbf{c}$ 顺时针旋转 60° 得到. 由于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为 90°, 那么 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{BE}$ 之间的夹角为 $60^\circ+90^\circ+60^\circ=210^\circ$. 不过, 在计算数量积时, 通常取不超过 180° 的夹角, 即 $360^\circ-210^\circ=150^\circ$. 因此

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{BD}|\cos(150^\circ)=|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\cos(150^\circ).$$

知乎@余命数

对于 $\overrightarrow{BE}\cdot\mathbf{a}$: $|\overrightarrow{BE}|=|\mathbf{c}|$, $|\mathbf{a}|$ 为已知. 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c}$ 的夹角为 90°. 向量 $\overrightarrow{BE}$ 由 $\mathbf{c}$ 顺时针旋转 60° 得到, 因此 $\overrightarrow{BE}$ 与 $\mathbf{a}$ 的夹角为 $90^\circ+60^\circ=150^\circ$. 所以

$$\overrightarrow{BE}\cdot\mathbf{a}=|\overrightarrow{BE}||\mathbf{a}|\cos(150^\circ)=|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\cos(150^\circ).$$

将以上两式代入数量积的表达式中, 得

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}=|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\cos(150^\circ)-|\mathbf{c}||\mathbf{a}|\cos(150^\circ)=0.$$

知乎@余命数

数量积为零, 结论得以证明. 故 $BE\perp AD$. □

前面两个范例展示了平面几何问题的一种代数化处理, 即向量法, 或称走路法. 它把几何图形的性质与关系, 转化为向量空间的代数运算.

向量法先要**建立分析的框架**. 这包括:

- **选取基点**: 在图形中选定一个合适的点为原点. 通常, 这个点是图形的特殊点, 例如顶点, 中点, 或是多条重要线段的交点. 一个好的基点可以大幅简化后续的向量表示.
- **定义基向量**: 从基点出发, 选取一至两个线性无关的向量为基向量. 在平面问题中, 通常是两个不共线的向量. 在正方形或矩形中, 沿两条邻边方向的向量是自然的选择; 在一般三角形中, 沿两条边的向量亦是如此.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这个框架一旦建立, 图形中的任何一个点的位置, 都可以由从基点出发的一个唯一的位置向量来描述; 任何一个有向线段, 都可以表示为基向量的线性组合.

框架建立之后, 就要**翻译几何条件**. 将题设中所有的几何关系, 如长度、中点、定比分点、平行、垂直等, 转化为向量的代数语言. 这一步决定整个解法能否走通.

- 长度关系与角度关系, 通常与向量的模和数量积相关. 例如, $AB \perp BC$ 意味着 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
- 点 M 是线段 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
- 点 P 在直线 AB 上, 且 $AP : PB = \lambda : \mu$, 则 $\overrightarrow{OP} = \frac{\mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{\lambda + \mu}$.

通过这种方式, 整个几何问题被翻译成了一个关于基向量的代数问题.

接着, **构造并计算目标向量**. 将待证的几何关系, 例如 $DE \perp EF$ 同样用向量语言表达出来, 即 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$. 然后, 利用向量的加减法法则, 即走路法则, 如 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$ 将这些目标向量用基向量表示出来.

最后, 只需通过纯粹的**代数运算**, 结合基向量自身的性质, 例如它们的模长关系和数量积, 对目标表达式化简并验证是否符合要证明的即可.

1.1.7 极化恒等式

在向量的代数体系中, 数量积是极为重要的运算, 它将向量的几何关系, 如夹角与代数运算联系起来. 数量积的几何定义 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cos\theta$ 依赖于夹角 θ. 但在许多几何问题中, 角度是未知的, 我们更易获知的是线段的长度, 即向量的模.

自然要问, 数量积能否仅由模长表达. 极化恒等式给出肯定回答, 它在数量积与向量模长之间建立起直接的联系.

考虑向量和的模长平方 $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2$. 根据模的定义, 它等于向量自身的数量积:

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

利用数量积的分配律展开上式, 得

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

注意到 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2$ 且数量积满足交换律 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, 上式可化为

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

移项整理, 得数量积的一种表达形式. 这个思想可以推广并总结为如下的命题.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 1.4 (极化恒等式) 对于任意两个向量 $\mathbf{u},\mathbf{v}$, 其数量积可以通过向量的模长表示:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}\left(||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2-||\mathbf{u}||^2-||\mathbf{v}||^2\right)$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{4}\left(||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2-||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2\right)$$

证明 第一种形式由展开 $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2$ 得出.

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2=(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=||\mathbf{u}||^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+||\mathbf{v}||^2.$$

移项并除以 2, 得

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}\left(||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2-||\mathbf{u}||^2-||\mathbf{v}||^2\right).$$

第二种形式更具对称性, 其推导过程也颇具启发性. 已有

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2=||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2+2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\quad(1)$$

同理, 计算 $||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2$:

$$\begin{aligned}||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2&=(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\&=||\mathbf{u}||^2-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+||\mathbf{v}||^2\quad(2)\end{aligned}$$

将 (1) 式与 (2) 式相减, 即可消去模长平方项, 得到

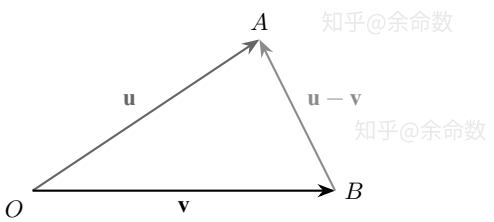
$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2-||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2=4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

整理后即得恒等式的第二种形式. □

此恒等式具有基本的几何意义. 我们重写式 (2) 可得

$$||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2=||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$$

若以 $\mathbf{u}=\overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{v}=\overrightarrow{OB}$ 为邻边构成三角形, 则第三边即为向量 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$.



知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 θ 为 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的夹角, 代入数量积的几何定义 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos\theta$, 上式即变为

$$||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2=||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2-2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos\theta$$

这正是三角形中的余弦定理. 因此, **极化恒等式可以被视为余弦定理的向量形式**, 它将几何中的长度与角度关系融入了向量代数的框架之中. 当一个问题只涉及边长而不涉及角度时, 此恒等式是计算数量积, 进而判断垂直关系的不二之选.

知乎@余命数

例题 1.16 设有两个向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$, 满足 $||\mathbf{a}+\mathbf{b}||=\sqrt{10}$ 及 $||\mathbf{a}-\mathbf{b}||=\sqrt{6}$, 求数量积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的值.

解 此问题直接给出了向量和与差的模长, 而要求它们的数量积, 这正是极化恒等式应用的典型情景. 采用极化恒等式的第二种形式:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{4}\left(||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2-||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^2\right)$$

将题设中的已知值代入上式, 得

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{4}\left((\sqrt{10})^2-(\sqrt{6})^2\right)$$

进行简单的代数计算, 得

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{4}(10-6)=\frac{1}{4}(4)=1.$$

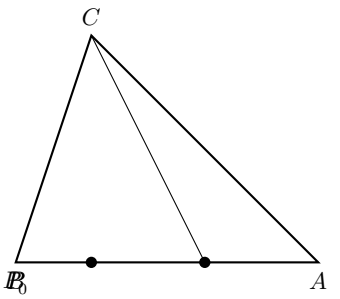
因此, 这两个向量的数量积为 1.

例题 1.17 设 $\triangle ABC$, P_0 是边 AB 上一定点, 满足 $P_0B=\frac{1}{4}AB$. 若对于边 AB 上任意一点 P, 恒有不等式 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geq\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$ 成立, 试确定 $\triangle ABC$ 必须满足的几何条件.

解 该命题的条件是一个关于动点 P 的向量不等式. 要点是表达式 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 在点 $P=P_0$ 处取得最小值. 这种涉及最值的问题, 提示可将该表达式构造成一个函数, 并利用函数的性质来求解.

以点 B 为基点, 设 $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}$ 和 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

点 P 在线段 AB 上，它的位置可以用参数 λ 描述. 令 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BA} = \lambda\mathbf{a}$，其中 $\lambda \in [0,1]$. 于是, 向量 $\overrightarrow{PB}$ 和 $\overrightarrow{PC}$ 可以用基向量表示:

$$\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{BP} = -\lambda\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BP} = \mathbf{c} - \lambda\mathbf{a}.$$

接着, 计算它们的数量积, 得

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} &= (-\lambda\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\lambda\mathbf{a}) \\ &= -\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) + \lambda^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) \\ &= ||\mathbf{a}||^2\lambda^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\lambda. \end{aligned}$$

这是一个关于变量 λ 的二次函数，其二次项系数 $||\mathbf{a}||^2$ 为正，故其图像是开口向上的抛物线，存在唯一的最小值. 根据二次函数的性质，其对称轴位置在 $\lambda = -\frac{-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})}{2||\mathbf{a}||^2} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{2||\mathbf{a}||^2}$. 此即函数 $f(\lambda)$ 取最小值的点.

根据题设,最小值在 $P = P_0$ 处取得. 需确定 P_0 对应的参数 λ_0. 由 $P_0B = \frac{1}{4}AB$ 可知, $||\overrightarrow{BP_0}|| = \frac{1}{4}||\overrightarrow{BA}||$. 由于 P_0 在 A, B 之间, 故 $\overrightarrow{BP_0}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 同向, 所以 $\overrightarrow{BP_0} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\mathbf{a}$. 因此, $\lambda_0 = \frac{1}{4}$.

令函数取得最小值的 λ 等于 λ_0:

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{2||\mathbf{a}||^2} = \frac{1}{4}.$$

由此得一个关于基向量的代数关系:

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = ||\mathbf{a}||^2.$$

最后一步, 需将这个代数关系翻译回几何语言. 考察三角形的边长关系. $||\overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}||^2 = ||\mathbf{c}-\mathbf{a}||^2$. 利用推导极化恒等式时的展开方式, 有

$$||\mathbf{c}-\mathbf{a}||^2 = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = ||\mathbf{c}||^2 - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) + ||\mathbf{a}||^2.$$

知乎@余命数

将已得的条件 $2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=||\mathbf{a}||^2$ 代入上式, 得

$$||\overrightarrow{AC}||^2=||\mathbf{c}||^2-||\mathbf{a}||^2+||\mathbf{a}||^2=||\mathbf{c}||^2.$$

故 $||\overrightarrow{AC}||=||\mathbf{c}||=||\overrightarrow{BC}||$. 因此, $\triangle ABC$ 必须满足的几何条件是 $AC=BC$, 即它是一个以 C 为顶角的等腰三角形. 反过来, 若 $AC=BC$, 则上述等价变形给出 $2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=||\mathbf{a}||^2$, 从而二次函数的对称轴正是 $\lambda=\frac{1}{4}$, 不等式也确实对边 AB 上任意点 P 成立.

例题 1.18 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E,F 是 AD 上的两个三等分点, 且沿 A 到 D 的方向依次为 E,F. 已知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4,\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$, 求 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值.

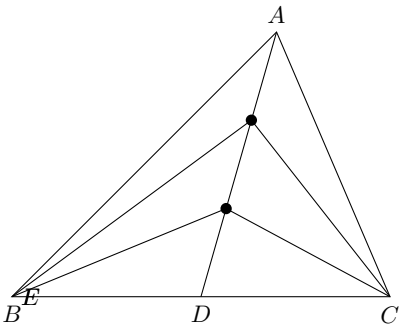
解 此题的条件与结论均涉及以不同顶点为起点的向量数量积. 这种结构提示寻找一个统一的代数形式. 注意到所有数量积都涉及线段 BC 的两个端点 B 和 C, 这启发将 BC 的中点 D 作为参照点.

考察形如 $\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{PY}$ 的数量积, 当一个参照点 M 存在时, 可进行分解. 对于 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$, 将向量起点统一到中点 D. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}\,\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$ 由于 D 是 BC 的中点, $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}$. 代入上式, 得 $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ 于是, 数量积可以展开为:

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})=||\overrightarrow{DA}||^2-||\overrightarrow{DB}||^2=AD^2-BD^2.$$

这实际上是极化恒等式思想的一个直接应用, 它将数量积与中线长和半弦长联系起来. 根据题设, 有

$$AD^2-BD^2=4\quad(1)$$



完全同理, 对于点 F 和 E, 可得到相同的代数结构:

$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=DF^2-BD^2$$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=DE^2-BD^2$$

知乎@余命数

根据题设 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$, 有

$$DF^2-BD^2=-1 \quad (2)$$

现在问题转化为一个关于长度的代数问题. 由题设约定, F 是靠近 D 的分点, 则 $DF=\frac{1}{3}AD$, 且 $DE=\frac{2}{3}AD$. 将 $DF=\frac{1}{3}AD$ 代入 (2) 式, 得

$$\left(\frac{1}{3}AD\right)^2-BD^2=-1 \implies \frac{1}{9}AD^2-BD^2=-1 \quad (3)$$

知乎@余命数

现有关于 AD^2 和 BD^2 的二元一次方程组, 由 (1) 和 (3) 构成:

$$AD^2-BD^2=4$$
$$\frac{1}{9}AD^2-BD^2=-1$$

两式相减, 消去 BD^2:

$$\left(1-\frac{1}{9}\right)AD^2=4-(-1) \implies \frac{8}{9}AD^2=5 \implies AD^2=\frac{45}{8}.$$

知乎@余命数

将 AD^2 的值代回 (1) 式:

$$BD^2=AD^2-4=\frac{45}{8}-4=\frac{45-32}{8}=\frac{13}{8}.$$

知乎@余命数

现计算 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=DE^2-BD^2$. 利用 $DE=\frac{2}{3}AD$, 有 $DE^2=\frac{4}{9}AD^2$. 代入已求出的值:

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{4}{9}AD^2-BD^2=\frac{4}{9}\left(\frac{45}{8}\right)-\frac{13}{8}=\frac{5}{2}-\frac{13}{8}=\frac{20-13}{8}=\frac{7}{8}.$$

知乎@余命数

故所求值为 $\frac{7}{8}$.

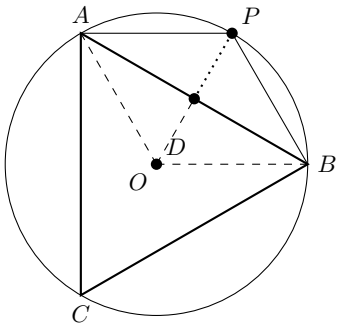
例题 1.19 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于半径为 2 的 $\odot O$, 点 P 是 $\odot O$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是?

解 这个问题的要点是处理一个动点相关的数量积. 动点 P 的轨迹是圆, 其几何特征是到圆心 O 的距离恒定. 下一步是将数量积 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 与点 P 的位置建立联系.

同样地, 极化恒等式的思想启示引入 AB 的中点. 设 D 为 AB 的中点. 将 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 用过 D 的路径来表示: $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}$ $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB}$ 由于 D 是 AB 的中点, $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{DA}$. 代入得 $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{DA}$ 计算数量积, 得

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{DA})=||\overrightarrow{PD}||^2-||\overrightarrow{DA}||^2=PD^2-AD^2.$$

知乎@余命数



通过这个变换, 数量积的范围问题转化为了几何长度 PD 的范围问题. 问题分解为两个子任务, 计算定长 AD, 以及确定动长 PD 的范围.

首先, 计算 AD.$\triangle ABC$ 是内接于 $\odot O$ 的等边三角形, 半径 $r = OP = OA = OB = 2$. 在 $\triangle OAB$ 中, $OA = OB = 2$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.$D$ 是 AB 的中点, 因此 $OD \perp AB$. 在 Rt$\triangle ODA$ 中, $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB = 60^\circ$. 于是 $AD = OA\sin(60^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. 因此, 常数项 $AD^2 = 3$.

接着, 确定 PD 的范围.P 是圆周上的动点, D 是圆内一定点.P 到 D 的距离范围取决于 D 到圆心 O 的距离. 在 Rt$\triangle ODA$ 中, $OD = OA\cos(60^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. 点 P 在半径为 2 的圆上, 点 D 与圆心 O 的距离为 1. 根据几何知识, PD 的最大值发生在 P, O, D 三点共线且 O 在 P, D 之间时:

$$PD_{\max} = PO + OD = r + OD = 2 + 1 = 3.$$

PD 的最小值发生在 P, O, D 三点共线且 D 在 P, O 之间时:

$$PD_{\min} = PO - OD = r - OD = 2 - 1 = 1.$$

所以, PD 的取值范围是 $[1, 3]$. 从而, PD^2 的取值范围是 $[1^2, 3^2] = [1, 9]$.

最后, 回到原表达式:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PD^2 - AD^2 = PD^2 - 3.$$

由于 $PD^2 \in [1, 9]$, 那么

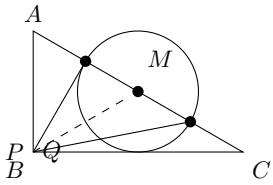
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [1 - 3, 9 - 3] = [-2, 6].$$

因此, 所求的取值范围是 $[-2, 6]$.

例题 1.20 如图, Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$、$AB = 2$、$BC = 2\sqrt{3}$.M 是线段 AC 上一动点, 若以 M 为圆心, 半径为 1 的圆与线段 AC 交于 P, Q 两点, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 的最小值为(　)

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 此题要求一个数量积的最小值, 其中涉及的向量起点固定, 终点则由一个移动的圆心确定. 这看似复杂, 但其结构恰好契合了极化恒等式的思想.



注意到点 M 是圆心, 而 P, Q 是圆与直径 AC 的交点, 故 M 必然是线段 PQ 的中点. 根据极化恒等式的思想, 可将 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 以中点 M 分解:

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}$$

$$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MQ}$$

由于 M 是 PQ 中点, $\overrightarrow{MQ}=-\overrightarrow{MP}$. 于是

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{MP})=||\overrightarrow{BM}||^2-||\overrightarrow{MP}||^2.$$

$||\overrightarrow{MP}||$ 是圆的半径, 题设为 1, 故 $||\overrightarrow{MP}||^2=1$. 表达式化为:

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=||\overrightarrow{BM}||^2-1.$$

欲求 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 的最小值, 只需寻求 $||\overrightarrow{BM}||^2$ 的最小值. 这等价于寻找动点 M 在线段 AC 上运动时, 点 B 到 M 的最短距离. 几何直观表明, 点到线段的最短距离是该点到直线距离(垂线段长). 令 h_B 为 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AC 上的高. 斜边 AC 的长度由勾股定理给出: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$. 根据三角形面积公式, $\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}AC\cdot h_B$.

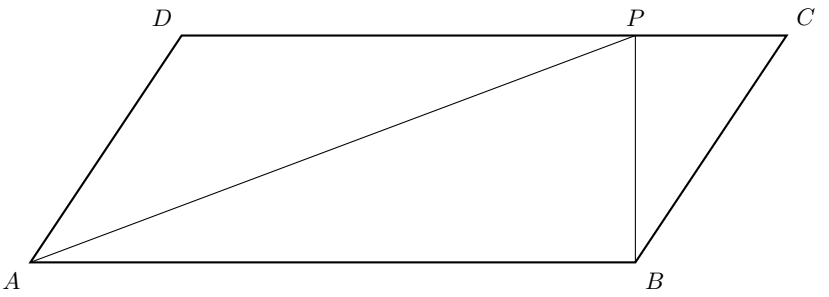
$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h_B\implies h_B=\sqrt{3}.$$

此垂足 H 位于线段 AC 上, 且 $AH=\frac{AB^2}{AC}=1$, 因而当 $M=H$ 时, 以 M 为圆心、半径为 1 的圆与线段 AC 仍有两个交点, 符合题设限制. 此即 $||\overrightarrow{BM}||$ 的最小值. 于是 $||\overrightarrow{BM}||^2$ 的最小值为 $(\sqrt{3})^2=3$. 因此, $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}$ 的最小值为 $3-1=2$.

例题 1.21 在平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AB=8, AD=5$. 点 P 在边 CD 上, 满足 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$, 且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$. 求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值.

解 此题在一个平行四边形中给出了边长与一个数量积的特定值, 要求另一个数量积. 这是典型的借助向量代数运算建立联系的问题. 以点 A 为基点, 令基向量为 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

现利用已知条件 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$ 来构造一个包含目标 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的方程. 首先, 用基向量表示 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{BP}$. 点 P 在 CD 上, 可沿路径 $A\to D\to P$ 表示 $\overrightarrow{AP}$.

知乎@余命数

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}.$$

由 $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$ 可知 P 是 CD 的四等分点, 且 $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$. 在平行四边形中, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. 故 $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. 所以, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

接着表示 $\overrightarrow{BP}$. 路径可以是 $B\to A\to P$.

余命数
知乎@余命数

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

知乎@余命数

现在将这两个表达式代入已知条件:

$$\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=2.$$

展开此数量积, 这与极化恒等式的推导过程一致:

$$||\overrightarrow{AD}||^2-\frac{3}{4}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})-\frac{3}{16}||\overrightarrow{AB}||^2=2.$$

知乎@余命数

利用数量积的交换律 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$, 合并同类项, 得

$$||\overrightarrow{AD}||^2-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})-\frac{3}{16}||\overrightarrow{AB}||^2=2.$$

知乎@余命数

代入已知边长 $AD=5, AB=8$:

知乎@余命数

$$5^2-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})-\frac{3}{16}(8^2)=2.$$

$$25-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})-\frac{3}{16}(64)=2.$$

$$25-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})-12=2.$$

$$13-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=2.$$

解得 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=11$, 故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=22$.

例题 1.22　已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是(　)

解　此表达式包含三个与动点 P 相关的向量, 直接处理较为困难. 可利用向量加法的几何意义将其简化. 令 M 为边 BC 的中点. 根据向量加法的平行四边形法则, 向量和 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$ 可以被合成为

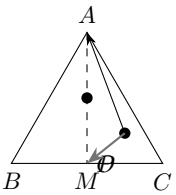
知乎@余命数

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM}.$$

知乎@余命数

于是, 原表达式化为

$$\overrightarrow{PA}\cdot(2\overrightarrow{PM})=2(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}).$$



知乎@余命数

现在问题转化为求 $2(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM})$ 的最小值. 表达式中仍有两个与 P 相关的向量. 为了进一步化简,再次利用中点. 线段 AM 是定长线段,取其中心 O 作为新的参照点.

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}$$

知乎@余命数

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}$$

由于 O 是 AM 的中点, $\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OA}$. 代入后, 数量积变为

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA})=||\overrightarrow{PO}||^2-||\overrightarrow{OA}||^2.$$

所以, 原表达式为

知乎@余命数

$$2(||\overrightarrow{PO}||^2-||\overrightarrow{OA}||^2).$$

知乎@余命数

这是一个关于动点 P 到定点 O 距离的函数.O 与 A 均为定点, 故 $||\overrightarrow{OA}||^2$ 是一个常数. 为使整个表达式最小, 需最小化 $||\overrightarrow{PO}||^2$, 其最小值在 $P=O$ 时取得, 为 0. 此时, 整个表达式的最小值为 $2(0-||\overrightarrow{OA}||^2)=-2||\overrightarrow{OA}||^2$.

最后, 计算 $||\overrightarrow{OA}||$. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 其高(也是中线) AM 的长度为 $2\cdot\sin(60^\circ)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. O 是 AM 的中点, 所以 $||\overrightarrow{OA}||=\frac{1}{2}||\overrightarrow{AM}||=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因此, $||\overrightarrow{OA}||^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$. 所求的最小值为 $-2\cdot\frac{3}{4}=-\frac{3}{2}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 1.23 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 延长线上一点, 且 $AD = 2DE$. 已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$, $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = -2$, 求 $|BC|$ 的长度.

解 此题与前面关于中点分解的例题结构高度相似, 提供了关于中线端点以及延长线上一点的向量数量积信息, 这是应用中线分解的明确信号. 设 D 为 BC 的中点. 对于平面上任意一点 X, 有恒等式

$$\overrightarrow{XB} \cdot \overrightarrow{XC} = XD^2 - BD^2.$$

将此恒等式分别应用于点 A 和点 E. 当 $X = A$ 时:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2 - BD^2.$$

由题设 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$, 得

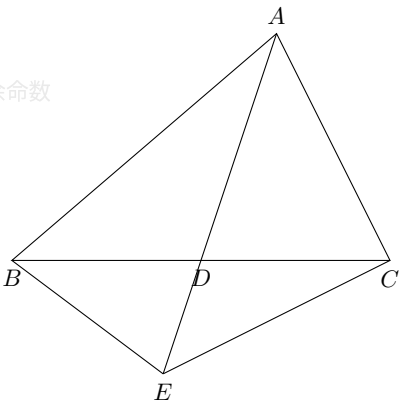
$$AD^2 - BD^2 = 10 \quad (1).$$

当 $X = E$ 时:

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = ED^2 - BD^2.$$

由题设 $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = -2$, 得

$$ED^2 - BD^2 = -2 \quad (2).$$



同时, 几何条件 $AD = 2DE$ 意味着长度的平方关系为 $AD^2 = 4DE^2$. 将此关系代入方程 (1):

$$4DE^2 - BD^2 = 10 \quad (3).$$

现在得一个关于 DE^2 和 BD^2 的二元一次方程组:

$$4DE^2 - BD^2 = 10$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$DE^2 - BD^2 = -2$$

将两方程相减, 消去 BD^2:

$$3DE^2 = 12 \implies DE^2 = 4.$$

将 $DE^2 = 4$ 代回方程 (2):

$$4 - BD^2 = -2 \implies BD^2 = 6.$$

@余命数　知乎@余命数

所求是 $|BC|$. 由于 D 是 BC 的中点, $|BC| = 2|BD|$. 因此, $|BC| = 2\sqrt{BD^2} = 2\sqrt{6}$.

极化恒等式的适用场合如下.

- **中点结构**

  这是最重要且最常见的结构. 当题目中出现 **线段的中点** M, 并且需要处理与该线段两端点相关的向量数量积时, 几乎总能受益于此思想. 具体表现为计算形如 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的数量积, 其中 M 是 AB 的中点. 通过分解 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA}$ 和 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{MA}$, 数量积立即转化为长度的平方差:

  $$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = ||\overrightarrow{PM}||^2 - ||\overrightarrow{MA}||^2.$$

  这种转换是极化恒等式思想的直接体现, 它将一个依赖于角度和动点的复杂数量积, 转化为一个仅与距离相关的简单代数式.

- **最值问题**

  当问题要求某个数量积的最小值或最大值, 且其中涉及动点时, 极化恒等式是实现问题转化的关键工具. 比如之前的例题, 通过中点分解, 将 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 的最值问题转化为求 $||\overrightarrow{BM}||^2$ 的最值, 将 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最值问题转化为求 $||\overrightarrow{PO}||^2$ 的最值. 这实质上是将一个向量代数的最值问题, 降维成一个更直观的几何距离的最值问题, 即“求一点到某轨迹(直线、线段、圆)的最短或最长距离”.

- **向量和的出现**

  当表达式中出现形如 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ 的向量和时, 这是一个强烈的简化信号. 利用中点 M 可将此和式合并为 $2\overrightarrow{PM}$. 这一步往往是应用极化恒等式的前奏, 它将三个与动点 P 相关的向量 $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$ 减少到两个 $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PM})$, 从而创造出可以应用中点分解的结构.

- **纯长度信息的代数运算**

  当题目给出的条件主要为边长, 却要求计算依赖于角度的数量积时, 这暗示需绕开角度, 直接建立长度与数量积的关系. 之前的几道例题就是一个典型的例子, 通过向量分解与展开, 建立了一个包含已知长度和未知数量积的代

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

数方程, 最终解出目标值. 这整个代数展开的过程, 与推导极化恒等式时展开和与差再相减的步骤一致.

极化恒等式既是一个公式, 也是一种**对称化**和**代数化**的策略. 其应用的关键, 是识别出几何图形中由中点带来的对称性, 并利用这种对称性将复杂的向量关系转化为简单的标量(长度)关系. 当你面对一个向量问题, 尤其是涉及中点、最值和向量和时, 应当首先思考能否通过分解与变换, 构造出 $(X+Y)\cdot(X-Y)$ 这一标志性结构.

知乎@余命数

1.2 定比分点与共线定理

向量既表示大小与方向, 其代数运算也直接描述几何关系. 点的共线、共面等位置关系, 在向量语言下有着极为简洁的代数刻画.

1.2.1 系数和为常数的轨迹

先考察平面上任意三点 P, A, B 共线的充要条件. 从几何直观上看, P 在直线 AB 上, 意味着向量 $\overrightarrow{AP}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 是共线的. 用代数语言描述, 即存在唯一的实数 λ, 使得

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}.$$

这是一个重要的基础. 然而在很多问题中, 我们更习惯于从一个公共的基点(原点) O 出发来描述所有点的位置. 可将上式用位置向量 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 来改写:

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).$$

整理后可得

$$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}.$$

这是一个简洁的形式. 若令 $x=1-\lambda$ 及 $y=\lambda$, 则上式变为

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB},\quad \text{其中}\quad x+y=1.$$

这便得到了平面上三点共线的向量表示定理. 它的逆命题同样成立. 这个结论是后续讨论的基础.

定理 1.5 (三点共线定理) 设 O 为平面内任意一点, 且 $A\neq B$, 则 P, A, B 三点共线的充要条件是, 存在唯一的实数对 (x, y) 使得

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB},\quad \text{且}\quad x+y=1.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 为证明该充要条件, 需分别证明其充分性与必要性.

先证明, **充分性.** 假设存在实数对 (x, y) 满足 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 且 $x + y = 1$. 需证明 P, A, B 三点共线.

为证明三点共线, 只需证明连接其中两点的向量, 例如 $\overrightarrow{AP}$, 与连接另外两点的向量, 例如 $\overrightarrow{AB}$, 是共线向量即可. 构造向量 $\overrightarrow{AP}$:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}.$$

将假设条件 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 代入上式, 得

$$\overrightarrow{AP} = (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OA} = (x-1)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}.$$

利用系数和条件 $x + y = 1$, 有 $x - 1 = -y$. 将此关系代入, 得

$$\overrightarrow{AP} = -y\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$

注意到 $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ 正是向量 $\overrightarrow{AB}$. 于是, 得

$$\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AB}.$$

此式表明向量 $\overrightarrow{AP}$ 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的一个标量倍. 因此, $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线. 又因为这两个向量拥有共同的起点 A, 故 P, A, B 三点必然位于同一条直线上. 充分性得证.

接下来证明, 必要性与唯一性. 假设 P, A, B 三点共线. 需证明存在唯一的实数对 (x, y) 满足 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 且 $x + y = 1$.

因为 $A \neq B$ 且 P, A, B 三点共线, 向量 $\overrightarrow{AP}$ 与非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线. 故存在唯一的实数 λ, 使得

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

将此式用以 O 为基点的位置向量表示:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$

整理可得 $\overrightarrow{OP}$ 的表达式:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OA} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

令 $x = 1 - \lambda$ 且 $y = \lambda$. 此时, 找到满足 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 的系数. 验证其和: $x + y = (1-\lambda) + \lambda = 1$. 由于对于给定的共线三点, λ 的值, 即 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影系数是唯一确定的, 故 x 和 y 的值也是唯一确定的. 必要性与唯一性得证.

故该定理成立. □

接着要考虑的是, 当系数和为任意常数 k, 即 $x + y = k$ 时, 点 P 的轨迹.

考察这个条件: $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 且 $x + y = k$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

首先考虑特殊情况. 当 $k=0$ 时, $y=-x$. 于是

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}-x\overrightarrow{OB}=x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=x\overrightarrow{BA}.$$

故向量 $\overrightarrow{OP}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 共线. 由于 $\overrightarrow{OP}$ 的起点是原点 O, 故点 P 的轨迹是一条经过原点 O 且平行于直线 AB 的直线.

接着, 我们考察 $k\neq 0$ 的一般情况. 我们的策略是通过代数变形, 将表达式整理成能够说明其几何意义的形式. 从条件 $x+y=k$ 中, 可用 x 表示 y, 即 $y=k-x$. 将其代入向量表达式:

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+(k-x)\overrightarrow{OB}.$$

为了分离变量 x 的影响, 将上式按 x 和常数项重新组合:

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}-x\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OB}+x(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}).$$

注意到括号中的项正是向量 $\overrightarrow{BA}$, 于是

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OB}+x\overrightarrow{BA}.$$

这个结构是向量几何中直线的参数方程. 为了更清晰地理解其几何轨迹, 可将常数项移到等式左边:

$$\overrightarrow{OP}-k\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{BA}.$$

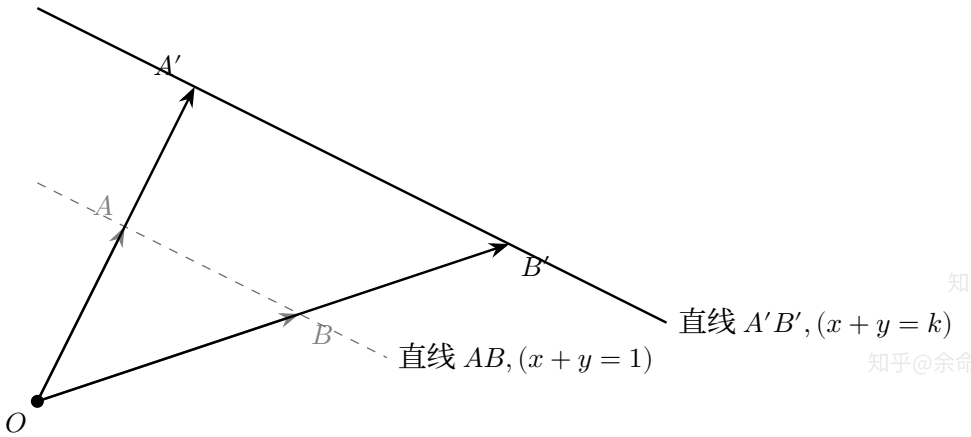
令 B' 是这样一个点, 其位置向量为 $\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$. 由于 k 和点 B 都是固定的, 所以 B' 是一个定点. 上述方程可以写为

$$\overrightarrow{B'P}=x\overrightarrow{BA}.$$

此式的几何意义非常明确, 从定点 B' 到动点 P 的向量 $\overrightarrow{B'P}$, 总是与一个固定的向量 $\overrightarrow{BA}$ 共线. 因此, 动点 P 的轨迹必然是一条经过定点 B' 且方向与 $\overrightarrow{BA}$, 即直线 AB 相同的直线.

同理, 我们也可以定义一个定点 A' 满足 $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$, 通过消去 x, 将会证明点 P 的轨迹也经过 A'. 因此, 当 $x+y=k$ $(k\neq 0)$ 时, 点 P 的轨迹是一条经过点 $A'(k\overrightarrow{OA})$ 和 $B'(k\overrightarrow{OB})$ 的直线, 并且该直线平行于直线 AB.

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

将这一重要结论总结如下.

定理 1.6 (等和线定理) 给定平面上不共线的三点 O, A, B, 对于动点 P, 若其位置向量满足

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB},$$

则点 P 的轨迹由系数和 $x + y$ 的值唯一确定:

- 若 $x + y = 1$, 则 P 的轨迹是直线 AB.
- 若 $x + y = k$ (k 为非零常数), 则 P 的轨迹是一条经过点 $A'(k\overrightarrow{OA})$ 和 $B'(k\overrightarrow{OB})$ 的直线, 且该直线平行于 AB.
- 若 $x + y = 0$, 则 P 的轨迹是一条经过原点 O 且平行于 AB 的直线.

这条由系数和为常数所确定的直线, 我们称之为等和线.

证明 分三种情形证明.

- 情况一 $x + y = 1$
  此情况即为前述的三点共线定理, 其充分性与必要性已得到严格证明. 它是整个等和线理论的基础.
- 情况二 $x + y = 0$
  充分性: 假设 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 且 $x + y = 0$. 由 $x + y = 0$ 可得 $y = -x$. 将其代入向量表达式:

  $$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} - x\overrightarrow{OB} = x(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = x\overrightarrow{BA}.$$

  此式表明, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 与向量 $\overrightarrow{BA}$ 共线. 由于 $\overrightarrow{OP}$ 的起点为 O, 故点 P 必然位于那条经过原点 O 且与直线 AB 平行的直线上.

知乎@余命数

必要性：假设点 P 位于经过原点 O 且平行于直线 AB 的直线上. 即向量 $\overrightarrow{OP}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$(或 $\overrightarrow{BA}$)共线. 因此, 存在唯一的实数 t 使得

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{BA}.$$

将 $\overrightarrow{BA}$ 写成 $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, 得:

$$\overrightarrow{OP} = t(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = t\overrightarrow{OA} - t\overrightarrow{OB}.$$

若令 $x = t$ 及 $y = -t$, 则上式符合 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 的形式. 此时系数和为 $x + y = t + (-t) = 0$. 证毕.

- 情况三 $x + y = k$(k 为非零常数)

充分性：假设 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 且 $x + y = k$. 定义点 A' 为满足 $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ 的定点. 考察向量 $\overrightarrow{A'P}$:

$$\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA'} = (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}) - k\overrightarrow{OA} = (x-k)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}.$$

利用系数和条件 $x + y = k$, 有 $x - k = -y$. 将此关系代入, 得

$$\overrightarrow{A'P} = -y\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = y\overrightarrow{AB}.$$

此式表明, 向量 $\overrightarrow{A'P}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线. 因为 A' 是一个定点, 所以动点 P 的轨迹是一条经过 A' 且平行于直线 AB 的直线. 类似地, 可证明该直线也经过点 $B'(k\overrightarrow{OB})$.

必要性：假设点 P 位于经过点 $A'(k\overrightarrow{OA})$ 且平行于直线 AB 的直线上. 即向量 $\overrightarrow{A'P}$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 共线. 因此, 存在唯一的实数 t 使得

$$\overrightarrow{A'P} = t\overrightarrow{AB}.$$

用位置向量展开上式:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA'} = t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}).$$

解出 $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA}.$$

将 $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ 代入, 得

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA} = (k-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}.$$

若令 $x = k - t$ 及 $y = t$, 则上式符合 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 的形式. 此时系数和为 $x + y = (k-t) + t = k$. 证毕.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

综合以上三种情况, 定理得证. □

这一结论极为有用, 它将一个代数条件 $(x+y=k)$ 和一个清晰的几何轨迹(一条特定的直线)对应起来, 是解决向量与几何综合问题的有力工具.

为进一步理解等和线定理的含义, 可从三种观点分析这一结论.

1.2.1.1 仿射坐标系

我们熟悉的笛卡尔坐标系, 是由一个原点和两个相互垂直的单位向量基底构成的. 而等和线的概念实质上是在一个更广义的坐标系, 即**仿射坐标系**中讨论.

给定一个基点 O 和两个线性无关的向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$, 它们构成了一个仿射坐标系, 记为 $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$. 在此坐标系中, 平面上任意一点 P 的位置向量 $\overrightarrow{OP}$ 都可以被唯一地表示为

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}.$$

这里的数对 (x,y) 就是点 P 在该仿射坐标系下的 **仿射坐标**.

从这个视角来看, 等和线定理的条件 $x+y=k$ 就十分清晰. 它是在仿射坐标系下的一条**线性方程**. 已知, 在笛卡尔坐标系中, 任何形如 $ax+by=c$ 的线性方程都对应一条直线. 仿射坐标系保持了这种最基本的线性性质.

- $x+y=1$: 这条特殊的等和线, 即直线 AB, 在仿射坐标系 $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ 中是如同笛卡尔坐标系中 $x+y=1$ 的, 是连接两个单位点 $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 的基准线.
- $x+y=k$: 这族方程对应的是一族互相平行的直线, 正如在笛卡尔坐标系中 $x+y=k$ 对应一族斜率为 -1 的平行直线系一样.

因此, 等和线定理实质上是陈述了在向量定义的仿射坐标系中, 点的共线关系等价于其仿射坐标满足一个线性方程.

1.2.1.2 几何变换

等和线定理也可以被理解为一种几何变换作用的结果. 具体的说, 是**位似变换**.

以原点 O 为位似中心, 位似比为 k 的位似变换, 将点 P' 映射到点 P, 其定义就是 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OP'}$.

现再看等和线的推导过程. 我们证明了, 如果点 P' 的位置向量满足 $\overrightarrow{OP'}=x'\overrightarrow{OA}+y'\overrightarrow{OB}$ 且 $x'+y'=1$, 即 P' 在直线 AB 上, 那么经过位似变换后的点 P, 其位置向量 $\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OP'}=kx'\overrightarrow{OA}+ky'\overrightarrow{OB}$. 令 $x=kx'$ 及 $y=ky'$, 则点 P 的仿射坐标为 (x,y), 且其系数和为

$$x+y=kx'+ky'=k(x'+y')=k(1)=k.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这精确地说明了: **系数和为 k 的等和线, 正是系数和为 1 的基准线(直线 AB)在以 O 为中心、比值为 k 的位似变换下的像**. 位似变换的一个基本性质就是将直线映射为与之平行的直线. 这就从几何变换的角度解释了为何所有的等和线都相互平行.

1.2.1.3 重心坐标

对于 $\triangle OAB$, 平面内任意一点 P 都可以被唯一表示为三个顶点的线性组合:

$$\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB} + w\overrightarrow{OO}, \quad \text{其中} \quad u+v+w=1.$$

由于 $\overrightarrow{OO}$ 是零向量, 上式简化为 $\overrightarrow{OP} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}$, 且 $u+v+w=1$. 这里的 (u,v,w) 称为点 P 关于 $\triangle OAB$ 的**重心坐标**.

现再看条件 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. 这可以看作是重心坐标表示中第三个系数 w (对应于顶点 O)的信息. 比较两种表示, 有 $u=x, v=y$. 由重心坐标的系数和为 1, 即 $u+v+w=1$, 得

$$x+y+w=1 \implies w=1-(x+y).$$

于是, 等和线的条件 $x+y=k$ 等价于一个关于重心坐标的条件:

$$w=1-k.$$

等和线 $x+y=k$ 上所有点的重心坐标中, 对应于顶点 O 的分量 w 是一个常数 $1-k$. 在重心坐标系中, 一个顶点对应的坐标分量为常数的点的轨迹, 是一条平行于该顶点对边的直线. 在这里, w 是对应顶点 O 的坐标, 其对边是线段 AB. 因此, $w=1-k$ 所描述的点的轨迹是一条平行于直线 AB 的直线.

1.2.1.4 推广至高维

以上观点, 特别是仿射坐标与重心坐标的观点, 很容易推广到三维乃至更高维空间. 例如在三维空间中, 给定基点 O 和三个不共面的点 A,B,C, 那么满足

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \quad \text{且} \quad x+y+z=k$$

的点 P 的轨迹, 就是一个平行于平面 ABC 的平面. 这正是等和线定理在高维空间中的自然推广.

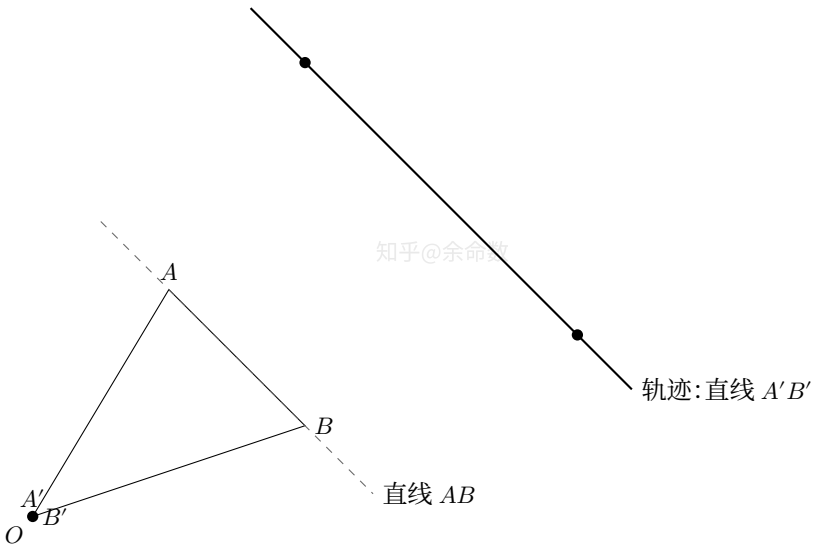
例题 1.24 在 $\triangle OAB$ 中, 点 P 位于平面内, 且满足 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 1, 求在下列条件下点 P 的轨迹.

1. $x+y=2$;
2. $x+2y=2$ 且 $x\geq 0, y\geq 0$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 此题旨在将向量系数的代数约束, 翻译为点 P 的几何轨迹.

(1) 条件为 $x+y=2$. 根据等和线定理, 当系数和为常数 k 时, 点 P 的轨迹是一条平行于 AB 的直线. 此处 $k=2$. 这条直线经过点 A' 和 B', 其中 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$ 且 $\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$. 因此, 点 P 的轨迹是直线 $A'B'$.



(2) 条件为 $x+2y=2$, 且 $x\geq 0, y\geq 0$. 这个条件 $x+2y=2$ 需要先化归为等和线形式. 条件两边同除以 2, 得到

$$\frac{x}{2}+y=1.$$

这提示应该构造一个新基向量, 使得其系数恰为 $\frac{x}{2}$ 和 y.

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\frac{x}{2}(2\overrightarrow{OA})+y\overrightarrow{OB}.$$

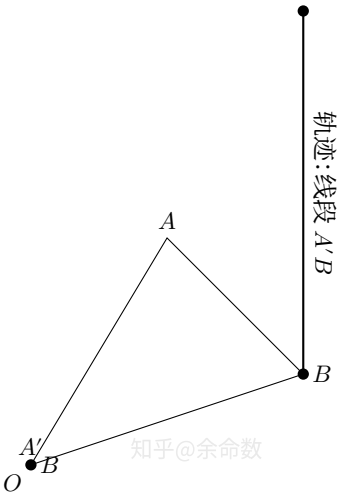
令 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$. 那么

$$\overrightarrow{OP}=\frac{x}{2}\overrightarrow{OA'}+y\overrightarrow{OB}.$$

令 $x'=\frac{x}{2}$ 和 $y'=y$. 则 $x'+y'=1$. 根据三点共线定理, 点 P 的轨迹在直线 $A'B$ 上.

然而, 题目中还有附加条件 $x\geq 0, y\geq 0$. $x\geq 0 \implies x'\geq 0$. $y\geq 0 \implies y'\geq 0$. 因此, 点 P 的轨迹是系数 x', y' 均非负的线段, 即线段 $A'B$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

这个例子说明, 任何关于系数的线性约束 $ax+by=c$, 都可以通过对基向量的伸缩变换, 转化为系数和为 1 的标准形式, 从而确定其轨迹为一条直线.

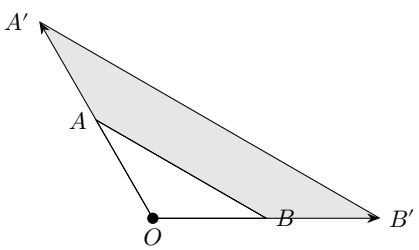
例题 1.25 给定 $\triangle OAB$, 其中 $OA=OB=1$, $\angle AOB=120^\circ$. 点 P 在平面内运动, 其位置向量 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$. 若实数 s,t 满足 $s\geq 0, t\geq 0$ 且 $1\leq s+t\leq 2$, 求点 P 所形成区域的面积.

解 此题要求由向量系数的不等式约束所确定的点的轨迹区域的面积. 这是一个典型的由等和线界定区域的问题. 分析点 P 的轨迹边界. 约束条件为 $1\leq s+t\leq 2$, 同时 $s\geq 0, t\geq 0$.

- 考虑边界 $s+t=1$. 根据等和线定理, 这对应一条直线. 又因 $s\geq 0, t\geq 0$, 点 P 的轨迹是连接点 $A(s=1,t=0)$ 和点 $B(s=0,t=1)$ 的线段 AB.
- 考虑边界 $s+t=2$. 根据等和线定理, 这对应另一条与 AB 平行的直线. 这条直线经过点 $A'(s=2,t=0)$ 和点 $B'(s=0,t=2)$. 其中, $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$ 且 $\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$. 同样因为 $s\geq 0, t\geq 0$, 点 P 的轨迹是连接 A' 和 B' 的线段 $A'B'$.

当 $s+t$ 的值在 $[1,2]$ 区间内连续变化时, 点 P 的轨迹会扫过线段 AB 与线段 $A'B'$ 之间的所有区域. 因此, 点 P 所形成的区域是一个以 A,B,B',A' 为顶点的梯形.

知乎@余命数



知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为求该梯形的面积, 可用大三角形 $\triangle OA'B'$ 的面积减去小三角形 $\triangle OAB$ 的面积. 首先, 计算 $\triangle OAB$ 的面积, 得

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin(\angle AOB)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin(120^\circ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$\triangle OA'B'$ 是 $\triangle OAB$ 以 O 为中心, 位似比为 2 的放大图形. 它的边长 $OA'=2, OB'=2$, 夹角不变. 其面积为:

$$S_{\triangle OA'B'}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA'}||\overrightarrow{OB'}|\sin(\angle A'OB')=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin(120^\circ)=\sqrt{3}.$$

知乎@余命数

或者, 利用面积的位似性质:

$$S_{\triangle OA'B'}=2^2\cdot S_{\triangle OAB}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}.$$

因此, 梯形 $ABB'A'$ 的面积为

$$S_{\text{梯形}}=S_{\triangle OA'B'}-S_{\triangle OAB}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

1.2.2 奔驰定理

知乎@余命数

已分析了由两个基向量线性组合所定义的点的轨迹. 对于三角形的三个顶点, 它们的向量之和具有确定的几何意义, 这正是三角形一个基本中心, 即重心的内在向量性质.

定理 1.7 (重心向量定理) 对于平面上任意 $\triangle ABC$ 及其重心 G, 以下两个向量恒等式成立:

1. 对于任意选定的基点 O, 顶点的位置向量之和等于重心位置向量的三倍:
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}.$$
2. 对于平面上任意一点 P, 从该点出发到三个顶点的向量之和等于到重心向量的三倍:
$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}.$$

证明 将从重心的基本几何性质出发, 即重心是中线的交点, 且按 $2:1$ 的比例分割中线, 来推导这两个恒等式.

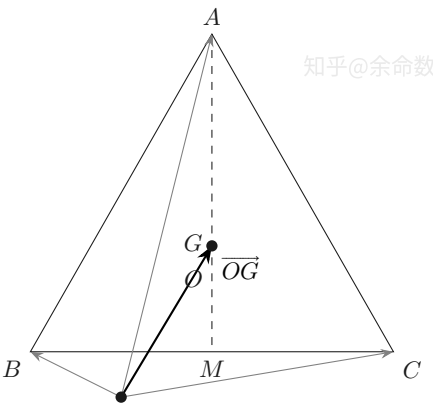
1. 证明 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设 M 为边 BC 的中点. 根据中点向量公式, 对于任意选定的基点 O, 点 M 的位置向量 $\overrightarrow{OM}$ 可以表示为:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

重心 G 是 $\triangle ABC$ 的三条中线的交点. 特别地, G 位于中线 AM 上. 由重心的性质可知, 点 G 将中线 AM 分成两段, 且满足比例关系 $AG : GM = 2 : 1$.



可利用定比分点公式来表示点 G 的位置向量 $\overrightarrow{OG}$. 因为 G 在线段 AM 上, 且 $AG : GM = 2 : 1$, 可将 $\overrightarrow{OG}$ 表示为 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OM}$ 的线性组合:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OM}}{1+2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM}).$$

现在, 将 $\overrightarrow{OM}$ 的表达式 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 代入上式, 得

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right)\right).$$

化简括号内的表达式, 得:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

将等式两边同乘以 3, 便得到了第一个恒等式, 得

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

此式的成立不依赖于基点 O 的选择, 故对任意点 O 均成立.

2. 证明 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}$

此恒等式可通过更换基点由第一个恒等式导出. 在第一个恒等式中, 基点 O 是任意的. 可将这个任意点 O 替换为点 P. 于是, 恒等式变为:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这种方法虽然简洁, 但为了更清晰地展示推导过程, 也可从向量的减法出发证明. 对于任意点 P, 可将从 P 出发的向量分解为经过基点 O 的路径:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}$$

将这三个向量表达式相加:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - 3\overrightarrow{OP}.$$

利用已证明的第一个恒等式 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, 将其代入上式, 得

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OP}.$$

提取公因子 3:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP}).$$

根据向量减法的定义, $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OP}$ 正是向量 $\overrightarrow{PG}$. 因此,

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PG}.$$

至此, 定理的两个形式均已得证. □

这个定理, 尤其是它的一个重要推论, 在几何学中被赋予了一个形象的名称, 即奔驰定理.

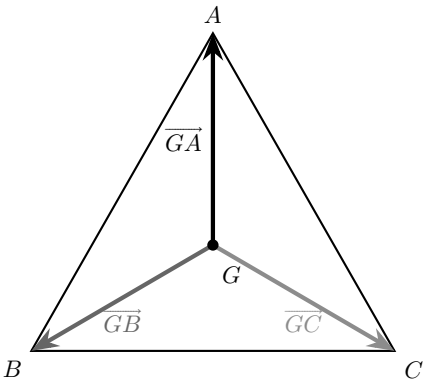
1.2.2.1 定理的几何形象与名称由来

若将基点 O 选为重心 G 本身, 那么定理的第一个恒等式就变为

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GG} = \vec{0}.$$

这个简洁而基本的结论 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ 就是奔驰定理在基点取为重心时的特例. 它表明, 如果将三个从重心出发指向顶点的向量首尾相接, 它们将构成一个封闭的三角形. 而如果将这三个向量的起点都置于重心 G, 它们会形成一个静态的力平衡, 指向三个方向. 这三个向量构成的 Y 形结构, 与梅赛德斯-奔驰的标志惊人地相似, 定理因此得名. 这也从物理学的角度解释了重心为什么被称为质量中心.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数



奔驰定理是处理涉及重心问题时的一个基础出发点. 它将三个顶点的信息集中到重心这一点上, 大幅简化了许多复杂的向量关系.

1.2.3 二次和的最小值与斯坦纳定理

奔驰定理说明了从任意点到三角形三顶点向量之和的简洁性质. 一个自然的延伸是寻找从平面上哪一点出发到三顶点的**距离平方和**最小. 这个问题在几何、物理与统计中都有着重要的应用, 物理上它对应力矩, 统计上它对应方差, 其答案由如下的斯坦纳定理或称莱布尼茨公式给出.

定理 1.8 (向量的斯坦纳定理) 对于平面上任意 $\triangle ABC$, 其重心为 G. 对于平面上任意一点 P, 以下恒等式成立:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2.$$

或者用向量模长的形式写作:

$$||\overrightarrow{PA}||^2 + ||\overrightarrow{PB}||^2 + ||\overrightarrow{PC}||^2 = ||\overrightarrow{GA}||^2 + ||\overrightarrow{GB}||^2 + ||\overrightarrow{GC}||^2 + 3||\overrightarrow{PG}||^2.$$

这个恒等式说明了一个基本结构, 从任意点 P 出发的距离平方和等于一个不依赖于 P 的常数, 即从重心 G 出发的距离平方和, 加上一个正比于 P 到重心 G 距离平方的变量. 这在物理学中, 与质点系的转动惯量中的平行轴定理具有完全相同的数学形式.

证明 此定理的证明是奔驰定理的一个直接且精彩的应用. 出发点是将所有与动点 P 相关的向量, 都通过重心 G 这个不动点进行分解. 对于向量 $\overrightarrow{PA}$, 可插入点 G, 得到路径 $P \to G \to A$:

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}.$$

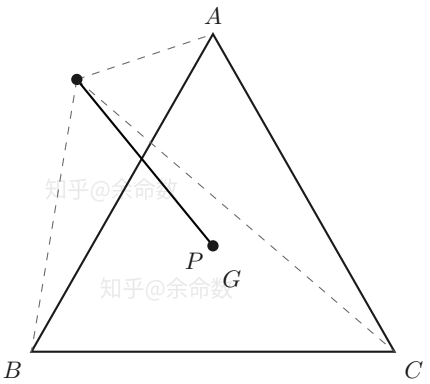
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

接着, 计算其模长的平方, 得

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{PA}||^2 &= (\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA})\cdot(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA})\\ &= ||\overrightarrow{PG}||^2+2(\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GA})+||\overrightarrow{GA}||^2.\end{aligned}$$

同理, 可得到关于点 B 和 C 的表达式:

$$||\overrightarrow{PB}||^2 = ||\overrightarrow{PG}||^2+2(\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GB})+||\overrightarrow{GB}||^2,$$
$$||\overrightarrow{PC}||^2 = ||\overrightarrow{PG}||^2+2(\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GC})+||\overrightarrow{GC}||^2.$$



将这三个等式相加, 得到所关心的距离平方和:

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{PA}||^2+||\overrightarrow{PB}||^2+||\overrightarrow{PC}||^2 &= \left(3||\overrightarrow{PG}||^2\right)\\ &+\left(||\overrightarrow{GA}||^2+||\overrightarrow{GB}||^2+||\overrightarrow{GC}||^2\right)\\ &+2(\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{GC}).\end{aligned}$$

利用数量积的分配律, 可将最后一项中的公因子 $\overrightarrow{PG}$ 提取出来:

$$2\overrightarrow{PG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}).$$

此时, 奔驰定理的结论 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ 发挥了决定性作用. 上述交叉项因此变为

$$2\overrightarrow{PG}\cdot\vec{0}=0.$$

于是, 总和的表达式中交叉项消失, 化简为:

$$||\overrightarrow{PA}||^2+||\overrightarrow{PB}||^2+||\overrightarrow{PC}||^2 = 3||\overrightarrow{PG}||^2+||\overrightarrow{GA}||^2+||\overrightarrow{GB}||^2+||\overrightarrow{GC}||^2.$$

这便完成了恒等式的证明. □

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

推论 1.1 在平面上,使得与 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离平方和 $PA^2+PB^2+PC^2$ 取得最小值的点 P, 唯一地是该三角形的重心 G.

证明 根据斯坦纳定理的恒等式, 表达式 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 由两部分构成. 第一部分, $GA^2 + GB^2 + GC^2$, 对于一个给定的三角形, 是一个确定的常数. 第二部分, $3PG^2$, 是唯一与动点 P 位置相关的变量. 由于模长的平方 PG^2 总是非负的, 即 $PG^2 \geq 0$, 那么 $3PG^2$ 的最小值显然为 0. 这个最小值在且仅在 P 与 G 重合时 $(P = G)$ 取得. 因此,总和在点 $P = G$ 时达到其最小值,最小值为 $GA^2+GB^2+GC^2$. □

1.2.4 对角线数量积定理

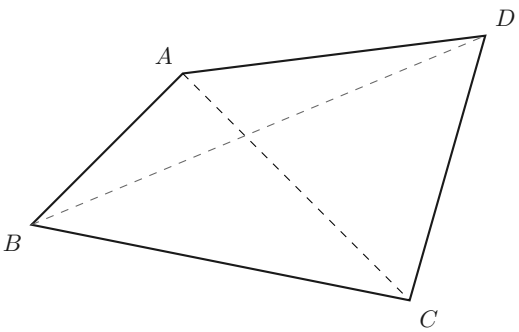
在详细研究了三角形的向量性质后, 我们自然地将目光转向更为复杂的四边形. 四边形的四条边长与其两条对角线的长度和方向之间存在确定的代数关系, 这个关系由一个关于对角线向量数量积的简洁恒等式所刻画.

定理 1.9 对于平面上任意一个四边形 $ABCD$, 其边长与对角线向量的数量积满足如下关系:

$$2(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}) = (AD^2 + BC^2) - (AB^2 + CD^2).$$

该恒等式表明, 对角线向量的数量积等于两组对边长度平方和之差的一半.

证明 此定理的证明是向量代数处理几何问题的典范. 其做法是引入一个任意的基点 O 作为原点, 将所有几何量(边长和对角线)用相对于 O 的位置向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 来表示, 从而将几何问题彻底转化为代数恒等式的验证.



知乎@余命数

令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{OD}=\vec{d}$. 从恒等式右侧的边长平方和之差入手计算.

$$\begin{aligned}(AD^2+BC^2)-(AB^2+CD^2) &= ||\vec{d}-\vec{a}||^2+||\vec{c}-\vec{b}||^2\\ &\quad -||\vec{b}-\vec{a}||^2-||\vec{d}-\vec{c}||^2\\ &= (\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{a})\\ &\quad +(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\ &\quad -(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\ &\quad -(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{d}-\vec{c}).\end{aligned}$$

知乎@余命数

将所有模长平方展开, 得

$$\begin{aligned}&= ||\vec{d}||^2-2\vec{a}\cdot\vec{d}+||\vec{a}||^2\\ &\quad +||\vec{c}||^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+||\vec{b}||^2\\ &\quad -(||\vec{b}||^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+||\vec{a}||^2)\\ &\quad -(||\vec{d}||^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}+||\vec{c}||^2).\end{aligned}$$

知乎@余命数

展开并移除括号后, 所有的模长平方项 $||\vec{a}||^2,||\vec{b}||^2,||\vec{c}||^2,||\vec{d}||^2$ 都相互抵消. 剩下的项为:

$$= -2\vec{a}\cdot\vec{d}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{c}\cdot\vec{d}.$$

提取公因子 2, 并重新组合这些项, 以便进行因式分解:

$$\begin{aligned}&= 2(\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{d})\\ &= 2(\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{d})-\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{d}))\\ &= 2((\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{d})).\end{aligned}$$

知乎@余命数

最后, 将位置向量的差还原为几何向量: $\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$. $\vec{b}-\vec{d}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}$. 于是, 最终的表达式为:

$$2((-\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{BD}))=2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}).$$

这就证明了 $(AD^2+BC^2)-(AB^2+CD^2)=2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD})$. □ □

这个定理形式简洁, 还引出了一条关于对角线垂直的几何性质.

知乎@余命数

推论 1.2 (正交对角线定理) 一个四边形的两条对角线相互垂直的充要条件是, 其两组对边的长度平方和相等. 即,

$$AC \perp BD \iff AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

证明 根据向量的性质, 两条对角线 AC 与 BD 相互垂直, 等价于它们的向量数量积为零, 即 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. 将此条件代入刚刚证明的对角线数量积定理, 得

$$2(0) = (AD^2 + BC^2) - (AB^2 + CD^2).$$

$$0 = (AD^2 + BC^2) - (AB^2 + CD^2).$$

移项即得

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

由于推导过程中的每一步都是可逆的, 因此该条件的充分性与必要性均成立. □

这个推论在解决有关等形、菱形以及其他对角线垂直的四边形问题时, 提供了一个非常有效的边长关系判据.

1.3 向量外积与混合积

数量积把两个向量压缩成一个标量, 刻画夹角与投影. 外积走另一条路, 两个向量相乘仍得向量, 方向垂直于原二向量所在平面, 大小等于它们张成的平行四边形面积. 三个向量的混合积把外积与内积串联起来, 给出平行六面体的体积, 并提供共面的代数判据.

1.3.1 向量外积的定义

定义 1.7 (向量外积) 设 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 是两个向量, 夹角为 $\theta(0 \le \theta \le \pi)$. 它们的外积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是一个向量, 其大小为

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta \tag{1-6}$$

方向规定为: 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线时, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 同时垂直于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, 且 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系, 即右手四指从 $\mathbf{a}$ 转向 $\mathbf{b}$, 拇指所指即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的方向. 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线时, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

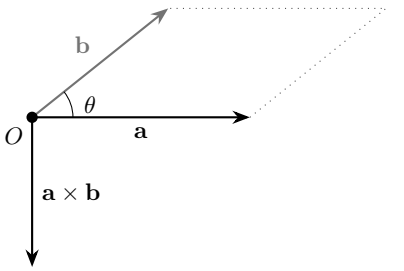


图 1.10　外积的方向由右手定则确定, 大小为平行四边形面积

由 (1-6), $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ 等于以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形面积. 当 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ 时 $\sin\theta=0$, 即 $\theta=0$ 或 π, 两个向量共线. 这给出平行的判据:

知乎@余命数

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\iff\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$$

1.3.2 外积的运算律

知乎@余命数

定理 1.10 (外积的运算律) 对任意向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 和实数 λ、μ:

1. 反交换律: $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.
2. 数乘结合: $(\lambda\mathbf{a})\times(\mu\mathbf{b})=\lambda\mu(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.
3. 左分配律: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.
4. 右分配律: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

知乎@余命数

证明 (反交换律) 交换 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的位置, 夹角从 θ 变为 $\pi-\theta$, $\sin\theta$ 不变, 故大小相同. 右手定则中四指转向相反, 拇指方向翻转, 故方向相反. □

证明 (左分配律) 将各向量投影到垂直于 $\mathbf{c}$ 的平面 π 上. 对 π 内任一向量 $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}'\times\mathbf{c}$ 等于将 $\mathbf{v}'$ 在 π 内旋转 90° 后乘以 $|\mathbf{c}|$. 旋转是线性变换, 故投影的加法保持, 分配律成立. □

右分配律由左分配律与反交换律推出:

知乎@余命数

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=-(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{a}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

1.3.3 外积的坐标公式

取空间直角坐标系的基向量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$(构成右手系). 由定义直接得到

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设 $\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 按分配律展开:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\mathbf{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}\tag{1-7}$$

定理 1.11 (拉格朗日恒等式) 对任意两个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$,

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\tag{1-8}$$

知乎@余命数

证明 由 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ 与 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$,

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

□

例题 1.26 (三角形面积) 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(1,0,0)$、$B(2,1,0)$、$C(0,1,1)$. 用外积求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,1,1)$. 外积

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&1&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=(1,-1,2)$$

知乎@余命数

模长 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$. 三角形面积等于平行四边形面积之半:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

知乎@余命数

1.3.4 二重外积与雅可比恒等式

外积的结果仍是向量, 可继续参与外积运算.$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ 垂直于 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, 而 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 垂直于 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 所在平面, 故 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ 落回该平面, 可被 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 线性表示.

知乎@余命数

定理 1.12 (二重外积公式) 对任意三个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\tag{1-9}$$

证明 取坐标系使 $\mathbf{a}=(a,0,0)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,0)$, $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$. 则 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(0,0,ab_2)$, 故

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(-ab_2c_2,\ ab_2c_1,\ 0)$$

另一方面,

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}=ac_1(b_1,b_2,0)-(b_1c_1+b_2c_2)(a,0,0)=(-ab_2c_2,\ ab_2c_1,\ 0)$$

两端相等. □

定理 1.13 (雅可比恒等式) 对任意三个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{0} \tag{1-10}$$

证明 对三项分别套用 (1-9):

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$$

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

三式相加, 含 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的项各成对抵消, 得 $\mathbf{0}$. □

二重外积公式表明外积不满足结合律, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 共面, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 与 $\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 共面, 两者一般不同.

1.3.5 混合积

定义 1.8 (混合积) 三个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 的混合积定义为

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \tag{1-11}$$

定理 1.14 (混合积的几何意义) $|[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]|$ 等于以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 为邻边的平行六面体的体积. 当 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 构成右手系时混合积为正, 左手系时为负.

证明 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 垂直于 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 所在平面, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ 为底面平行四边形面积.$\mathbf{c}$ 在 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 方向上的投影 $h=|\mathbf{c}|\cos\varphi$($\varphi$ 为 $\mathbf{c}$ 与 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的夹角)为平行六面体的高. 故

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\cos\varphi=\text{底面积}\times\text{高}=\text{体积}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

右手系下 $\cos\varphi>0$, 混合积为正; 左手系下 $\cos\varphi<0$, 混合积为负. □

1.3.6 混合积的坐标公式与轮换对称性

设 $\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\mathbf{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\mathbf{c}=(x_3,y_3,z_3)$. 由 (1-7) 算出 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 再与 $\mathbf{c}$ 作内积, 得

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} \tag{1-12}$$

定理 1.15 (混合积的轮换对称性) 混合积在轮换下不变, 对换下变号:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}]=[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]=-[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]$$

证明 轮换是行列式 (1-12) 的行轮换, 值不变; 对换是行列式的行对换, 值变号. □

定理 1.16 (共面判定) 三个向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 共面的充分必要条件是

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=0 \tag{1-13}$$

证明 共面时平行六面体退化为平面图形, 体积为零, 故 $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=0$. 反之, $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=0$ 意味着 $\mathbf{c}$ 垂直于 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$; 若 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{c}$ 落在 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 所在平面内; 若 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 三向量自然共面. □

例题 1.27 (四面体体积) 四面体 $OABC$ 的顶点为 $O(0,0,0)$、$A(2,0,0)$、$B(1,2,0)$、$C(0,1,2)$. 求其体积.

解 $\overrightarrow{OA}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(1,2,0)$, $\overrightarrow{OC}=(0,1,2)$. 混合积

$$[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\times(2\times2-0\times1)=8$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

四面体体积为平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$（底面三角形面积为平行四边形之半，锥体体积再取 $\frac{1}{3}$），故

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]|=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

知乎@余命数

例题 1.28 (四点共面判定) 判断 $A(1,0,1)$、$B(2,1,0)$、$C(0,1,1)$、$D(1,1,2)$ 是否共面.

解 取 $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$. 混合积

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1\times(1-0)-1\times(-1-0)+(-1)\times(-1-0)=1+1+1=3\neq 0$$

混合积非零，四点不共面.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 2 章

解三角形



基础语言

「数学的本质在于其自由。」

——康托尔

第二章 解三角形

注 2.1
本章若干证明(尤其是四心的向量表示)使用 第1章 的数量积与定比分点. 边角关系由正弦定理、余弦定理与面积公式处理; 建系法给出坐标保底路线.

知乎@余命数

大问题

知乎@余命数

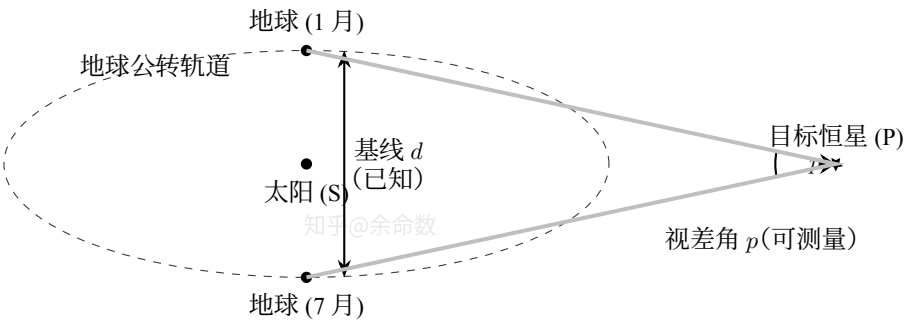


图 2.1 用三角形丈量宇宙

知乎@余命数

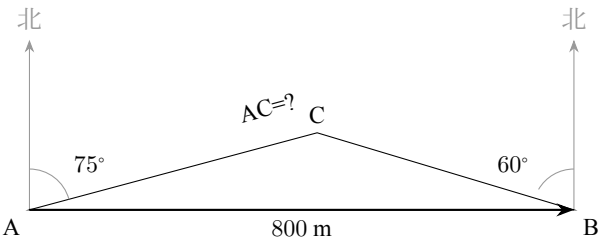
地球到恒星的距离可以用三角测量求出. 我们永远无法用一把尺子去测量地球到恒星的距离. 然而, 天文学家利用地球的公转, 构建了一个横跨数亿公里的巨型三角尺. 他们在 1 月和 7 月, 即地球位于轨道两侧时, 分别观测同一颗邻近恒星 P. 由于观测点不同, P 在遥远的背景星空中的位置会产生微小的位移, 这个位移的角度 p(视差角)是可以测量的. 在由 1 月地球、7 月地球与目标恒星 P 构成的这个非常狭长的三角形中, 我们已知底边长度, 即地球轨道直径 d, 以及可由视差角 p 推出的两个底角. **仅凭这些数据就能算出那条遥不可及的腰长, 即地星距离.** 这需要一套普适的、能够连接任意三角形边与角的完备的法则.

探索课题

在一次定向越野中, 你从点 A 出发, 向正东方向走了 800 米到达点 B. 此时你发现目标 C 在你的北偏西 60° 方向. 你的队友留在 A 点, 他测得 C 点位于 A 点的北偏东 75° 方向.

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



请问目标点 C 距离出发点 A 有多远?(即求 AC 的长度)

在 $\triangle ABC$ 中, 我们已知一条边 $AB = 800\text{m}$. 角 $\angle CAB = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. 在 B 点, 正东方向为射线 AB, 正北方向与其垂直, 正西方向为射线 BA. 北偏西 60° 是指从正北方向向西转 60°. 因此, 射线 BC 与正西方向 (射线 BA) 的夹角为 $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. 所以 $\angle ABC = 30^\circ$. 于是, $\angle C = 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 135^\circ$.

此时已拥有三角形的一边和所有角 (AAS), 但它不是直角三角形, 勾股定理和初中锐角三角函数定义都无法直接使用. 虽然可通过作高 $CD \perp AB$, 将问题转化为解两个直角三角形, 但这需要解一个关于边长的复杂方程, 过程相当繁琐. 于是需要一种更普适、更直接的工具, 能够建立任意三角形中边与其对角之间的关系.

本章围绕**正弦定理**与**余弦定理**展开. 已知三角形的部分边或角, 我们要解出其余元素. 正弦定理处理边角相对的关系, 余弦定理处理两边一夹角或三边的情形; 再配合面积公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$、$S = \frac{abc}{4R}$ 与 $S = pr$, 边、角、面积、外接圆半径与内切圆半径就连成一个整体. 于是三角函数的应用从直角三角形推广到任意三角形, 几何问题被翻译成代数运算. 范围、最值、四心、四线, 都可以用这两个定理处理.

2.1 正弦定理和余弦定理

2.1.1 正弦定理

2.1.1.1 来龙去脉

在直角三角形中, 边角关系由 $\sin A = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$ 给出. 已知一个锐角和一条边, 就可以求出其余边.

我们也想在任意三角形中把边和它的对角联系起来. 正弦定理指出, 在任意三角形中, 对边与其对角正弦值的比值是常数.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

定理 2.1 (正弦定理) 在一个非退化三角形中, 各边和它所对角的正弦值的比相等, 且等于其外接圆的直径. 即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \tag{2-1}$$

其中 R 为该三角形外接圆的半径.

2.1.1.2 定理的证明

正弦定理的几何证明把任意三角形转化为已熟悉的直角三角形.

证明 (几何法证明) 把任意三角形化归为直角三角形, 是证明的入口. 在任意非退化 $\triangle ABC$ 中, 从顶点 C 向对边 AB 作高 h_c. 在 Rt$\triangle ADC$ 中, 有 $h_c=b\sin A$. 在

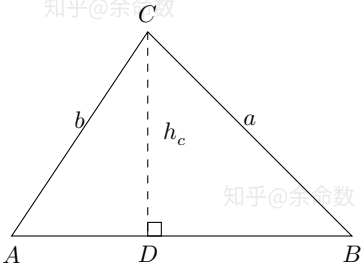
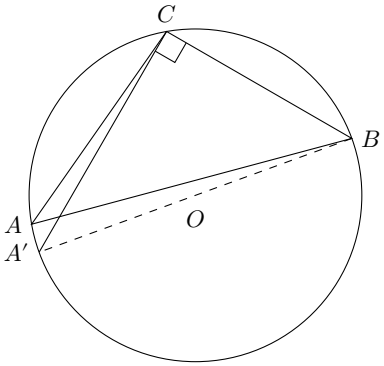


图 2.2 作高法证明

Rt$\triangle BDC$ 中, 有 $h_c=a\sin B$. 因此, $b\sin A=a\sin B$. 由于非退化三角形的内角均在 $(0,\pi)$ 内, 所以 $\sin A>0,\sin B>0$. 两边同除以 $\sin A\sin B$, 得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$. 同理, 作另一条高, 可以证明 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 故 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

尚需证明这个比值等于 $2R$. 为此, 构造一个以直径为斜边的直角三角形. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆, 圆心为 O. 连接 BO 并延长, 交圆于点 A'. 连接 $A'C$.



在 $\triangle A'BC$ 中, 因为 BA' 是直径, 所以 $\angle A'CB=90^\circ$. 又因为 A 和 A' 对应同一条弦 BC, 它们所成圆周角相等或互补, 因而 $\sin A=\sin A'$. 在 Rt$\triangle A'BC$ 中,

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\sin A' = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{BA'} = \frac{a}{2R}$. 所以 $\sin A = \frac{a}{2R}$, 即 $\frac{a}{\sin A} = 2R$. 与前面的比值等式合起来, 正弦定理得证. □

2.1.1.3 正弦定理的应用

正弦定理的常用变形

1. **边化角**: $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$.(用于消去边, 得到纯角的三角函数关系)
2. **角化边**: $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$.(用于消去角, 得到纯边的代数关系)
3. **边角比例**: $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$.(用于边角关系的整体代换)

适用场景

正弦定理联系的是一组对边与对角. 它主要解决以下两类问题.

1. 已知两角和任意一边, 求其他两边和另一角.(AAS 或 ASA)
2. 已知两边和其中一边的对角, 求另一边的对角.(SSA) 此种情形可能出现一解、两解或无解, 需结合边长与角的大小逐一讨论.

2.1.2 余弦定理

2.1.2.1 勾股定理的推广

勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$ 只在直角三角形中成立. 当 $\angle C \neq 90^\circ$ 时, $a^2 + b^2$ 与 c^2 不再相等. 余弦定理给出这个差值的表达式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

- 当 $\angle C$ 是锐角时, $\cos C > 0$, 故 $c^2 < a^2 + b^2$.
- 当 $\angle C$ 是钝角时, $\cos C < 0$, 故 $c^2 > a^2 + b^2$.
- 当 $\angle C = 90^\circ$ 时, $\cos C = 0$, 余弦定理化为 $c^2 = a^2 + b^2$, 即勾股定理.

余弦定理可视为勾股定理在任意三角形中的推广.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

定理 2.2 (余弦定理) 非退化三角形任何一边的平方,等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的积的两倍. 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{2-2}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \tag{2-3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{2-4}$$

其推论形式(用于求角)如下.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{2-5}$$

2.1.2.2 两种代数证明

余弦定理可以用坐标法和向量法两种代数方式证明.

证明 (坐标法证明) 将 $\triangle ABC$ 放置在平面直角坐标系中, 使顶点 C 与原点重合, 边 a, 即 CB 落在 x 轴正半轴上. 由三角函数定义, 各顶点坐标为 $C(0,0)$、$B(a,0)$、

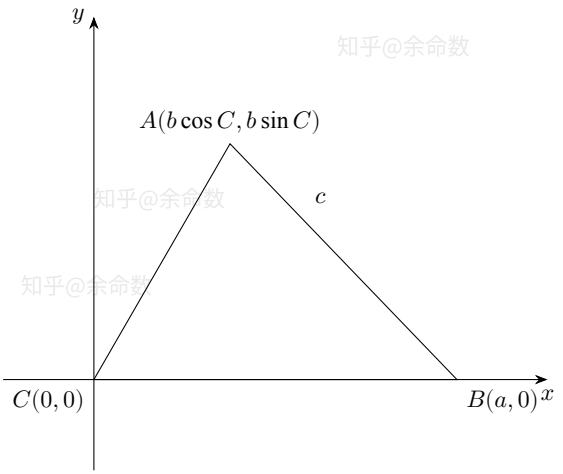


图 2.3 坐标法证明

$A(b\cos C, b\sin C)$. 用两点间距离公式计算边 c, 即线段 AB 的平方, 得

$$\begin{aligned} c^2 = |AB|^2 &= (b\cos C - a)^2 + (b\sin C - 0)^2 && \text{(距离公式)} \\ &= (b^2\cos^2 C - 2ab\cos C + a^2) + b^2\sin^2 C && \text{(展开)} \\ &= a^2 + b^2(\cos^2 C + \sin^2 C) - 2ab\cos C && \text{(合并同类项)} \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. && (\sin^2 C + \cos^2 C = 1) \end{aligned}$$

□

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 在 $\triangle ABC$ 中, 向量关系 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ 两边取数量积, 得

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}) \qquad \text{(数量积展开)}$$

$$c^2=|\overrightarrow{CB}|^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+|\overrightarrow{CA}|^2 \qquad \text{(差平方公式)}$$

由数量积定义, $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|\cos C=ab\cos C$. 代入得 $c^2=a^2-2ab\cos C+b^2$. □

2.1.2.3 余弦定理的应用

适用场景

余弦定理联系的是三边与一角. 它主要解决以下两类问题.

1. 已知三边, 求三个角.(SSS)
2. 已知两边和它们的夹角, 求第三边和其他两个角.(SAS)

同时, 余弦定理的推论可用于判断三角形形状.$b^2+c^2-a^2>0$ 时 A 为锐角; 等于 0 时为直角; 小于 0 时为钝角.

2.1.3 三角形面积公式

中学阶段常用的三角形面积公式有五个.

- **底高公式**: $S=\frac{1}{2}ah_a$, 是面积定义本身.
- **三角公式**: $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, 用角代替高, 是解三角形中最常用的面积公式.
- **外接圆公式**: $S=\frac{abc}{4R}$, 由正弦定理把面积与外接圆半径联系起来.
- **内切圆公式**: $S=pr$, 由内心分割三角形, 把面积与内切圆半径联系起来.
- **海伦公式**: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 面积完全由三边决定, 适用于已知三边 (SSS) 的情形.

2.1.3.1 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$

这是解三角形中最常用的面积公式. 它用已知角来计算通常不易直接得到的高.

证明 从最原始的底高公式 $S=\frac{1}{2}b\cdot h_b$ 出发. 这里的 h_b 是边 b 上的高. 如图, 从顶点 B 向边 AC 作高 BD, 其长度为 h_b. 在 Rt$\triangle BDC$ 中, 由正弦函数的定义有 $\sin C=\frac{BD}{BC}=\frac{h_b}{a}$, 因此 $h_b=a\sin C$. 把它代入以 b 为底的面积公式, 得 $S=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}b(a\sin C)=\frac{1}{2}ab\sin C$. 同理 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

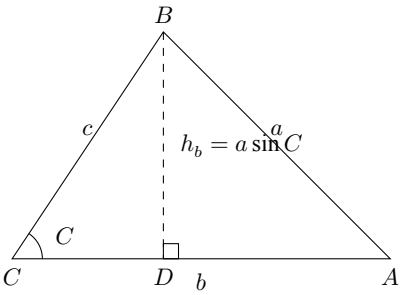


图 2.4 作高法推导三角公式

知乎@余命数

结构与应用

此公式的结构特征是**两边及夹角** (SAS). 已知或可求出两边及其夹角时, 用它求面积最直接. 反过来, 已知面积和两边, 也可用它求夹角的正弦值.

2.1.3.2 外接圆公式

面积与外接圆半径之间可由三角公式和正弦定理直接建立联系.

证明 由三角公式 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 和正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = 2R$, 得 $\sin C = \frac{c}{2R}$. 代入后 $S = \frac{1}{2}ab\left(\frac{c}{2R}\right) = \frac{abc}{4R}$. □

知乎@余命数

结构与应用

此公式联系的是三边与外接圆半径. 它常用于以下情形.

1. 已知三边和面积, 求外接圆半径 R.
2. 已知三边和外接圆半径 R, 求面积 S.
3. 把面积 S 与三边之积 abc 相互转化.

2.1.3.3 内切圆公式

内切圆公式把面积与内切圆半径联系起来, 证明方法是把三角形按内心分割成三个小三角形.

证明 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 内切圆半径为 r. 连接 IA、IB、IC, 则 $\triangle ABC$ 被分成 $\triangle IBC$, $\triangle ICA$ 和 $\triangle IAB$ 三个小三角形. 由内心性质, 内心 I 到三边的距离都等于内切圆半径 r, 这也就是三个小三角形的高. 因此 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle IBC} + S_{\triangle ICA} + S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r$. 记半周长 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 则 $S = pr$. □

知乎@余命数

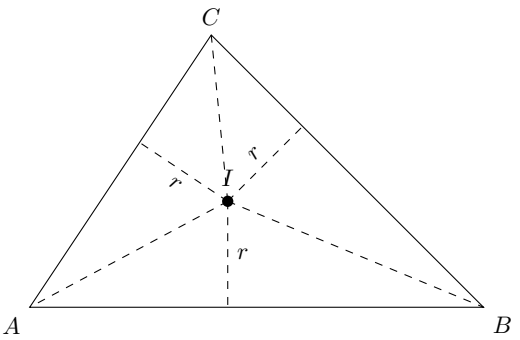


图 2.5　面积分割法推导内切圆公式

结构与应用

该公式联系面积、周长与内切圆半径. 求内切圆半径时, 先用海伦公式求出面积 S, 再用 $S=pr$ 求 r.

2.1.3.4 海伦公式

海伦公式不用角度, 只凭三边长度即可求面积. 其证明综合了三角恒等变换与代数变形.

证明 利用余弦定理把与角相关的面积公式转化为只与边长相关的表达式.

从三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 出发, 两边平方, 并利用 $\sin^2 C=1-\cos^2 C$ 和余弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, 可得

$$\begin{aligned}
S^2&=\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right)^2=\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2 C\\
&=\frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2 C)\\
&=\frac{1}{4}a^2b^2(1+\cos C)(1-\cos C)\\
&=\frac{1}{4}a^2b^2\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\\
&=\frac{a^2b^2}{4}\left(\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(\frac{2ab-(a^2+b^2-c^2)}{2ab}\right)\\
&=\frac{1}{16}\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)\\
&=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)
\end{aligned}$$

令半周长 $p=\frac{a+b+c}{2}$, 则 $a+b-c=2(p-c)$、$a+c-b=2(p-b)$、$b+c-a=2(p-a)$. 代入上式, 得

$$S^2=\frac{1}{16}\cdot(2p)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-a)=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两边开方, 得到

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

□

知乎@余命数

结构与应用

该公式只与三边长度有关. 已知三边 (SSS) 求面积时，用海伦公式不必先求角.

2.1.4 三角形的四心

知乎@余命数

正弦定理与余弦定理既用于边角的计算, 也联系着三角形的代数信息与几何形态. 三角形四心, 即**外心**、**内心**、**重心**、**垂心**, 分别是中垂线、角平分线、中线、高线这四组特殊直线的交点, 本节给出它们的定义、性质与向量公式.

2.1.4.1 外心

给定不在同一直线上的三点 A、B、C, 到它们距离相等的点 P 就是外接圆的圆心. 这个圆称为三角形的**外接圆**, 圆心称为**外心**.

定义 2.1 (外心) • **几何定义**三角形三条边的**垂直平分线**(中垂线)的交点.

• **性质定义**到三角形三**个顶点距离相等**的点. 这个距离就是外接圆的半径 R.

知乎@余命数

性质 (外心的位置特征) 外心的位置由三角形的形状决定.

- **锐角三角形**外心在三角形**内部**.
- **直角三角形**外心在**斜边的中点**.
- **钝角三角形**外心在三角形**外部**.

证明 由后文外心的向量性质可得外心 O 的重心坐标为

$$O=\frac{(\sin 2A)A+(\sin 2B)B+(\sin 2C)C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}.$$

又

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C>0.$$

知乎@余命数

一个点的重心坐标全为正时在三角形内部; 有一个坐标为 0 且其余为正时在对应边上; 有一个坐标为负时在三角形外部.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

若三角形为锐角三角形,则 A,B,C 均小于 90°,故 $\sin 2A,\sin 2B,\sin 2C$ 全为正,外心在内部. 若三角形为直角三角形,例如 $C=90^\circ$,则 $\sin 2C=0$,且 $A+B=90^\circ$ 给出 $\sin 2A=\sin 2B$,所以外心为 AB 的中点,即斜边中点. 若三角形为钝角三角形,则钝角对应的 $\sin 2A$、$\sin 2B$ 或 $\sin 2C$ 为负,外心在三角形外部. □

引理 2.1 (外心与中心角) 若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,则对应中心角与圆周角满足

$$\cos\angle BOC=\cos 2A,\quad \cos\angle COA=\cos 2B,\quad \cos\angle AOB=\cos 2C.$$

特别地,在锐角三角形中,有 $\angle BOC=2A$、$\angle COA=2B$、$\angle AOB=2C$.

证明 以 BC 所在弧为例. 圆心角 $\angle BOC$ 与圆周角 $\angle BAC$ 截同一条弧 BC. 由圆周角定理,同弧所对圆心角等于圆周角的两倍,因而在锐角情形下

$$\angle BOC=2A.$$

知乎@余命数

若 A 为钝角,则向量 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 之间的夹角取较小中心角,为 $2\pi-2A$,其余情形同理. 因为

$$\cos(2\pi-2A)=\cos 2A,$$

所以总有 $\cos\angle BOC=\cos 2A$. 对另外两对顶点同理可得其余两个等式. □

知乎@余命数　　知乎@余命数

阅读提示

使用外心向量时,真正需要的常常是点积中的余弦关系. 对于钝角三角形,例如若 A 为钝角,则较小的 $\angle BOC=2(\pi-A)$,但其余弦仍等于 $\cos 2A$.

定理 2.3 (外心与正弦定理的绑定关系) 外心与正弦定理的联系是它的主要性质.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

证明 见正弦定理的证明. □

推论 2.1 (外心的向量性质) 若 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,则

$$(\sin 2A)\overrightarrow{OA}+(\sin 2B)\overrightarrow{OB}+(\sin 2C)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 设 $\vec{S}=(\sin 2A)\overrightarrow{OA}+(\sin 2B)\overrightarrow{OB}+(\sin 2C)\overrightarrow{OC}$. 证明 $\vec{S}=\vec{0}$ 只需证明它同时与两个不共线向量垂直, 这里取 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$.

$\vec{S}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 的点积为

$$\vec{S}\cdot\overrightarrow{OA}=(\sin 2A)(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})+(\sin 2B)(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA})+(\sin 2C)(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}).$$

O 是外心, 设外接圆半径为 R, 则 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$. 由点积定义与引理 2.1, 我们写出.

- $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2$;
- $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2\cos(2C)$;
- $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2\cos(2B)$.

即使钝角三角形, 例如 C 为钝角, 仍有 $\cos(\angle AOB)=\cos(2(\pi-C))=\cos(2C)$, 上式同样成立.

代入得

$$\vec{S}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2[\sin(2A)+\sin(2B)\cos(2C)+\sin(2C)\cos(2B)]$$

由和角公式, $\sin(2B)\cos(2C)+\sin(2C)\cos(2B)=\sin(2B+2C)$, 故

$$\vec{S}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2[\sin(2A)+\sin(2B+2C)]$$

又 $A+B+C=\pi$, 所以 $2B+2C=2\pi-2A$, 于是

$$\sin(2B+2C)=\sin(2\pi-2A)=-\sin(2A)$$

因此

$$\vec{S}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2[\sin(2A)-\sin(2A)]=0.$$

同理可得 $\vec{S}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 不共线, 则同时与二者垂直的平面向量只能是零向量. 若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线, 则 AB 为外接圆直径, $C=90^\circ$, 此时同样的对称计算给出 $\vec{S}\cdot\overrightarrow{OC}=0$; 而 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 不共线, 仍得到 $\vec{S}=\vec{0}$.

因此

$$(\sin 2A)\overrightarrow{OA}+(\sin 2B)\overrightarrow{OB}+(\sin 2C)\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

□

2.1.4.2 内心

来龙去脉

在三角形内部到三边距离相等的点是内切圆的圆心, 称为**内心**.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 2.2 (内心)　• **几何定义**三角形三条**内角平分线**的交点.
• **性质定义**到三角形三**边距离相等**的点. 这个距离就是内切圆的半径 r.

性质 (内心的位置特征) 内心永远在三角形**内部**.

证明 此结论可通过内心的重心坐标定义直接证明. 一个点 P 位于 $\triangle ABC$ 内部的充分必要条件是, 存在三个正实数 $\alpha,\beta,\gamma>0$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=1$, 使得对于任意参考点 O, 都有 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$.

内心的向量公式为 $\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$. 它可以重写为

$$\overrightarrow{OI}=\left(\frac{a}{a+b+c}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{OB}+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{OC}$$

令 $\alpha=\frac{a}{a+b+c}$, $\beta=\frac{b}{a+b+c}$ 及 $\gamma=\frac{c}{a+b+c}$. 由于 a,b,c 是三角形的边长, 它们必然是正数, 即 $a>0,b>0,c>0$. 因此, 分母 $a+b+c$ 也是正数, 这确保了系数 α,β,γ 均为正数.

检验系数之和.

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

由于内心 I 的重心坐标系数满足 $\alpha,\beta,\gamma>0$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=1$ 的条件, 根据内部点的定义, 内心 I 必定永远位于 $\triangle ABC$ 的内部.

证毕. □

定理 2.4 (内心与面积公式) 内心与面积公式 $S=pr$ 把内切圆半径 r、半周长 p 和面积 S 联系起来.

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr$$

证明 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I, 内切圆半径为 r. 连接 IA,IB,IC, 则 $\triangle ABC$ 被分成三个小三角形 $\triangle BIC$, $\triangle CIA$ 和 $\triangle AIB$.

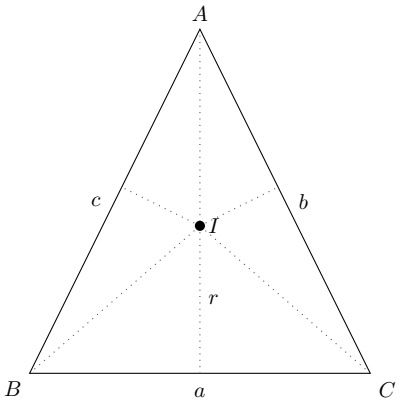
于是

$$S=S_{\triangle BIC}+S_{\triangle CIA}+S_{\triangle AIB}$$

内心 I 到三边的距离都等于 r, 这是每个小三角形以原边为底时的高. 因此

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr,$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数



其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$. □

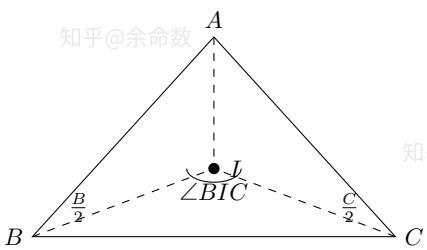
知乎@余命数

引理 2.2 (内心与顶点角) 以 $\angle BIC$ 为例, 内心与两顶点连线所成角和第三个顶点角之间有固定关系.

$$\angle BIC=90^\circ+\frac{A}{2}$$

证明 如图所示, 考虑 $\triangle BIC$. 根据三角形内角和定理, 有.

$$\angle BIC+\angle IBC+\angle ICB=180^\circ$$



I 是 $\triangle ABC$ 的内心, 所以 BI, CI 分别是 $\angle B, \angle C$ 的平分线.

$$\angle IBC=\frac{1}{2}\angle B,\qquad \angle ICB=\frac{1}{2}\angle C.$$

代入 $\triangle BIC$ 的内角和公式, 得

$$\angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

又 $\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$, 故

$$\angle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ+\frac{A}{2}.$$

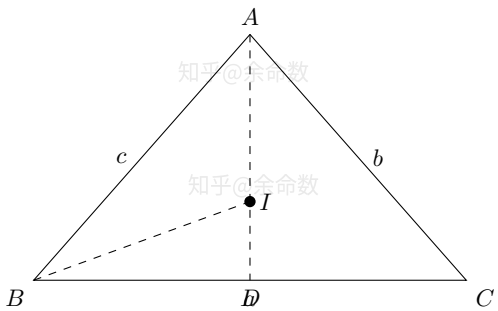
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

□

推论 2.2 (内心的向量表示) 以任意点 O 为参考点, 内心的向量表达式用对边边长作为权重.

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$

证明 现用角平分线定理和定比分点公式推导.



设 $\angle A$ 的平分线交边 BC 于点 D, 由角平分线定理

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b},$$

于是

$$\overrightarrow{OD}=\frac{b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{b+c}. \tag{1}$$

内心 I 在角平分线 AD 上. 在 $\triangle ABD$ 中, BI 也是 $\angle B$ 的平分线, 再用角平分线定理得

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{b+c}{a}.$$

因此

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+(b+c)\overrightarrow{OD}}{a+b+c}.$$

把 (1) 代入并约去 $b+c$, 即得

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

□

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

阅读提示

该公式常用于判定内心的位置或用内心求参数.

2.1.4.3 重心

来龙去脉

三角形三条**中线**的交点称为**重心**, 它也是均匀薄板的质量中心.

定义 2.3 (重心) 三角形三条**中线**(顶点与对边中点的连线)的交点.

知乎@余命数

性质 (重心的基本性质)

- 重心总在三角形**内部**.
- 重心把每条中线分成 **2:1** 的两段, 靠近顶点的段长是靠近中点段长的两倍. 设 D 为 BC 中点, 则 $AG:GD=2:1$.
- 三条中线把三角形分成**六个面积相等**的小三角形.

证明 设 D,E,F 分别为 BC,CA,AB 的中点. 两条中线 AD 与 BE 交于 G. 由中点向量公式,

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2},\qquad \overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}{2}.$$

解直线 AD 与 BE 的交点可得

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}.$$

因此 G 同时也在第三条中线 CF 上, 三条中线共点. 该式又可写成

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC},$$

三个正系数之和为 1, 所以 G 在三角形内部.

由 D 为 BC 中点,

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}}{3},$$

说明 G 位于中线 AD 上且 $AG:GD=2:1$. 对另外两条中线同理. 三条中线把原三角形先分成三个等底等高的小三角形, 再由 $2:1$ 分点关系把每个小三角形二等分, 因而得到六个面积相等的小三角形. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.5 (重心的向量表示) 以任意点 O 为参考点, 重心 G 的向量表达式是三顶点向量的算术平均.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

证明 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, D 为边 BC 的中点, O 为参考点.

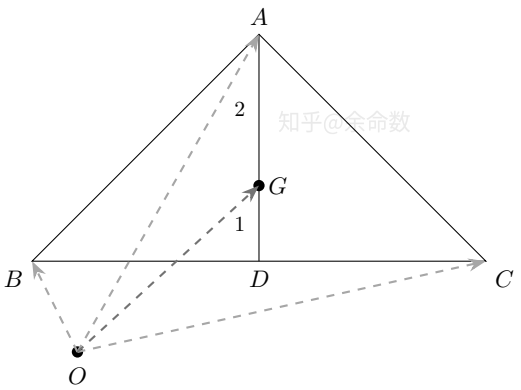


图 2.6　重心 G 在中线 AD 上且 $AG : GD = 2 : 1$

知乎@余命数

D 是 BC 的中点, 所以

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}. \tag{1}$$

又 $AG : GD = 2 : 1$, 由定比分点公式

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OD}}{3}.$$

把 (1) 代入并化简, 即得

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$

□

推论 2.3　重心满足

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

证明 由定理 2.5, 有

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由定理 2.5, $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. 又

$$\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG},\quad \overrightarrow{GB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG},\quad \overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG},$$

三式相加得

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}.$$

□

知乎@余命数

阅读提示

上述推论可用于判定重心, 也常用于向量运算.

知乎@余命数

定理 2.6 (边与中线的关系) 边长的平方和与中线长的平方和满足.

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

证明 由中线长公式

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2,\quad 4m_b^2=2a^2+2c^2-b^2,\quad 4m_c^2=2a^2+2b^2-c^2.$$

知乎@余命数

三式相加得

$$4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2),$$

整理即得

知乎@余命数

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2).$$

□

2.1.4.4 垂心

来龙去脉

三角形的三条高线, 或其延长线交于一点, 这个交点称为**垂心**.

定义 2.4 (垂心) 三角形三条**高线**(或其延长线)的交点.

性质 (垂心的位置特征) 与外心类似, 垂心的位置由三角形形状决定.

- **锐角三角形**垂心在三角形**内部**.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **直角三角形**垂心就是**直角顶点**.
- **钝角三角形**垂心在三角形**外部**.

证明 高线从顶点出发并垂直于对边所在直线. 若三角形为锐角三角形, 每条高都落在三角形内部, 三条高的交点也在内部. 若三角形为直角三角形, 两条直角边本身就是高, 它们交于直角顶点, 故垂心为直角顶点.

若三角形为钝角三角形, 设 $A > 90^\circ$. 此时从 B、C 引出的两条高分别落在边 AC、AB 的延长线上, 它们的交点位于三角形外部; 第三条高也经过该点. 因此垂心在三角形外部. □

性质 (垂足圆性质) 垂心与顶点、垂足之间常构成共圆关系. 例如, 若 D, E 分别是从 A, B 向 BC, AC 作高得到的垂足, 则 A, B, D, E 四点共圆且直径为 AB, C, D, H, E 四点共圆且直径为 CH.

证明 因为 D 是从 A 向 BC 作高的垂足,所以 $AD \perp BC$. 又 $D \in BC$,故 $AD \perp BD$, 即 $\angle ADB = 90^\circ$. 因为 E 是从 B 向 AC 作高的垂足, 所以 $BE \perp AC$. 又 $E \in AC$, 故 $BE \perp AE$, 即 $\angle AEB = 90^\circ$. 所以 D, E 都在以 AB 为直径的圆上, 即 A, B, D, E 四点共圆.

设 H 为垂心. 由于 H 在高 AD 上, 有 $HD \perp CD$, 故 $\angle CDH = 90^\circ$. 同理 H 在高 BE 上, 有 $HE \perp CE$, 故 $\angle CEH = 90^\circ$. 因此 D, E 都在以 CH 为直径的圆上, 即 C, D, H, E 四点共圆. □

定理 2.7 (垂心与外心的向量关系) 若 O 为外心, H 为垂心, 则以外心 O 为原点时有

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

证明 以外心 O 为原点, 记

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OC}.$$

因为 O 是外心, 所以 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = R$. 令点 H 满足

$$\overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

则

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} + \vec{c}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

而

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}.$$

于是

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0.$$

因此 $AH \perp BC$. 同理 $BH \perp AC$, $CH \perp AB$. 所以 H 为垂心, 于是

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

□

阅读提示

由这个公式可直接得到 $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 并由此证明 $AH \perp BC$.

定理 2.8 (欧拉线定理) 外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线, 这条线称为欧拉线; 且 G 在 O 与 H 之间, 满足

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \quad (\text{即} OG : GH = 1 : 2)$$

证明 用向量法, 取**外心 O** 作为原点.

以 O 为原点时,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \qquad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

两式比较得

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

因此 $\overrightarrow{OH}$ 与 $\overrightarrow{OG}$ 共线, O、G、H 三点在同一直线上. 又因为标量 3>0,G 在射线 OH 上, 且

$$|\overrightarrow{OH}| = 3|\overrightarrow{OG}|, \quad |\overrightarrow{GH}| = 2|\overrightarrow{OG}|,$$

所以 $OG : GH = 1 : 2$. □

阅读提示

欧拉线说明 O、G、H 的位置关系由比值固定. 已知其中两点, 即可确定第三点.

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

四心向量公式

设 O 为参考点, 则

- 重心 G 满足 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$;
- 内心 I 满足 $\overrightarrow{OI}=\dfrac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$;
- 垂心 H 满足 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$(O 为外心).

这些公式常分别与外接圆半径、内切圆半径、中线、高线等各组条件配合使用.

2.1.5 圆幂定理与托勒密定理

正弦定理和余弦定理处理的是三角形的边角关系; 当问题中出现圆时, 还需要圆内线段关系的工具. **圆幂定理**与**托勒密定理**用乘积等式把圆与线段长度联系起来.

在平面上给定一个圆和一个点 P, 过 P 作任意直线与圆相交, 则该直线被圆截得的两条线段长度之积是常数. 这个常数称为点 P 关于该圆的**幂**.

按点 P 与圆的位置关系, 圆幂定理分为三种情形. 点在圆内、圆上或圆外.

2.1.5.1 相交弦定理

定理. 圆内的两条相交弦, 被交点分成的两条线段长的积相等. 如图, 若圆内两弦 AB、CD 交于点 P, 可得

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD \tag{2-6}$$

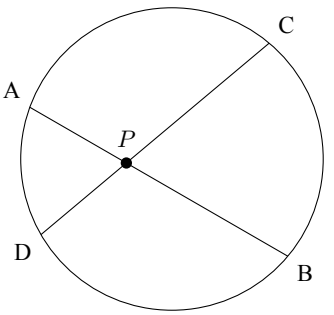


图 2.7　相交弦定理

证明 (证明) 连接 AC 与 BD. 在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PDB$ 中,

- $\angle APC=\angle DPB$(对顶角相等);

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- $\angle PAC = \angle PDB$(同弧 $\overset{\frown}{CB}$ 所对的圆周角相等).

因此 $\triangle PAC \sim \triangle PDB$(AA 相似). 对应边成比例, 有 $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$. 于是 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. □

2.1.5.2 切割线定理

定理. 从圆外一点引圆的切线和割线, 切线长的平方等于该点到割线与圆两交点距离的乘积. 如图, 若 PT 是圆的切线(T 为切点), PAB 是割线, 可得

$$PT^2 = PA \cdot PB \tag{2-7}$$

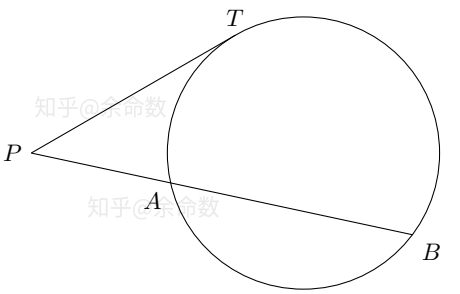


图 2.8 切割线定理

证明 (证明) 连接 AT 与 BT. 在 $\triangle PAT$ 和 $\triangle PTB$ 中,

- $\angle APT = \angle TPB$(公共角);
- $\angle PTA = \angle PBT$(弦切角定理).

因此 $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ (AA 相似). 对应边成比例, 有 $\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$. 于是 $PT^2 = PA \cdot PB$. □

三种形态的圆幂定理统一描述同一事实. 点 P 关于圆 O（半径为 R）的幂 $p(P) = |PO^2 - R^2|$ 等于上述各定理中那个不变的乘积.

2.1.5.3 托勒密定理

圆内接四边形的对角线关系

圆内接四边形的两组对边乘积之和等于两条对角线的乘积. 这就是托勒密定理.

托勒密定理. 若四边形 $ABCD$ 内接于圆, 则

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD \tag{2-8}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

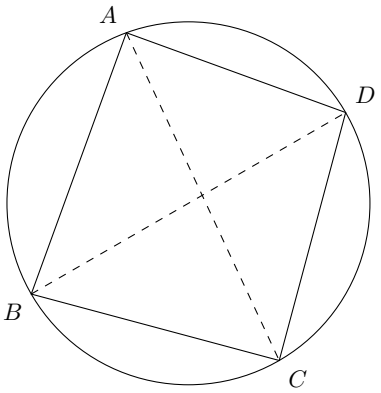


图 2.9　托勒密定理

知乎@余命数

证明 在对角线 AC 上取一点 K, 使 $\angle ABK = \angle DBC$, 再构造两对相似三角形.

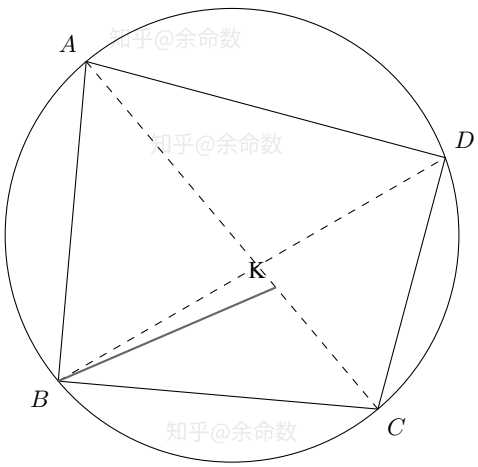


图 2.10　证明辅助线

知乎@余命数

如图, 对角线 AC 上取点 K 使 $\angle ABK = \angle DBC$.

先看 $\triangle ABK$ 与 $\triangle DBC$. 在两三角形中,

- $\angle ABK = \angle DBC$(作图);
- $\angle BAK = \angle BDC$(同弧 $\overset{\frown}{BC}$ 所对的圆周角相等).

故 $\triangle ABK \sim \triangle DBC$, 于是

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AK}{DC}, \quad AB \cdot DC = AK \cdot DB. \tag{1}$$

再看 $\triangle ABD$ 与 $\triangle KBC$. 在两三角形中,

- $\angle ABD = \angle KBC$;
- $\angle ADB = \angle KCB$(同弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆周角相等).

知乎@余命数

故 $\triangle ABD \sim \triangle KBC$, 于是

$$\frac{AD}{KC} = \frac{BD}{BC}, \quad AD \cdot BC = KC \cdot BD. \tag{2}$$

将 (1) 与 (2) 相加,

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = (AK + KC) \cdot BD = AC \cdot BD.$$

□

应用与拓展

- **托勒密不等式**任意凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$, 等号成立当且仅当四边形内接于圆. 该不等式可用于证明四点共圆, 也可处理某些几何不等式.
- **三角恒等式**托勒密定理应用于直径为 1 的圆内接四边形, 可导出两角和与差的正弦、余弦公式.

知乎@余命数

2.1.6 重要线段与关联定理

知乎@余命数 知乎@余命数

中线、角平分线、高线除了围成三角形的重心、内心、垂心外, 它们各自的长度也是解三角形中的常见量. 本节给出它们的长度公式, 这些公式是余弦定理与面积公式的直接应用.

2.1.6.1 中线

知乎@余命数

已知三边求中线长度时, 可在被中线分成的两个小三角形中分别使用余弦定理, 再利用互补角消去余弦项.

知乎@余命数

定理 2.9 (中线长公式) 设 m_a 为 $\triangle ABC$ 中边 a 上的中线, 则其长度为.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \tag{2-9}$$

等价地, 公式也常写为 $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

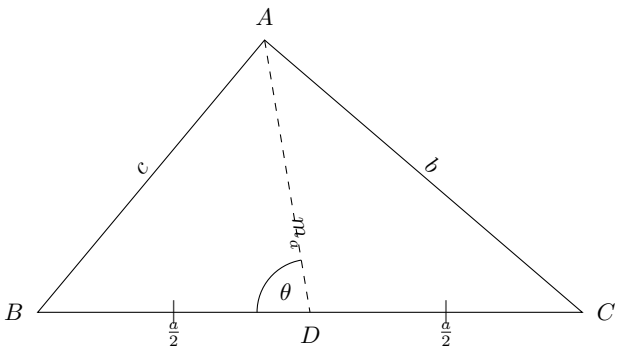
证明 设 D 为 BC 的中点, 则 AD 为中线 m_a, 且 $BD = DC = \frac{a}{2}$.

在 $\triangle ABD$ 中, 设 $\angle ADB = \theta$. 由余弦定理,

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a m_a \cos\theta. \tag{1}$$

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



在 $\triangle ACD$ 中, $\angle ADC = \pi - \theta$, 故 $\cos\angle ADC = -\cos\theta$. 由余弦定理,

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + am_a\cos\theta. \tag{2}$$

(1)+(2) 消去 $\cos\theta$:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2},$$

整理即得 $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$. □

阿波罗尼斯定理

中线长公式等价于 $b^2 + c^2 = 2\left(m_a^2 + (\frac{a}{2})^2\right)$, 即阿波罗尼斯定理.

2.1.6.2 角平分线

角平分线把角与边联系起来. 我们可用面积法求它的长度, 先把大三角形分成两个小三角形, 使它们的面积之和等于原三角形面积. 此外, 角平分线还满足角平分线定理.

定理 2.10 (角平分线长公式) 设 t_a 为 $\triangle ABC$ 中角 A 的内角平分线, 则其长度为.

$$t_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \tag{2-10}$$

证明 设 AD 为角 A 的平分线 t_a, 则 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{A}{2}$. 由面积关系

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$$

得

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ct_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bt_a\sin\frac{A}{2}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

用 $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ 并约去 $\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}$（$A \in (0,\pi)$ 时不为零），

$$2bc\cos\frac{A}{2} = (b+c)t_a,$$

于是 $t_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. □

另一个常用形式

角平分线公式还有纯边长形式

$$t_a^2 = bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right],$$

可由 $\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$ 与余弦定理导出.

知乎@余命数

定理 2.11 (角平分线定理) 三角形的内角平分线把对边分成两段, 这两段的比等于夹此角两边的比. 若 AD 是角 A 的平分线, 则

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}, \quad \text{即} \quad \frac{c}{b} = \frac{BD}{CD}. \tag{2-11}$$

证明 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中分别使用正弦定理,

$$\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{c}{\sin\angle ADB}, \qquad \frac{CD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{b}{\sin\angle ADC}.$$

由于 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$, 所以 $\sin\angle ADB = \sin\angle ADC$. 约去 $\sin\frac{A}{2}$ 即得 $\frac{c}{b} = \frac{BD}{CD}$. □

2.1.6.3 高线

高线的长度既可用三角函数定义直接求, 也可通过面积公式间接求.

定理 2.12 (高线长) 设 h_a 为 $\triangle ABC$ 中边 a 上的高, 其长度可以通过以下方式求得

1. **利用三角函数定义** $h_a = c\sin B = b\sin C$.
2. **利用面积公式** $S = \frac{1}{2}ah_a \implies h_a = \frac{2S}{a}$.

证明 设从 A 向 BC 作垂线，垂足为 D，则 $AD = h_a$. 在直角三角形 ABD 中，$h_a = AB\sin B = c\sin B$; 在直角三角形 ACD 中，$h_a = AC\sin C = b\sin C$. 因此

$$h_a = c\sin B = b\sin C.$$

另一方面，以 $BC = a$ 为底、h_a 为高计算面积，有

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

因为 $a > 0$，整理得

$$h_a = \frac{2S}{a}.$$

知乎@余命数

□

解题思路

- 已知两边及夹角，如 b, c, A 时，先用余弦定理求出 a，再由 $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ 和 $h_a = \frac{2S}{a}$ 求高.
- 已知两角及一边，如 A, B, c 时，可先用正弦定理求出 b，再由 $h_a = b\sin C (C = \pi - A - B)$ 求高.

2.2 范围与综合

知乎@余命数

2.2.1 取值范围

给定一个三角形，我们常问它的某条边、某个角或某个面积表达式的取值范围. 这类问题可分三步处理. 先用正弦定理或余弦定理把多变量几何关系化归为单变量函数. 再依据三角形存在的约束确定这个函数的定义域. 最后用辅助角公式、二次函数或导数等工具求它的最值或范围.

2.2.1.0.1 构建目标函数 我们把问题中的多个边、角几何量经正弦定理与余弦定理改写，最终化归为一个以单个角或单个边长比值为自变量的函数.

- **正弦定理**是处理边的齐次式或比例式的首选工具. 对于形如 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 或 $\frac{a+b}{c}$ 的表达式，其代数结构的对称性表明其值仅与三角形的形状，即角有关，与具体尺寸无关. 利用 $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ 边化角，可消去外接圆半径 R 这一尺寸因素，得到纯粹的三角函数关系式.
- **余弦定理**在处理含边长平方和或已知两边一夹角的情形时直接决定结果，它直接建立起边与角之间的非线性方程.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

随后, 必须利用三角形内角和定理 $A+B+C=\pi$ 消去多余的角变量, 从而完成单变量目标函数的构建.

2.2.1.0.2 确定定义域 一个代数表达式能描述几何对象, 当且仅当该对象真实存在. 因此, 我们先用三角形存在的几何约束确定函数的定义域, 再分析函数.

- **基本约束**. 三角形的任意内角都必须在 $(0,\pi)$ 范围内.
- **结构约束**. 在变量化归后, 由自变量表示的其他角也必须满足基本约束. 例如, 若已将其他角用变量角 B 表示为 $A=\frac{\pi}{2}-2B, C=\frac{\pi}{2}+B$, 则必须同时满足 $B>0, A>0, C>0$ 所构成的不等式组, 从而解出 B 的最终有效范围.
- **附加约束**. 若题目明确限定了三角形的形状, 如锐角三角形, 则必须增加所有角均小于 $\frac{\pi}{2}$ 的条件, 这通常需要通过余弦定理转化为关于边或角的不等式.

忽略对定义域的精确界定, 是此类问题中最根本的错误来源.

2.2.1.0.3 分析与求解 于是原问题化为一个定义在精确区间上的函数分析问题. 我们根据目标函数的具体形式, 选用相应的代数或分析工具.

- 对于形如 $y=a\sin x+b\cos x$ 的函数, **辅助角公式**是标准处理方法.
- 对于形如 $y=a\sin^2 x+b\sin x+c$ 的函数, 可通过换元法转化为**二次函数**在闭区间上的最值问题.
- 对于更复杂的函数, **求导法**是判断其单调性、寻找极值点的最通用的工具.

例题 2.1 (2022 年 6 月新高考 I 卷第 18 题) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$. (1) 若 $C=\frac{2\pi}{3}$, 求 B; (2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

解 先把给定的三角恒等式化简, 以得到角 A 与 B 之间的关系. 右侧用二倍角

$$\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{1+(2\cos^2 B-1)}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\tan B.$$

左侧用诱导公式与半角公式

$$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-A)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-A)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right).$$

原式化为 $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2})=\tan B$. 令 $x=\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, 则 $B=x+k\pi$. 由 $B\in(0,\pi)$, 只可能 $k=0$ 或 1; 若 $k=1$ 则 $A+B>\pi$, 与内角和矛盾. 故 $k=0$, $\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}=B$, 即 $A+2B=\frac{\pi}{2}$.

(1) 已知 $C=\frac{2\pi}{3}$, 则 $A+B=\pi-C=\frac{\pi}{3}$. 联立 $\begin{cases}A+2B=\frac{\pi}{2}\\ A+B=\frac{\pi}{3}\end{cases}$, 相减得 $B=\frac{\pi}{6}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值. 该式关于边长二次齐次, 其值只依赖形状. 由正弦定理 $a=2R\sin A$ 等,

$$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

代入 $A=\frac{\pi}{2}-2B, C=\frac{\pi}{2}+B$:

$$\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\cos^2(2B)+\sin^2 B}{\cos^2 B}.$$

内角为正给出 $B\in(0,\frac{\pi}{4})$. 令 $t=\sin^2 B\in(0,\frac{1}{2})$, 问题化为求 $g(t)=\frac{(1-2t)^2+t}{1-t}=\frac{4t^2-3t+1}{1-t}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上的最小值. 变形得 $g(t)=-4t-1+\frac{2}{1-t}$, 求导 $g'(t)=-4+\frac{2}{(1-t)^2}$. 令 $g'=0$ 得 $t=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,\frac{1}{2})$; 在该点左侧 $g'<0$、右侧 $g'>0$, 故为最小值点,

$$g\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)=-4\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)-1+\frac{2}{\sqrt{2}/2}=4\sqrt{2}-5.$$

综上, (1) $B=\frac{\pi}{6}$; (2) 最小值为 $4\sqrt{2}-5$.

例题 2.2 (2023 年 8 月浙江省 A9 协作体返校联考第 17 题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 且满足 $a\sin C\cos B+b\sin A\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. (1) 求角 A; (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $4\sin^2 B-4\sin B\sin C$ 的取值范围.

解 对第 (1) 问, 由已知条件 $a\sin C\cos B+b\sin A\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 出发. 根据正弦定理, 有 $b\sin A=a\sin B$. 将此关系代入原式中, 可以消去变量 b, 使得 a 成为一个可约去的公因子.

$$a\sin C\cos B+(a\sin B)\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

由于 $a\neq 0$, 提取公因子 a 并利用和角公式, 可得

$$\sin(B+C)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

在 $\triangle ABC$ 中, $B+C=\pi-A$, 故 $\sin(\pi-A)=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由于 $A\in(0,\pi)$, 满足此条件的角 A 为 $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

对第 (2) 问, 欲求 $4\sin^2 B-4\sin B\sin C$ 的取值范围. 首先, 将目标表达式化归为关于单个角 B 的函数. 由于第 (2) 问已限定 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, A 必为锐角; 结合 (1) 可得 $A=\frac{\pi}{3}$, 从而 $C=\frac{2\pi}{3}-B$. 代入表达式中.

$$f(B)=4\sin^2 B-4\sin B\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= 4\sin^2 B - 4\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B + \frac{1}{2}\sin B\right)$$
$$= 2\sin^2 B - \sqrt{3}\sin(2B)$$

为了便于分析，将所有项都用 $2B$ 的三角函数来表示. 利用降幂公式 $2\sin^2 B = 1-\cos(2B)$, 上式可化为.

$$f(B) = 1 - (\sqrt{3}\sin(2B) + \cos(2B))$$

使用辅助角公式进行合并, 得到 $f(B) = 1 - 2\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$.

接下来确定自变量 B 的精确定义域. 锐角三角形的几何约束给出如下代数不等式组:

$$\begin{cases} A = \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} & \text{(已满足)} \\ B \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ C = \frac{2\pi}{3} - B \in (0, \frac{\pi}{2}) \implies \frac{\pi}{6} < B < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

将 B 的所有约束条件取交集, 得到其最终的取值范围为 $B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

最后，基于 B 的定义域来求解函数的值域. 由 $B \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$，可得 $2B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6})$. 在此开区间内, $\sin(2B + \frac{\pi}{6})$ 的取值从 $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ 单调递减至 $\sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$. 由于区间为开区间, 端点值均无法取到, 故 $\sin(2B + \frac{\pi}{6}) \in (-\frac{1}{2}, 1)$. 对该不等式进行代数变换, 即可得到 $f(B)$ 的范围.

$$-2\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) \in (-2, 1)$$

$$f(B) = 1 - 2\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) \in (-1, 2)$$

(1) $A = \frac{\pi}{3}$ 或 $A = \frac{2\pi}{3}$.(2) $4\sin^2 B - 4\sin B\sin C$ 的取值范围为 $(-1, 2)$.

方法论要点

上面的例子有一个共同模式. 先把三角形的几何约束化为单变量函数的定义域, 再用三角恒等式、辅助角公式或基本不等式求它的最值或范围.

1. **翻译与化归**. 利用正弦定理与余弦定理, 将问题中的边、角关系统一为纯粹的三角函数关系式. 随后, 利用内角和定理消去多余变量, 构建单变量目标函数.
2. **定义域的确定**. 这是解题的逻辑基础. 必须从三角形存在的固有几何约束, 如所有内角为正以及题目附加的条件约束, 如锐角三角形出发,

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将它们全部转化为关于自变量的不等式组, 从而精确界定函数的定义域.

3. **函数分析**. 在确定的定义域上, 根据函数的形式, 灵活选用辅助角公式、二次函数理论或求导法等分析工具, 求解其最值或范围.

求范围时容易忽略一点. 由自变量表示的其他角也必须为正. 边化角与角化边的选择若不明显, 可先观察表达式是否关于边齐次, 或是否能通过恒等变形消去角.

例题 2.3 (2023 年 1 月重庆康德卷一诊第 17 题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $b = c(\cos A + \sin A)$. (1) 求角 C; (2) 求 $\frac{a+\sqrt{2}b}{c}$ 的最大值.

解 对第 (1) 问, 已知条件 $b = c(\cos A + \sin A)$ 是一个典型的边角混合关系式. 解决此类问题的要点在于统一语言体系. 利用正弦定理将边长 b, c 替换为对应角的正弦, 是消除边长、得到纯角关系式的最直接路径.

根据正弦定理, 有 $b = 2R\sin B$ 和 $c = 2R\sin C$. 代入已知等式中,

$$2R\sin B = 2R\sin C(\cos A + \sin A)$$

约去非零公因式 $2R$, 得到一个纯粹的角的关系式.

$$\sin B = \sin C\cos A + \sin C\sin A$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $B = \pi - (A + C)$, 可得 $\sin B = \sin(\pi - (A + C)) = \sin(A + C)$. 利用和角公式展开, 得 $\sin B = \sin A\cos C + \cos A\sin C$. 联立上述两个关于 $\sin B$ 的表达式, 可得

$$\sin A\cos C + \cos A\sin C = \sin C\cos A + \sin C\sin A$$

整理上式, 消去 $\cos A\sin C$ 项, 得到 $\sin A\cos C = \sin C\sin A$. 由于 $A \in (0, \pi)$, 故 $\sin A \neq 0$. 两边同除以 $\sin A$ 可得 $\cos C = \sin C$. 又因 $C \in (0, \pi)$, 满足此条件的角 C 只能是 $C = \frac{\pi}{4}$.

对第 (2) 问, 求 $\frac{a+\sqrt{2}b}{c}$ 的最大值. 该表达式是关于边长的一次齐次式, 同样应用正弦定理进行边化角.

$$\frac{a + \sqrt{2}b}{c} = \frac{2R\sin A + \sqrt{2}(2R\sin B)}{2R\sin C} = \frac{\sin A + \sqrt{2}\sin B}{\sin C}$$

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

接着, 将表达式中的所有角用角 A 来表示, 以构建单变量函数. 由 (1) 知 $C=\frac{\pi}{4}$, 故 $B=\pi-(A+C)=\frac{3\pi}{4}-A$. 代入上式, 得

$$f(A)=\frac{\sin A+\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4}-A)}{\sin(\pi/4)}=\sqrt{2}\sin A+2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$$

利用和角公式展开, 得

$$\begin{aligned}f(A)&=\sqrt{2}\sin A+2\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos A-\cos\frac{3\pi}{4}\sin A\right)\\&=\sqrt{2}\sin A+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)\\&=2\sqrt{2}\sin A+\sqrt{2}\cos A\end{aligned}$$

使用辅助角公式将其合并, 得到 $f(A)=\sqrt{10}\sin(A+\phi)$, 其中角 ϕ 满足 $\tan\phi=\frac{1}{2}$.

须确定自变量 A 的定义域. 三角形的几何存在性要求其内角为正.

$$\begin{cases}A>0\\B=\frac{3\pi}{4}-A>0\end{cases}\Longrightarrow A<\frac{3\pi}{4}$$

故 $A\in(0,\frac{3\pi}{4})$. 函数 $f(A)=\sqrt{10}\sin(A+\phi)$ 的最大值为 $\sqrt{10}$, 这当且仅当 $\sin(A+\phi)=1$ 时取得, 即 $A+\phi=\frac{\pi}{2}$. 由于 $\tan\phi=\frac{1}{2}$, 可知 ϕ 是一个锐角. 因此, 使得函数取最大值时的角 $A=\frac{\pi}{2}-\phi$ 位于区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内, 此值满足定义域 $A\in(0,\frac{3\pi}{4})$, 故最大值 $\sqrt{10}$ 可以取到.

(1) $C=\frac{\pi}{4}$.(2) $\frac{a+\sqrt{2}b}{c}$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

例题 2.4 (巴蜀中学 2023 届高三适应性月考 (七) 第 17 题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $3\sin C+4\cos C=5$. (1) 求证 $\tan C=\frac{3}{4}$; (2) 若 $a^2+b^2=1$, 求边 c 的最小值.

解 对第 (1) 问,已知等式 $3\sin C+4\cos C=5$ 是一个标准的 $p\sin x+q\cos x$ 形式. 利用辅助角公式,等式左侧可化为 $5\left(\frac{3}{5}\sin C+\frac{4}{5}\cos C\right)=5$. 令 $\cos\phi=\frac{3}{5}$, $\sin\phi=\frac{4}{5}$,则 $\tan\phi=\frac{4}{3}$. 原式变为 $\sin(C+\phi)=1$. 由于 $C\in(0,\pi)$ 且 ϕ 为锐角,故 $C+\phi\in(\phi,\pi+\phi)$. 在此区间内, 满足 $\sin(C+\phi)=1$ 的唯一解是 $C+\phi=\frac{\pi}{2}$. 因此 $C=\frac{\pi}{2}-\phi$. 故 $\tan C=\tan(\frac{\pi}{2}-\phi)=\cot\phi=\frac{\cos\phi}{\sin\phi}=\frac{3/5}{4/5}=\frac{3}{4}$.

对第 (2) 问, 由 (1) 知 $\tan C=\frac{3}{4}$, 且 C 为三角形内角, 故 C 为锐角. 由此可得 $\cos C=\frac{4}{5}$. 根据余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$, 代入已知条件 $a^2+b^2=1$ 和 $\cos C=\frac{4}{5}$:

$$c^2=1-2ab\left(\frac{4}{5}\right)=1-\frac{8}{5}ab$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

欲求 c 的最小值, 即求 c^2 的最小值, 这等价于寻求 ab 的最大值. 根据算术平均值-几何平均值不等式, 对于正数 a, b, 有

$$1 = a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab \implies ab \leq \frac{1}{2}$$

当且仅当 $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 此时 ab 取得最大值 $\frac{1}{2}$. 将 ab 的最大值代入 c^2 的表达式中.

$$c^2 = 1 - \frac{8}{5}ab \geq 1 - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

故 c^2 的最小值为 $\frac{1}{5}$. 因为 c 是边长, 必为正数, 所以 c 的最小值为 $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 证明见上.(2) 边 c 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

例题 2.5 (2023 年 3 月温州市高三二模第 20 题) 已知 $\triangle ABC$ 满足

$$2\sin C\sin(B-A) = 2\sin A\sin C - \sin^2 B.$$

(1) 试问角 B 是否可能为直角? 请说明理由; (2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\dfrac{\sin C}{\sin A}$ 的取值范围.

解 原方程为 $2\sin C\sin(B-A) = 2\sin A\sin C - \sin^2 B$. 将 $\sin(B-A)$ 展开.$2\sin C(\sin B\cos A - \cos B\sin A) = 2\sin A\sin C - \sin^2 B$. 利用正弦定理与余弦定理进行角化边, 把三角函数关系转化为边的代数关系.

$$2\frac{c}{2R}\left(\frac{b}{2R}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{a}{2R}\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = 2\frac{a}{2R}\frac{c}{2R} - \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$2c\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) = 2ac - b^2$$

$$(b^2+c^2-a^2) - (a^2+c^2-b^2) = 2ac - b^2$$

$$2b^2 - 2a^2 = 2ac - b^2$$

整理得到三边之间满足的核心关系式.$3b^2 - 2a^2 = 2ac$.

对第 (1) 问, 采用反证法. 假设角 B 可能为直角, 即 $B = \frac{\pi}{2}$. 根据勾股定理, 此时三边满足 $b^2 = a^2 + c^2$. 将此关系代入已得的核心关系式中, 得 $3(a^2+c^2) - 2a^2 = 2ac \implies a^2 - 2ac + 3c^2 = 0$. 这是一个关于 a 的齐次二次方程. 将其视为关于 a 的一元二次方程, 考察其判别式. $\Delta = (-2c)^2 - 4(1)(3c^2) = 4c^2 - 12c^2 = -8c^2$. 因为 c 是边长, $c > 0$, 所以 $\Delta < 0$. 该方程关于 a 没有实数解. 因此, 最初的假设不成立, 角 B 不可能为直角.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

对第 (2) 问, 所求为 $\frac{\sin C}{\sin A}$, 根据正弦定理, 这等价于求 $\frac{c}{a}$ 的取值范围. 设 $k=\frac{c}{a}$, 则 $c=ka$. 将 $c=ka$ 代入核心关系式 $3b^2-2a^2=2ac$ 中, 用 a 和 k 表示 b^2: $3b^2-2a^2=2a(ka)=2ka^2 \implies b^2=\frac{2k+2}{3}a^2$.

$\triangle ABC$ 为锐角三角形, 意味着 $\cos A>0, \cos B>0, \cos C>0$.

- 由 $\cos A>0 \implies b^2+c^2-a^2>0$: $\frac{2k+2}{3}a^2+(ka)^2-a^2>0 \implies 3k^2+2k-1>0$. 分解得 $(3k-1)(k+1)>0$. 因为 $k=\frac{c}{a}>0$, 所以 $k>\frac{1}{3}$.
- 由 $\cos C>0 \implies a^2+b^2-c^2>0$: $a^2+\frac{2k+2}{3}a^2-(ka)^2>0 \implies 3k^2-2k-5<0$. 分解得 $(3k-5)(k+1)<0$. 因为 $k>0$, 所以 $k<\frac{5}{3}$.
- 由 $\cos B>0 \implies a^2+c^2-b^2>0$: $a^2+(ka)^2-\frac{2k+2}{3}a^2>0 \implies 3k^2-2k+1>0$. 该二次函数判别式 $\Delta=(-2)^2-4(3)(1)=-8<0$, 开口向上, 故恒成立.

综合以上三个条件, 得 k 的取值范围是 $\frac{1}{3}<k<\frac{5}{3}$.

(1) 角 B 不可能为直角, 理由见上.(2) $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$.

知乎@余命数

2.2.1.0.4 解题流程 解三角形的最值与范围问题遵循同一条由几何到代数、由多维到一维的路径. 把与三角形形态相关的几何问题, 转化为求单变量函数在特定区间上最值的代数问题.

1. **建立代数模型**. 利用正弦定理与余弦定理, 将问题中的所有边、角关系, 统一转化为纯粹的三角函数关系式或纯粹的边长关系式.
2. **变量化归**. 利用三角形内角和定理 $A+B+C=\pi$, 消去多余的角, 将一个含有多个变量的表达式, 转化为一个只含单个变量的单变量函数.
3. **确定定义域**. 这是解题的逻辑基础. 必须从三角形存在的固有几何约束, 如所有内角为正以及题目附加的条件约束, 如锐角三角形出发, 将它们全部转化为关于自变量的不等式组, 从而精确界定函数的定义域.
4. **函数分析**. 在确定的定义域上, 根据函数的形式, 灵活选用辅助角公式、二次函数理论或求导法等分析工具, 求解其最值或范围.

常见逻辑疏漏

1. **定义域挖掘不全**. 最常见的错误是, 在变量化归后, 只考虑了自变量本身大于 0, 而忘记了由它表示的另外两个角也必须大于 0 的约束.
2. **工具选择失当**. 面对边化角还是角化边的抉择时犹豫不决. 经验法则是, 当表达式是关于边的齐次式时, 几乎总是边化角更优; 当三角函数关系复杂, 但能通过变形消去角, 得到纯粹的边长关系时, 角化边则能化繁为简.
3. **代数变形出错**. 在换元、配方、求导等纯代数运算步骤中出现计算失误. 解三角形问题往往计算量较大, 须步步为营、细心验算.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.2.2 等分线

我们从三角形的一个顶点向对边引一条线段, 把原三角形分成两个子三角形. 整体与子三角形的约束通过公共边、公共角或互补角联系起来, 于是可用两次余弦定理建立方程.

2.2.2.1 解题蓝图

2.2.2.1.1 全局与局部关系的构建 先在整个 $\triangle ABC$ 中用余弦定理建立三边 a,b,c 与某个已知角之间的关系式, 得到全局约束. 再在被分割线段所在的子三角形中再次应用余弦定理, 引入分割线段的长度作为局部约束.

2.2.2.1.2 利用几何联系消元 两个子三角形共享分割线, 且相邻角互补, 如 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$, 故 $\cos(\angle ADB)=-\cos(\angle ADC)$. 这一等式常用来消去未知角, 得到只含边长的方程.

知乎@余命数

2.2.2.1.3 联立求解 把全局方程与局部方程联立, 解这个关于未知边长的代数方程组, 即可得到答案.

知乎@余命数

斯图尔特定理的向量形式

当分割线段属于一般线段时, 直接在子三角形中应用余弦定理可能会引入新的未知角, 从而使问题复杂化. 此时, 向量方法提供了一条更具普适性且更为直接的路径. 若点 D 在边 BC 上, 且满足 $BD:DC=\mu:\lambda$, 则由向量的定比分点公式可知.

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AC}$$

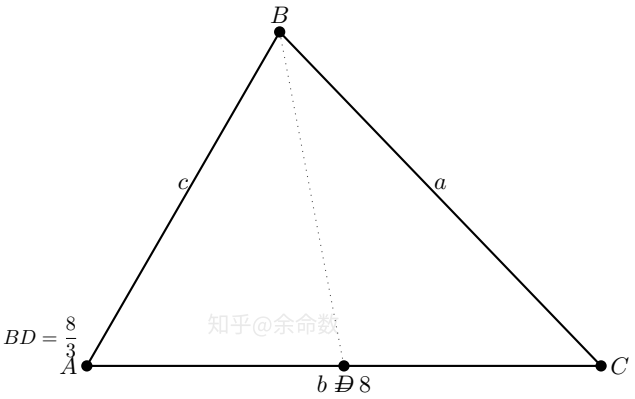
对此向量等式两边取自身的数量积, 即平方, 即可获得一个仅含三边与角 A 的、关于分割线长 AD 的表达式, 从而避免引入新的未知角. 这一关系实质上是斯图尔特定理的向量表述.

例题 2.6 (中线分割模型) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\frac{2\cos C}{a}=\frac{2}{b}+\frac{\sin C}{b\sin A}$. 若 $b=8$, D 为边 AC 的中点, 且 $BD=\frac{8}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 本题的线段是中线. 我们联立全局三角形与局部中线给出的两个方程.

首先, 分析初始条件. 将等式 $\frac{2\cos C}{a}=\frac{2}{b}+\frac{\sin C}{b\sin A}$ 两边同乘以 ab 得 $2b\cos C=2a+\frac{a\sin C}{\sin A}$. 由正弦定理, $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, 代入上式得 $2b\cos C=2a+c$. 再次利用余弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 代入, 得 $2b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2a+c$, 化简得 $a^2+b^2-c^2=2a^2+ac$, 即

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



$b^2=a^2+c^2+ac$. 将其与余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 对比, 可得 $\cos B=-\frac{1}{2}$, 故 $B=\frac{2\pi}{3}$.

接着, 构建关于边长 a,c 的方程组. 其一, 是对全局 $\triangle ABC$ 应用余弦定理, 这构成了第一个方程.

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \implies 8^2=a^2+c^2-2ac\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2+c^2+ac=64 \quad \cdots\cdots(1)$$

其二, 是利用中线 BD 的信息. 中线长公式是连接中线与三边关系最直接的工具.

$$BD^2=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4}$$

代入已知值

$$\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{2(a^2+c^2)-8^2}{4} \implies \frac{64}{9}=\frac{2(a^2+c^2)-64}{4}$$

整理得 $2(a^2+c^2)=\frac{256}{9}+64=\frac{832}{9}$, 从而得到第二个方程.

$$a^2+c^2=\frac{416}{9} \quad \cdots\cdots(2)$$

联立方程 (1) 与 (2), 将 (2) 代入 (1) 中, 即可求得 ac 的值.

$$\frac{416}{9}+ac=64 \implies ac=64-\frac{416}{9}=\frac{160}{9}$$

最终, $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\cdot\frac{160}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{80}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{40\sqrt{3}}{9}$$

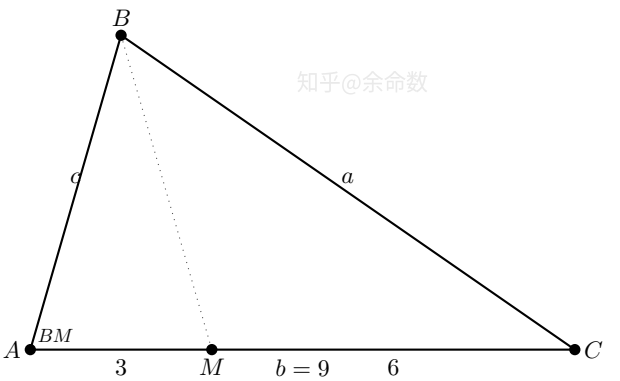
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(1) $B=\frac{2\pi}{3}$.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$.

例题 2.7 (普通分割线模型) 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $2b\cos C=2a+c$. 设 $b=9$, 点 M 是边 AC 上一点, $AM:MC=1:2$, 且 $\angle MAB=\angle MBA$. 求 $\triangle BMC$ 的面积.

解 本题的线段 BM 是一般线段, 直接在子三角形中用余弦定理会引入新的未知角. 我们用向量方法避免这个未知角.

知乎@余命数



首先,由 $2b\cos C=2a+c$ 可推得 $B=\frac{2\pi}{3}$. 由 $AM:MC=1:2$ 及 $AC=b=9$, 可得 $AM=3,MC=6$. 条件 $\angle MAB=\angle MBA$ 表明 $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 故 $BM=AM=3$.

接着,构建关于边长 a,c 的方程组. 全局方程由 $\triangle ABC$ 的余弦定理给出.

$$9^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}\implies a^2+c^2+ac=81\quad\cdots\cdots(1)$$

局部方程的建立是此题的要点. 利用向量的定比分点公式.

$$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

对此向量等式两边取自身的数量积,得

$$|\overrightarrow{BM}|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{BA}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{BC}|^2+\frac{4}{9}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})$$

将边长与角度代入,得

$$3^2=\frac{4}{9}c^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}(c\cdot a\cdot\cos B)=\frac{1}{9}(4c^2+a^2-2ac)$$

整理得到第二个方程.

$$a^2+4c^2-2ac=81\quad\cdots\cdots(2)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

联立方程组 $\begin{cases} a^2+c^2+ac=81 \\ a^2+4c^2-2ac=81 \end{cases}$，解得 $a=c=3\sqrt{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$a=c$ 意味着这是一个顶角为 120° 的等腰三角形，故 $A=C=30^\circ$. $\triangle BMC$ 的面积为

$$S_{\triangle BMC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot MC\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{3})\cdot 6\cdot\sin 30^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(1) $B=\frac{2\pi}{3}$.(2) $\triangle BMC$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

2.2.2.2 内角平分线

角平分线把三角形的角与边联系起来. 处理角平分线时，我们常用面积法或角平分线定理.

1. **若涉及角平分线长度，首选面积法**. 面积法依据的事实是，大三角形的面积等于两个小三角形的面积之和，即 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$. 我们把这个等式改写为含角平分线长度、两边及夹角的方程.
2. **若涉及对边线段比例，首选角平分线定理**. 角平分线定理断言，角平分线分割对边所成的两条线段之比，等于夹此角的两邻边之比，即 $\frac{BD}{CD}=\frac{c}{b}$.

例题 2.8 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $2b\cos A-a=2c$. 设 $\angle ABC$ 的角平分线 BD 交 AC 于点 D，若 $BD=2$，求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值.

解 本题已知角平分线长度求面积最值. 我们用面积分割法建立关系，再用基本不等式求最值.

首先，分析条件 $2b\cos A-a=2c$. 根据射影定理 $c=a\cos B+b\cos A$，代入可得 $2b\cos A-a=2(a\cos B+b\cos A)$，消去 $2b\cos A$ 项得 $-a=2a\cos B$. 由于 $a\neq 0$，故 $\cos B=-\frac{1}{2}$，即 $B=\frac{2\pi}{3}$.

角平分线 BD 将 $\triangle ABC$ 分割为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$. 利用面积关系.

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$$

角平分线将角 B 分为两个 $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{3}$ 的角. 利用三角面积公式展开，得

$$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}c\cdot BD\cdot\sin\frac{B}{2}+\frac{1}{2}a\cdot BD\cdot\sin\frac{B}{2}$$

代入已知值 $B=\frac{2\pi}{3}, BD=2$：

$$\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}c(2)\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}a(2)\sin\frac{\pi}{3}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两边同乘以 $\frac{2}{\sin(\pi/3)}$, 即 $\frac{4}{\sqrt{3}}$, 并利用 $\sin(2\pi/3)=\sin(\pi/3)$:

$$ac=2(a+c)$$

欲求 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$ 的最小值, 即求 ac 的最小值. 根据基本不等式, $a+c\geq 2\sqrt{ac}$. 将其代入已得的关系式中.

$$ac=2(a+c)\geq 2(2\sqrt{ac})=4\sqrt{ac}$$

因为 $ac>0$, 两边同除以 $\sqrt{ac}$ 得 $\sqrt{ac}\geq 4 \implies ac\geq 16$. 当且仅当 $a=c$ 时, 等号成立. 此时 $a^2=4a \implies a=4$. 故 ac 的最小值为 16.

因此, $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $S_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16=4\sqrt{3}$.

(1) $B=\frac{2\pi}{3}$.(2) $\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $4\sqrt{3}$.

例题 2.9　在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$. 给出以下三个条件.(1) $a=4\sqrt{3}, b=4$;(2) $b^2-a^2+c^2+10b=0$;(3) $S_{\triangle ABC}=15\sqrt{3}$. 若这三个条件中有两个正确, 请选出正确的条件并求 $\angle BAC$ 的角平分线 AD 的长.

解　首先, 由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$ 可得 $\tan A=-\sqrt{3}$. 因 $A\in(0,\pi)$, 故 $A=\frac{2\pi}{3}$.

接着, 对三个条件进行检验, 以确定哪两个是相容的. 若条件 (1) 正确, $a=4\sqrt{3}, b=4$. 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $48=16+c^2-2(4)c(-\frac{1}{2}) \implies c^2+4c-32=0$, 解得 $c=4$. 若条件 (2) 正确, $a^2=b^2+c^2+10b$. 对比余弦定理 $a^2=b^2+c^2+bc$, 得 $10b=bc$, 故 $c=10$. 若条件 (3) 正确, $S=\frac{1}{2}bc\sin A=15\sqrt{3} \implies \frac{1}{2}bc(\frac{\sqrt{3}}{2})=15\sqrt{3} \implies bc=60$.

组合判断. 若 (1)(2) 正确, 则 $c=4$ 与 $c=10$ 矛盾. 若 (1)(3) 正确, 由 (1) 知 $b=4, c=4$, 则 $bc=16$, 与 (3) 的 $bc=60$ 矛盾. 若 (2)(3) 正确, 由 (2) 知 $c=10$, 代入 (3) 得 $10b=60 \implies b=6$, 此组条件相容.

故正确的条件是 (2) 和 (3), 此时 $\triangle ABC$ 的三要素为 $A=\frac{2\pi}{3}, b=6, c=10$.

欲求角平分线 AD 的长, 利用面积分割法 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{A}{2}$$

代入数值

$$15\sqrt{3}=\frac{1}{2}(10)\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}(6)\cdot AD\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$

$$15\sqrt{3}=(5\cdot AD+3\cdot AD)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\cdot AD$$

解得 $AD=\frac{15}{4}$.

(1) $A=\frac{2\pi}{3}$.(2) 正确的条件为 (2) 和 (3), 角平分线 AD 的长为 $\frac{15}{4}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.10 在 $\triangle ABC$ 中, 面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(b^2+c^2-a^2)$. AD 为 $\angle A$ 的平分线. (1) 证明 $AD=\frac{\sqrt{3}bc}{b+c}$; (2) 若 $BD=2DC$, $AD=4\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

解 本题是角平分线两大性质的深度综合应用.

对第 (1) 问, 由面积公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 和余弦定理 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$, 代入已知条件得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}(2bc\cos A)\implies \tan A=\sqrt{3}$, 故 $A=\frac{\pi}{3}$.

由 AD 是角平分线, 利用面积分割法 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{A}{2}$$

$$bc\sin A=(b+c)AD\sin\frac{A}{2}$$

利用二倍角公式 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, 整理得 $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. 代入 $A=\frac{\pi}{3}$, 得 $\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$AD=\frac{2bc}{b+c}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}bc}{b+c}$$

对第 (2) 问, 联立角平分线的两大性质建立方程组. 由角平分线定理及 $BD=2DC$, 有 $\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=2$, 即 $c=2b$. 由第 (1) 问的结论及 $AD=4\sqrt{3}$, 有 $4\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}bc}{b+c}$, 即 $bc=4(b+c)$.

将 $c=2b$ 代入第二个方程: $b(2b)=4(b+2b)\implies 2b^2=12b$. 因 $b\neq 0$, 解得 $b=6$, 故 $c=12$.

利用余弦定理求边长 a: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6^2+12^2-2(6)(12)\cos\frac{\pi}{3}=36+144-72=108$. 故 $a=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

$\triangle ABC$ 的周长为 $L=a+b+c=6\sqrt{3}+6+12=18+6\sqrt{3}$.

(1) 证明见上.(2) $\triangle ABC$ 的周长为 $18+6\sqrt{3}$.

2.2.2.3 外角平分线与调和分割

内角平分线定理给出了边长比例; 外角平分线定理把这个比例关系推广到对边的延长线上.

定理 2.13 (外角平分线定理) 三角形一个顶点处的外角平分线, 若与对边的延长线相交, 则交点到该对边两端点的距离之比, 等于夹此角的两邻边之比. 如图, 若 AD 为 $\triangle ABC$ 顶点 A 处的外角平分线, 交 BC 延长线于点 D(假设 $AB\neq AC$), 则

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD} \tag{2-12}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明

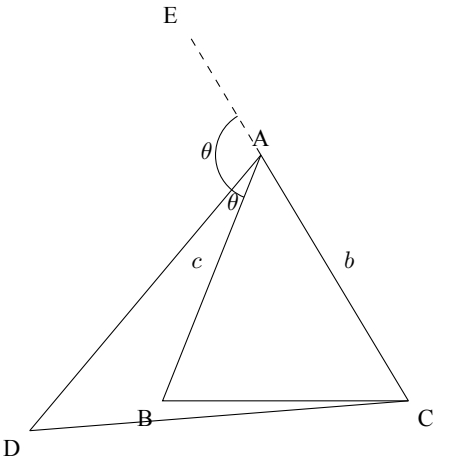


图 2.11　外角平分线定理证明示意

本定理的证明思路与内角平分线定理的证明高度一致, 均巧妙地运用了正弦定理. 考察 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$. 设直线 EAC 为一条直线, AD 平分外角 $\angle EAB$. 令 $\angle EAD = \angle DAB = \theta$.

在 $\triangle ABD$ 中, 应用正弦定理可得

$$\frac{BD}{\sin(\angle DAB)} = \frac{AB}{\sin(\angle BDA)} \quad \text{即} \quad \frac{BD}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin(\angle BDA)}$$

在 $\triangle ACD$ 中, 其顶点 A 处的内角为 $\angle CAD$. 注意到 $\angle EAD$ 与 $\angle CAD$ 互为补角, 因为它们构成平角 $\angle EAC$. 故 $\angle CAD = \pi - \theta$. 因此 $\sin(\angle CAD) = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$. 应用正弦定理于 $\triangle ACD$:

$$\frac{CD}{\sin(\angle CAD)} = \frac{AC}{\sin(\angle CDA)} \quad \text{即} \quad \frac{CD}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\angle CDA)}$$

接着, 需把这两个方程联系起来. 点 B, C, D 共线, 故 $\angle BDA$ 与 $\angle CDA$ 互为补角, 它们的正弦值相等.

$$\sin(\angle BDA) = \sin(\pi - \angle CDA) = \sin(\angle CDA)$$

从 $\triangle ABD$ 的关系式中, 有 $\sin(\angle BDA) = \frac{c\sin\theta}{BD}$. 从 $\triangle ACD$ 的关系式中, 有 $\sin(\angle CDA) = \frac{b\sin\theta}{CD}$.

令二者相等, 得

$$\frac{c\sin\theta}{BD} = \frac{b\sin\theta}{CD}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由于 AD 是非退化三角形的外角平分线, θ 不为 0 或 π, 故 $\sin\theta \neq 0$. 两边可约去 $\sin\theta$, 得到

知乎@余命数

$$\frac{c}{BD} = \frac{b}{CD} \quad \text{即} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

定理得证. □

调和分割

内角与外角平分线定理共同说明了一种基本的几何对称性. 对于 $\triangle ABC$ 顶点 A 的内、外角平分线, 它们分别交对边 BC (或其延长线) 于点 D_{in} 和 D_{ext}. 这两个点将线段 BC 以相同的比例进行**内分割**与**外分割**. 满足这种关系的点 D_{in}、D_{ext} 与线段端点 B、C 共同构成了一组**调和点列**. 同时, 一个顶点的内角平分线与其外角平分线总是相互垂直.

2.2.2.4 中线与阿波罗尼斯定理

中线连接三角形的一个顶点与其对边中点. 中线的长度与三边长度满足阿波罗尼斯定理.

知乎@余命数

定理 2.14 (中线长公式) 设 m_a 为 $\triangle ABC$ 中边 a 上的中线, 则其长度满足

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \tag{2-13}$$

等价地, 该公式亦可表示为 $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.

证明 在两个由中线分割形成的相邻三角形中, 对互补角应用余弦定理, 即可消去未知角. 如图, 设 D 为 BC 的中点, 则 AD 为中线 m_a, 且 $BD = DC = \frac{a}{2}$.

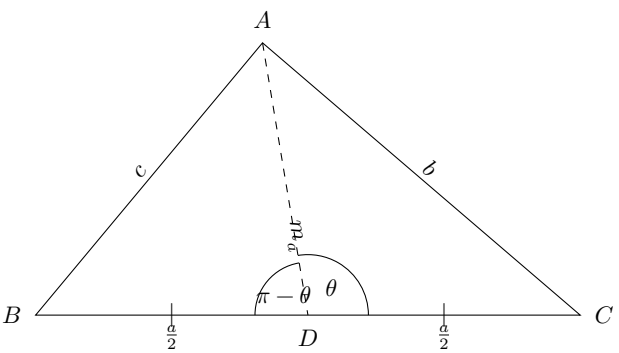


图 2.12 中线长公式的余弦定理证明

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在 $\triangle ACD$ 中, 设 $\angle ADC=\theta$. 由余弦定理得

$$b^2=m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2m_a\left(\frac{a}{2}\right)\cos\theta=m_a^2+\frac{a^2}{4}-am_a\cos\theta \quad \cdots\cdots(1)$$

在 $\triangle ABD$ 中, 角 $\angle ADB=\pi-\theta$, 故 $\cos(\angle ADB)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$. 再次应用余弦定理.

$$c^2=m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2m_a\left(\frac{a}{2}\right)\cos(\pi-\theta)=m_a^2+\frac{a^2}{4}+am_a\cos\theta \quad \cdots\cdots(2)$$

式 (1) 与 (2) 的结构仅在含 $\cos\theta$ 的项上符号相反, 因此两式相加即可消去该未知角.

知乎@余命数

$$b^2+c^2=\left(m_a^2+\frac{a^2}{4}-am_a\cos\theta\right)+\left(m_a^2+\frac{a^2}{4}+am_a\cos\theta\right)$$

$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

将上式两边同乘以 2, 即得定理的最终形式

知乎@余命数

$$2b^2+2c^2=4m_a^2+a^2 \implies 4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2$$

定理得证. □

阿波罗尼斯定理

中线长公式是阿波罗尼斯定理的代数重述. 该定理说, 三角形任意两边长的平方和, 等于第三边上中线长的平方与该边一半长度的平方和的两倍, 即

$$b^2+c^2=2\left(m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$$

它建立了两边平方和与第三边上的中线长及该边一半长度的平方和之间的精确关系, 可直接用于处理中线与三边长度的问题.

2.2.3 面积问题

面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 把边、角与面积联系起来. 已知其中两个量, 就可以求第三个量. 我们利用这个公式在面积、边长乘积与夹角正弦之间转换.

2.2.3.1 面积公式的两种用法

处理面积问题时, 我们常把面积公式当作边角互化的媒介.

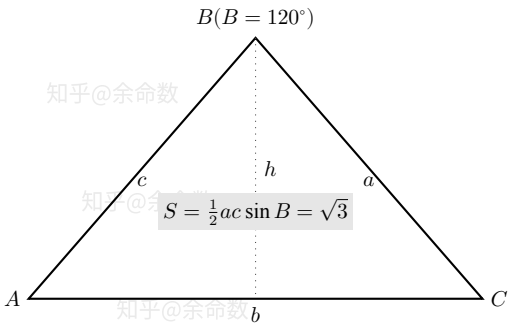
- 已知面积时, 可由 $ab=\frac{2S}{\sin C}$ 求两边之积, 或由 $\sin C=\frac{2S}{ab}$ 求夹角正弦.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 未知面积时, 可利用 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$ 建立方程; 若条件中出现 S 与 $b^2+c^2-a^2$ 的关系, 注意到 $\frac{S}{2bc\cos A}=\frac{1}{4}\tan A$, 这常常是求角的信号.

例题 2.11 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $\frac{a^2+c^2-b^2}{\cos B}=8$. (1) 求 ac; (2) 若 $b=2a\cos A\cos 2C+2c\cos C\cos 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 第 (1) 问的表达式直接给出余弦定理的结构. 第 (2) 问的条件对称, 提示我们用正弦定理边化角, 再用三角恒等式找出角之间的联系.



对第 (1) 问, 注意到已知等式的分子 $a^2+c^2-b^2$ 是余弦定理中用以表达 $\cos B$ 的关键部分. 根据余弦定理, 有 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$. 将此关系代入已知条件 $\frac{a^2+c^2-b^2}{\cos B}=8$ 中.

$$\frac{2ac\cos B}{\cos B}=8$$

由于 B 是三角形内角, 若 $\cos B=0$, 则 $B=\frac{\pi}{2}$, 但此时原式分母为零, 故 $B\neq\frac{\pi}{2}$, 因此 $\cos B\neq 0$, 可以约去.

$$2ac=8\implies ac=4$$

对第 (2) 问, 条件 $b=2a\cos A\cos 2C+2c\cos C\cos 2A$ 的结构对称, 是边化角的典型信号. 利用正弦定理 $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$, 代入并约去 $2R$ 得

$$\sin B=2\sin A\cos A\cos 2C+2\sin C\cos C\cos 2A$$

注意到 $2\sin x\cos x=\sin(2x)$, 上式可化为.

$$\sin B=\sin(2A)\cos 2C+\sin(2C)\cos(2A)$$

右侧恰好是正弦的和角公式 $\sin(X+Y)=\sin X\cos Y+\cos X\sin Y$ 的形式.

$$\sin B=\sin(2A+2C)=\sin(2(A+C))$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在 $\triangle ABC$ 中, $A+C=\pi-B$, 故 $2(A+C)=2\pi-2B$.

$$\sin B=\sin(2\pi-2B)=-\sin(2B)$$

再次使用二倍角公式 $\sin(2B)=2\sin B\cos B$:

$$\sin B=-2\sin B\cos B$$

因为 $B\in(0,\pi)$, $\sin B\neq 0$, 两边同除以 $\sin B$, 得

$$1=-2\cos B\implies \cos B=-\frac{1}{2}$$

故 $B=\frac{2\pi}{3}$.

接着, 计算三角形的面积.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}(4)\sin\frac{2\pi}{3}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$$

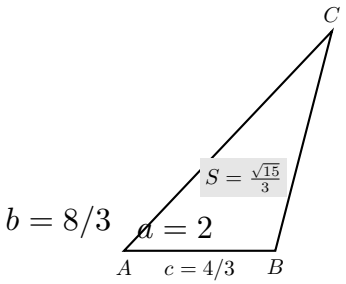
(1) $ac=4$.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

例题 2.12　在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 从下列三个条件中选择两个, 使得 $\triangle ABC$ 存在, 并回答下列问题: (1) $b+c=2a$ (2) $A=\frac{2\pi}{3}$ (3) $3c\sin B=4a\sin C$.

(i) 求 $\cos B$ 的值;

(ii) 当 $a=2$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解　本题要求从三个条件中选出相容的两个. 我们先把每个条件化为最简洁的代数关系, 再通过计算检验组合.



首先, 对三个备选条件进行代数化简. 条件 (1) $b+c=2a$ 是关于三边和的线性关系. 条件 (2) $A=\frac{2\pi}{3}$ 确定了一个钝角. 条件 (3) $3c\sin B=4a\sin C$, 利用正弦定理进行角化边, 由 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\implies \sin B=\frac{b}{c}\sin C$, 代入得 $3c\left(\frac{b}{c}\sin C\right)=4a\sin C$. 由于 $\sin C\neq 0$, 约去得 $3b=4a$, 这是一个关于两边的比例关系.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

接着组合判断. 若选择 (1) 和 (2), 即 $b+c=2a$ 且 $A=\frac{2\pi}{3}$. 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\frac{2\pi}{3})=b^2+c^2+bc$. 又 $(b+c)^2=(2a)^2 \implies b^2+c^2+2bc=4a^2 \implies b^2+c^2=4a^2-2bc$. 代入余弦定理式.$a^2=(4a^2-2bc)+bc \implies bc=3a^2$. 即 b,c 是关于 x 的方程 $x^2-(2a)x+3a^2=0$ 的两根. 其判别式 $\Delta=(-2a)^2-4(1)(3a^2)=-8a^2<0$, 方程无实数解, 故此组合不成立.

若选择 (2) 和 (3), 即 $A=\frac{2\pi}{3}$ 且 $3b=4a$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, 可得 $\frac{a}{\sin(2\pi/3)}=\frac{4a/3}{\sin B}$, 约去 a 得 $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sin B}$, 解得 $\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{3}>1$, 此为不可能事件, 故此组合不成立.

因此, 唯一成立的组合是 (1) 和 (3), 即 $b+c=2a$ 且 $3b=4a$.

对 (i),求 $\cos B$. 由 $3b=4a$ 得 $b=\frac{4}{3}a$. 代入 $b+c=2a$ 得 $\frac{4}{3}a+c=2a \implies c=\frac{2}{3}a$. 三边之比为 $a:b:c=a:\frac{4}{3}a:\frac{2}{3}a=3:4:2$. 应用余弦定理.

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(3k)^2+(2k)^2-(4k)^2}{2(3k)(2k)}=\frac{9-16+4}{12}=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$$

对 (ii), 求面积. 当 $a=2$ 时, 由三边比例关系可知 $c=\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}$. 要求面积, 需要 $\sin B$. 由 $\cos B=-\frac{1}{4}$, 且 $B\in(0,\pi)$, 可得

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

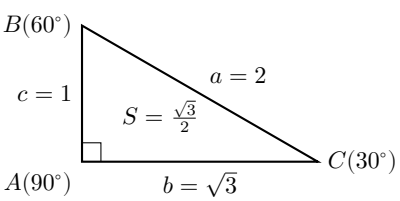
计算面积, 得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}(2)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

选择条件 (1) 和 (3).(i) $\cos B=-\frac{1}{4}$.(ii) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

例题 2.13 (2023 年 3 月金丽衢十二校联考第 18 题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $(1-\sin C)(1-\cos 2B)=\sin 2B\cos C$, 且 $a=2,c=1$. (1) 证明 $C=2B-\frac{\pi}{2}$; (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 本题需要化简一个复杂的三角恒等式, 找出角 C 与角 B 的关系, 再结合边长条件确定三角形的全部元素.



对第 (1) 问, 由已知等式 $(1-\sin C)(1-\cos 2B)=\sin 2B\cos C$ 出发. 将等式展开, 并将含有 $\sin C$ 和 $\cos C$ 的项移到同一边, 这通常是使用和角公式的前兆.

$$\begin{aligned}1-\cos 2B&=\sin C(1-\cos 2B)+\sin 2B\cos C\\&=\sin C-\sin C\cos 2B+\sin 2B\cos C\\&=\sin C+(\sin 2B\cos C-\cos 2B\sin C)\\&=\sin C+\sin(2B-C).\end{aligned}$$

左侧利用二倍角公式 $1-\cos 2B=2\sin^2 B$ 进行转化. 右侧是两个正弦之和, 使用和差化积公式

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

来化简, 得

$$\begin{aligned}\sin C+\sin(2B-C)&=2\sin\frac{C+2B-C}{2}\cos\frac{C-(2B-C)}{2}\\&=2\sin B\cos(C-B).\end{aligned}$$

于是, 原式等价于 $2\sin^2 B=2\sin B\cos(C-B)$. 由于 $B\in(0,\pi)$, $\sin B\neq 0$, 可约去 $2\sin B$, 得到 $\sin B=\cos(C-B)$. 利用诱导公式 $\sin B=\cos(\frac{\pi}{2}-B)$, 方程变为 $\cos(\frac{\pi}{2}-B)=\cos(C-B)$. 令 $u=\frac{\pi}{2}-B, v=C-B$. 因 $u\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), v\in(-\pi,\pi)$, 由 $\cos u=\cos v$ 的通解 $v=\pm u+2k\pi$ 可知此处只能有 $k=0$, 故 $\frac{\pi}{2}-B=\pm(C-B)$. 若 $\frac{\pi}{2}-B=C-B$, 则 $C=\frac{\pi}{2}$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $\frac{2}{\sin A}=\frac{1}{\sin(\pi/2)}=1$, 故 $\sin A=2$, 此为不可能事件. 因此, 必然是 $\frac{\pi}{2}-B=-(C-B)=B-C$, 即 $C=2B-\frac{\pi}{2}$.

对第 (2) 问, 求三角形面积. 由 (1) 知 $C=2B-\frac{\pi}{2}$, 故 $\sin C=\sin(2B-\frac{\pi}{2})=-\cos(2B)$. 同时, $A=\pi-B-C=\pi-B-(2B-\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi}{2}-3B$, 故 $\sin A=\sin(\frac{3\pi}{2}-3B)=-\cos(3B)$. 根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$, 有 $\frac{2}{-\cos(3B)}=\frac{1}{-\cos(2B)}$, 即 $2\cos(2B)=\cos(3B)$. 利用二倍角和三倍角公式 $2(2\cos^2 B-1)=4\cos^3 B-3\cos B$, 整理得 $4\cos^3 B-4\cos^2 B-3\cos B+2=0$. 这是一个关于 $\cos B$ 的三次方程,通过因式分解可得 $(2\cos B-1)(2\cos^2 B-\cos B-2)=0$. 解得 $\cos B=\frac{1}{2}$ 或 $\cos B=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

此时, 必须检验解的有效性. 三角形的几何存在性要求所有内角为正. $A>0\implies\frac{3\pi}{2}-3B>0\implies B<\frac{\pi}{2}$. $C>0\implies 2B-\frac{\pi}{2}>0\implies B>\frac{\pi}{4}$. 故角 B 的取值范围是 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, 那么 $\cos B\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$. $\cos B=\frac{1}{2}$ 满足此范围, 故 $B=\frac{\pi}{3}$ 是有效解. $\cos B=\frac{1+\sqrt{17}}{4}>1$, 舍去.$\cos B=\frac{1-\sqrt{17}}{4}<0$, 舍去.

因此, 得唯一的解 $B=\frac{\pi}{3}$. 最后计算面积, 得

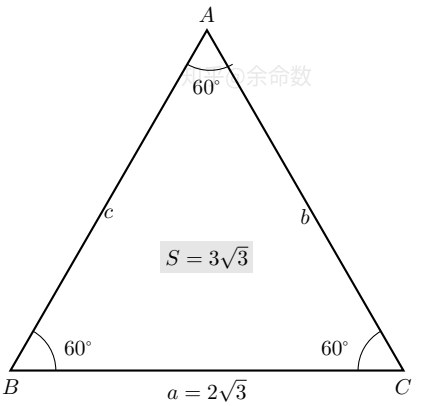
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}(2)(1)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(1) 证明见上.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例题 2.14 (2023 年 1 月桐庐中学高三第一学期期末考试第 17 题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $b^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A + c^2 = a^2$. (I) 求角 A; (II) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 且 $\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B} + \frac{c}{\tan C}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 第 (I) 问把面积公式与余弦定理结合起来. 第 (II) 问把正切化为正弦、余弦, 再用正弦、余弦定理化简, 确定三角形的形状.



对于第 (I) 问, 将已知条件 $b^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A + c^2 = a^2$ 变形为 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A$. 注意到左侧是余弦定理的关键部分, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A$. 代入后得到 $2bc\cos A = \frac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A$. 由于 b, c 是边长, 不为 0, 可约去 $2bc$, 得到 $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin A$. 在 $\triangle ABC$ 中, $A \in (0, \pi)$, $\cos A$ 与 $\sin A$ 不可能同时为零, 故 $\tan A = \sqrt{3}$, 解得 $A = \frac{\pi}{3}$.

对于第 (II) 问, 处理第二个条件 $\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B} + \frac{c}{\tan C}$. 将正切化为正弦与余弦的比值.

$$\frac{2a\cos A}{\sin A} = \frac{b\cos B}{\sin B} + \frac{c\cos C}{\sin C}$$

此式结构强烈暗示使用正弦定理 $\frac{x}{\sin X} = 2R$. 代入得 $2\cdot(2R\cos A) = 2R\cos B + 2R\cos C$. 约去公因式 $2R$, 得到一个纯粹的角的关系.$2\cos A = \cos B + \cos C$. 代入已求出的 $A = \frac{\pi}{3}$, 即 $\cos A = 1/2$, 得 $1 = \cos B + \cos C$. 利用内角和定理 $B + C = \frac{2\pi}{3}$, 将 C 用 B 表示.

$$\cos B + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = 1$$

展开得 $\cos B + \cos\frac{2\pi}{3}\cos B + \sin\frac{2\pi}{3}\sin B = 1$, 即 $\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B = 1$. 利用辅助角公式 $\sin(B + \frac{\pi}{6}) = 1$. 由于 $B \in (0, 2\pi/3)$, $B + \pi/6 \in (\pi/6, 5\pi/6)$, 故 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $B = \frac{\pi}{3}$. 因此, $C = \frac{2\pi}{3} - B = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 是等边三角形.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

最后, 计算面积. 已知 $a=2\sqrt{3}$, 根据等边三角形面积公式 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\text{边长})^2$:

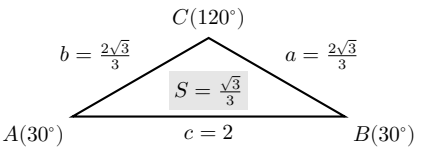
$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$$

(I) $A=\frac{\pi}{3}$.(II) $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$.

例题 2.15 (2023 年 3 月苏锡常镇一模试卷第 18 题) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $1+\sin 2A=(3\tan B+2)\cos 2A$. (1) 若 $C=\frac{3\pi}{4}$, 求 $\tan B$ 的值; (2) 若 $A=B$, $c=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

知乎@余命数

解 本题的三角恒等式混合了 $\sin 2A$、$\cos 2A$、$\tan B$. 我们把它化为关于 $\tan A$ 和 $\tan B$ 的代数关系.



首先, 化简题设给出的关系式 $1+\sin 2A=(3\tan B+2)\cos 2A$. 在本题两问的条件下, 均可排除 $\cos 2A=0$ 的情形. 若 $\cos 2A=0$, 则 $A=\frac{\pi}{4}$ 或 $A=\frac{3\pi}{4}$; 其中 $A=\frac{\pi}{4}$ 代回原式不成立, 而 $A=\frac{3\pi}{4}$ 又与第 (1) 问的 $A+B=\frac{\pi}{4}$ 及第 (2) 问的 $A=B$ 均不相容. 因而两边同除以 $\cos 2A$ 得 $\sec 2A+\tan 2A=3\tan B+2$. 利用恒等式 $\sec x+\tan x=\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{(\sin(x/2)+\cos(x/2))^2}{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}=\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}=\tan(x/2+\pi/4)$, 可得 $\tan(A+\pi/4)=3\tan B+2$. 这是一个更简洁的关系.

对第 (1) 问, 当 $C=\frac{3\pi}{4}$ 时, $A+B=\frac{\pi}{4}$. $\tan(A+\pi/4)=\tan(\pi/2-B)=\cot B=1/\tan B$. 代入关系式得 $1/\tan B=3\tan B+2$. 令 $t=\tan B$, 则 $1/t=3t+2$, 即 $3t^2+2t-1=0$. 解得 $t=\frac{1}{3}$ 或 $t=-1$. 因为 $B\in(0,\pi/4)$, $\tan B>0$, 故 $\tan B=\frac{1}{3}$.

对第 (2) 问, 当 $A=B$ 时, $\tan A=\tan B$. 代入 $\tan(A+\pi/4)=3\tan B+2$. 令 $t=\tan A=\tan B$, 则 $\frac{\tan A+\tan(\pi/4)}{1-\tan A\tan(\pi/4)}=\frac{t+1}{1-t}=3t+2$. $t+1=(3t+2)(1-t)=-3t^2+t+2$, 整理得 $3t^2=1$, 故 $t^2=1/3$. 由于 A,B 是三角形内角且 $A+B<\pi$, A,B 必为锐角, 故 $\tan A>0$. 所以 $\tan A=\tan B=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 解得 $A=B=\frac{\pi}{6}$. 角 $C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}$.

为求面积, 利用正弦定理求边长 a,b. $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\implies a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{2\sin(\pi/6)}{\sin(2\pi/3)}=\frac{2(1/2)}{\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. 由于 $A=B$, 所以 $a=b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

最后计算面积: $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

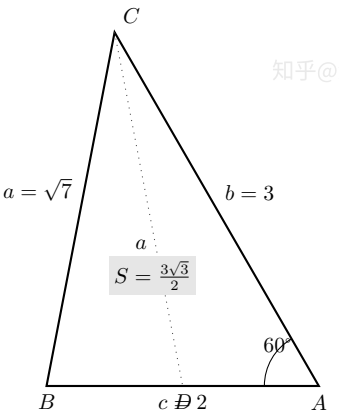
(1) $\tan B=\frac{1}{3}$.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

知乎@余命数

例题 2.16 (2023 年 2 月深圳市高三一调第 18 题) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $b + c = 2a\sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)$. (1) 求 A; (2) 设 AB 的中点为 D, 若 $CD = a$, 且 $b - c = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 第 (1) 问是边角互化. 第 (2) 问中 CD 是中线, 我们对 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 分别使用余弦定理建立方程.

知乎@余命数



对第 (1) 问, 利用和角公式展开已知条件并进行边化角:

$$b + c = 2a\left(\sin C\cos\frac{\pi}{6} + \cos C\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,a\sin C + a\cos C.$$

两边同除以 $2R$, 得

$$\sin B + \sin C = \sqrt{3}\sin A\sin C + \sin A\cos C.$$

利用 $\sin B = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C$ 代入, 化简得

$$\cos A\sin C + \sin C = \sqrt{3}\sin A\sin C.$$

约去 $\sin C$ 得 $\cos A + 1 = \sqrt{3}\sin A$, 即

$$\sqrt{3}\sin A - \cos A = 1.$$

利用辅助角公式得 $2\sin(A - \frac{\pi}{6}) = 1$. 由于 $A \in (0, \pi)$, 故 $A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 从而 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. 后者给出 $A = \pi$, 不符合三角形内角条件, 故 $A = \frac{\pi}{3}$.

对第 (2) 问, 采用一外一内、双余弦定理的思路. 对 $\triangle ABC$ 应用余弦定理.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对 $\triangle ACD$ 应用余弦定理, 其中 $AD=c/2$、$CD=a$、$AC=b$.

$$CD^2=AC^2+AD^2-2(AC)(AD)\cos A$$

$$\Longrightarrow\ a^2=b^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-2\cdot b\cdot\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=b^2+\frac{c^2}{4}-\frac{bc}{2}.$$

知乎@余命数

联立两个关于 a^2 的表达式.$b^2+c^2-bc=b^2+\frac{c^2}{4}-\frac{bc}{2}$, 化简得 $\frac{3}{4}c^2=\frac{1}{2}bc$, 即 $3c=2b$. 结合题目给出的 $b-c=1$, 解方程组得 $c=2, b=3$.

最后计算面积, 得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(3)(2)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

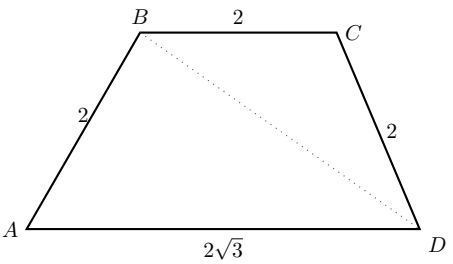
知乎@余命数

(1) $A=\frac{\pi}{3}$.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例题 2.17 (2023 年湖南长沙中学高三月考 (六) 第 18 题) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD=2, AD=2\sqrt{3}$. (1) 若 DB 平分 $\angle ADC$, 证明 $A+C=\pi$; (2) 记 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 和 S_2, 求 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值.

解 我们借助公共边 BD, 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 中用余弦定理建立角 A 与角 C 的关系.

知乎@余命数



知乎@余命数

首先, 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中对公共边 BD 应用余弦定理. $BD^2=2^2+(2\sqrt{3})^2-2(2)(2\sqrt{3})\cos A=16-8\sqrt{3}\cos A$. $BD^2=2^2+2^2-2(2)(2)\cos C=8-8\cos C$. 联立两式,得到关于角 A 和角 C 的恒等关系.$16-8\sqrt{3}\cos A=8-8\cos C$, 即 $\sqrt{3}\cos A-\cos C=1\quad(*)$.

对第 (1) 问, 若 DB 平分 $\angle ADC$, 则 $\angle ADB=\angle CDB$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中应用正弦定理, $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin A}$ 和 $\frac{BC}{\sin\angle CDB}=\frac{BD}{\sin C}$. 由于 $AB=BC=2$ 且 $\angle ADB=\angle CDB$, 可得 $\sin A=\sin C$. 故 $A=C$ 或 $A+C=\pi$. 若 $A=C$, 代入 $(*)$ 式得 $(\sqrt{3}-1)\cos A=1\ \Longrightarrow\ \cos A=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>1$, 不可能. 因此, 唯一可能的情况是 $A+C=\pi$.

对第 (2) 问,目标函数为 $S_1^2+S_2^2=(2\sqrt{3}\sin A)^2+(2\sin C)^2=12\sin^2 A+4\sin^2 C$. 为利用关系式 $(*)$,将函数用余弦表示.$S_1^2+S_2^2=12(1-\cos^2 A)+4(1-\cos^2 C)=16-$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$12\cos^2 A-4\cos^2 C$. 由 $(*)$ 得 $\cos C=\sqrt{3}\cos A-1$. 令 $x=\cos A$,代入上式,将目标函数化为关于 x 的一元二次函数. $f(x)=16-12x^2-4(\sqrt{3}x-1)^2=-24x^2+8\sqrt{3}x+12$.

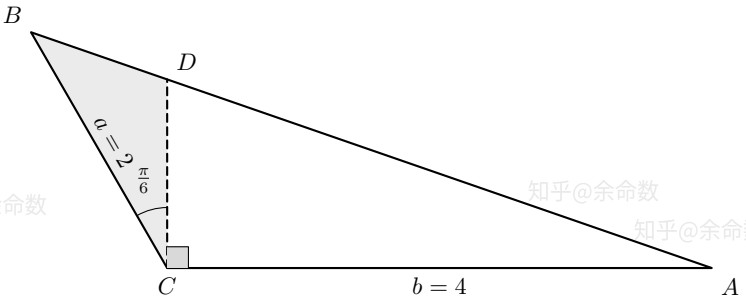
接下来确定自变量 $x=\cos A$ 的取值范围.A,C 是三角形内角,必须满足 $-1<\cos A<1$ 和 $-1<\cos C<1$. $-1<x<1$ 且 $-1<\sqrt{3}x-1<1 \implies 0<\sqrt{3}x<2 \implies 0<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$. 取交集得 x 的定义域为 $(0,1)$.

最后,求二次函数 $f(x)=-24x^2+8\sqrt{3}x+12$ 在区间 $(0,1)$ 上的最大值. 该函数是开口向下的抛物线,对称轴为 $x=-\frac{8\sqrt{3}}{2(-24)}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. 由于 $0<\frac{\sqrt{3}}{6}<1$,函数在对称轴处取得最大值. $f_{\max}=f(\frac{\sqrt{3}}{6})=-24(\frac{3}{36})+8\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{6})+12=-2+4+12=14$.

(1) 证明见上.(2) $S_1^2+S_2^2$ 的最大值为 14.

例题 2.18 (2024 湖南邵阳模拟) 在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $\triangle ABC$ 的周长为 $\frac{a\sin B}{\sin A+\sin B-\sin C}$. (1) 求 C;(2) 若 $a=2,b=4$, D 为边 AB 上一点,$\angle BCD=\frac{\pi}{6}$,求 $\triangle BCD$ 的面积.

解 第 (1) 问用正弦定理把边角关系式化为边长关系. 第 (2) 问用面积分割法,并注意到 $\angle ACD$ 是直角.



对第 (1) 问,已知周长 $a+b+c=\frac{a\sin B}{\sin A+\sin B-\sin C}$. 利用正弦定理,$\sin X=\frac{x}{2R}$,等式右边可化为.

$$\frac{a\cdot\frac{b}{2R}}{\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}-\frac{c}{2R}}=\frac{ab}{a+b-c}$$

于是得纯边的关系式 $a+b+c=\frac{ab}{a+b-c}$. 交叉相乘得 $(a+b+c)(a+b-c)=ab$,即 $(a+b)^2-c^2=ab$. 展开为 $a^2+2ab+b^2-c^2=ab$,整理得 $a^2+b^2-c^2=-ab$. 根据余弦定理,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$. 因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

对第 (2) 问,现求 $\triangle BCD$ 的面积. 已知 $BC=a=2$ 和 $\angle BCD=\pi/6$,任务转化为求线段 CD 的长度. 注意到一个隐藏条件.

$$\angle ACD=\angle C-\angle BCD=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

这说明 $\triangle ACD$ 是一个直角三角形.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

用面积分割法.

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}.$$

分别计算三块面积, 得

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3},$$
$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot \sin(\angle ACD) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot CD\cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2\,CD,$$
$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot \sin(\angle BCD) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot CD\cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}CD.$$

根据面积关系建立方程.

$$2\sqrt{3} = 2\,CD + \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2}CD,$$

解得 $CD = \frac{4\sqrt{3}}{5}$.

最终目标面积:

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

(1) $C = \frac{2\pi}{3}$.(2) $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

2.2.4 内切圆与外接圆综合问题

外接圆半径 R 和内切圆半径 r 把三角形的角、边、面积与周长联系起来. 我们借助它们在边、角、面积、周长之间切换, 建立所需的方程或函数.

2.2.4.1 基本工具

2.2.4.1.1 外接圆 外接圆的半径 R 是一个全局性的度量, 规定了整个三角形的尺寸上限.

- **正弦定理**, 把边角与 R 联系起来的法则.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- **面积公式**.$S = \frac{abc}{4R}$ 实质上是正弦定理与 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 结合的产物.
- **应用**. 见到 R 或外接圆, 即用正弦定理, 可:

1. 由一边一角求 R.
2. 由 R 和一个角求其对边.
3. 由 R 和一条边求其对角的正弦.

知乎@余命数

2.2.4.1.2 内切圆 内切圆半径 r 与三角形的周长和面积紧密相连.

- **面积公式**, 与 r 密切相关.

$$S = pr = \frac{1}{2}(a+b+c)r$$

- **切线长性质**. 从一个顶点到内切圆两个切点的距离相等, 且等于**半周长减去该顶点的对边**. 例如, 从顶点 A 出发的切线长为 $p-a$.
- **衍生公式**. 由此可推导出连接角、半径和边长的实用公式

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

- **应用**. 见到 r 或内切圆, 即用 $S=pr$ 和切线长性质, 可:
  1. 在面积、周长、半径三者中知二求一.
  2. 利用切线长性质建立关于边长的方程.

例题 2.19 (2023 年 2 月七彩联盟返校联考, 18) 如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AD=5, CD=3, \angle ADC = 120°$. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且满足 $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin A - \sin B}$.
(1) 求四边形 $ABCD$ 的外接圆半径 R;
(2) 求 $\triangle ABC$ 内切圆半径 r 的取值范围.

解 第 (1) 问化简比例式求出关键角, 再用正弦定理求外接圆半径 R. 第 (2) 问把 r 表示为某角的函数, 在三角形内角约束下求其定义域, 从而得到 r 的范围.

对于第 (1) 问.

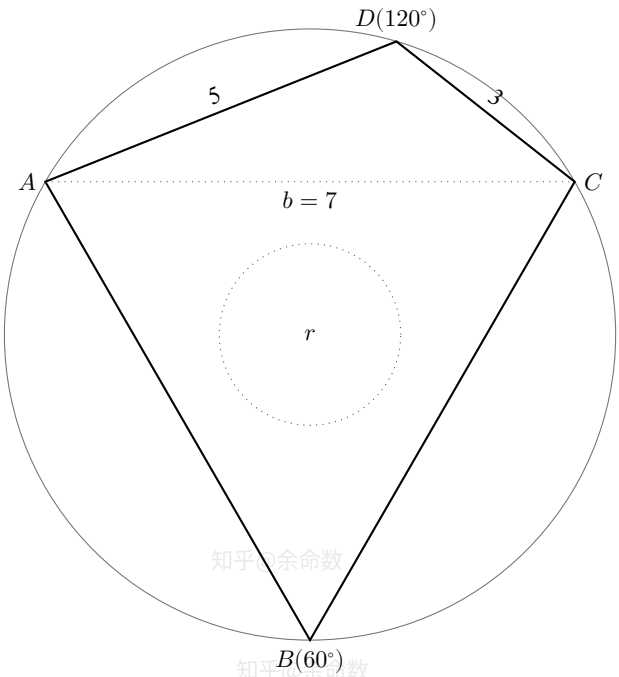
目标是求外接圆半径 R, 由正弦定理 $\frac{x}{\sin X} = 2R$, 须先求出 $\triangle ABC$ 中某条边及其对角. 题目的已知条件是一个复杂的比例式, 这是突破口, 先化简它以求出某个角.

这是一个边角混合的比例式, 利用正弦定理边化角是标准操作. 令 $a = k\sin A, b = k\sin B, c = k\sin C$ 代入 $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin A - \sin B}$:

$$\frac{k(\sin A + \sin B)}{k\sin C} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin A - \sin B}$$

交叉相乘得 $(\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) = \sin C(\sin A - \sin C)$, 即 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin C \sin A - \sin^2 C$.

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



得到纯角的方程后仍嫌复杂, 故再次角化边, 转为可用余弦定理解的边长关系. 再次利用正弦定理的变形 $k^2\sin^2 X = x^2$:

$$a^2 - b^2 = ca - c^2 \implies a^2 + c^2 - b^2 = ac$$

观察左侧, 它与余弦定理的分子形式完全一致.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$$

故 $B = 60^\circ$.

角 B 已求出, 由正弦定理只需再求其对边 b, 即 AC 即可得 R. 边 AC 恰好是 $\triangle ADC$ 的一条边, 而 $\triangle ADC$ 信息完整(两边一夹角), 可用余弦定理求出 AC.

既然四边形 $ABCD$ 有外接圆, 说明 A, B, C, D 四点共圆. 即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 共享同一个外接圆. 可在 $\triangle ADC$ 中利用余弦定理求出公共边 AC 的长度.

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2(AD)(DC)\cos(\angle ADC) \\ &= 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)\cos 120^\circ \\ &= 25 + 9 - 30(-\frac{1}{2}) = 34 + 15 = 49 \end{aligned}$$

所以 $AC = 7$. 在 $\triangle ABC$ 中, 边 AC 就是边 b.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

接着, 在 $\triangle ABC$ 中, 有边 $b=7$ 和其对角 $B=60^\circ$. 应用正弦定理求外接圆半径 R:

$$2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{7}{\sin 60^\circ}=\frac{7}{\sqrt{3}/2}=\frac{14}{\sqrt{3}}\implies R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

对于第 (2) 问.

目标是求内切圆半径 r 的取值范围. 由两个公式 $S=pr$ 和 $r=(p-b)\tan(B/2)$ 出发,后者直接把 r 与边角联系起来. 已知 $B=60^\circ$ 和 $b=7$,该公式化为 $r=\frac{a+c-7}{2\sqrt{3}}$, 问题转化为求 $a+c$ 的取值范围.

利用公式 $r=(p-b)\tan\frac{B}{2}$:

$$r=\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\tan 30^\circ=\frac{a+c-7}{2\sqrt{3}}$$

问题转化为求 $a+c$ 的取值范围.

求 $a+c$ 的范围.a,c 是变量, 但其所在的 $\triangle ABC$ 已确定(外接圆半径 R 和角 B 已定). 用正弦定理把 a,c 用角 A,C 表示, 再利用 $A+C$ 为定值, 转化为关于单角 A 的三角函数值域问题.

在 $\triangle ABC$ 中, 利用正弦定理 $a=2R\sin A, c=2R\sin C$:

$$a+c=2R(\sin A+\sin C)=\frac{14\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)$$

利用内角和定理 $A+C=\pi-B=\frac{2\pi}{3}$, 即 $C=\frac{2\pi}{3}-A$.

$$\begin{aligned}\sin A+\sin C&=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\\&=\sin A+\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-\cos\frac{2\pi}{3}\sin A\\&=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\\&=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\\&=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A\right)\\&=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

所以 $a+c=\frac{14\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=14\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

接着求 $\sin(A+\pi/6)$ 的范围,须精确确定角 A 的定义域. 三角形内角必须为正, 这是最基本的约束.

在 $\triangle ABC$ 中, $A>0$ 且 $C>0$. $C=\frac{2\pi}{3}-A>0\implies A<\frac{2\pi}{3}$. 所以 $A\in(0,\frac{2\pi}{3})$. 因此 $A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$. 在此区间内, $\sin(A+\frac{\pi}{6})$ 的取值范围是 $(\sin\frac{\pi}{6},1]$, 即 $(\frac{1}{2},1]$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是 $a+c=14\sin(A+\frac{\pi}{6})$ 的取值范围是 $(14\cdot\frac{1}{2},14\cdot 1]$, 即 $(7,14]$. 代入 r 的表达式 $r=\frac{a+c-7}{2\sqrt{3}}$: r 的取值范围是 $\left(\frac{7-7}{2\sqrt{3}},\frac{14-7}{2\sqrt{3}}\right]$, 即 $\left(0,\frac{7}{2\sqrt{3}}\right]=\left(0,\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$.

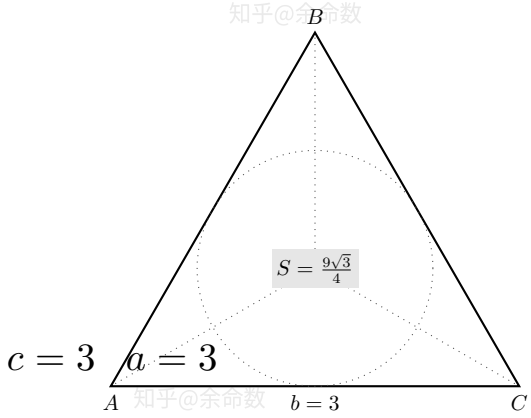
(1) $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.(2) r 的取值范围是 $\left(0,\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$.

例题 2.20 (2023 年 8 月河北名校高三开学考第 18 题) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 且 $b\cos C+c\cos B=2\sqrt{3}\sin A$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 外接圆的面积;

(2) 记 $\triangle ABC$ 内切圆的半径为 r, 若 $B=\frac{\pi}{3},r=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 第 (1) 问用射影定理化简边角关系, 再用正弦定理求 R. 第 (2) 问由 r 与 B 反推边长关系, 再用 $S=pr$ 与 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ 求面积.



(1) 由射影定理, $b\cos C+c\cos B=a$, 故已知式化为 $a=2\sqrt{3}\sin A$, 即

$$\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{3}.$$

再由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=2R$, 得 $2R=2\sqrt{3}$, 故 $R=\sqrt{3}$. 外接圆面积为

$$S_{\text{外接圆}}=\pi R^2=3\pi.$$

(2) 已知 $B=\frac{\pi}{3},r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 以及 (1) 中的 $R=\sqrt{3}$. 先求 b:

$$b=2R\sin B=2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=3.$$

再由 $r=(p-b)\tan\frac{B}{2}$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\tan\frac{\pi}{6}=\frac{a+c-3}{2\sqrt{3}},$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

化简得 $a+c=6$. 于是半周长 $p=\frac{(a+c)+b}{2}=\frac{9}{2}$, 面积

$$S_{\triangle ABC}=pr=\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

法二采用 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ 作验证. 余弦定理改写为

$$b^2=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B.$$

代入 $b=3$、$a+c=6$、$B=\frac{\pi}{3}$,

$$9=36-2ac-2ac\cdot\frac{1}{2}=36-3ac,$$

知乎@余命数

得 $ac=9$, 于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{4},$$

知乎@余命数
知乎@余命数

与前法一致.

(1) 外接圆面积为 3π.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

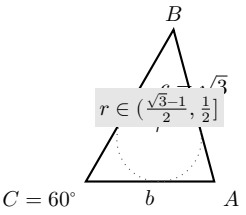
例题 2.21 (2023 杭州二中高三年级 4 月月考第 17 题) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c, 已知 $\sqrt{3}\tan A\tan B=\tan A+\tan B+\tan C$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $c=\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 内切圆半径的取值范围.

知乎@余命数

解 我们先把 r 化为单角函数. 由正切恒等式求出角 C,再用 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 与内角和消去变量, 最后在锐角约束的定义域上求值域.



知乎@余命数

(1) 任意非直角 $\triangle ABC$ 中有恒等式

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

证明 (恒等式证明) 由 $A+B+C=\pi$ 得 $A+B=\pi-C$, 从而

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)\implies\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C.$$

展开得

$$\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)=-\tan C+\tan A\tan B\tan C.$$

整理即得 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$. □

将恒等式代入 $\sqrt{3}\tan A\tan B=\tan A+\tan B+\tan C$, 得

$$\sqrt{3}\tan A\tan B=\tan A\tan B\tan C.$$

锐角三角形中 $A,B\in(0,\pi/2)$, 故 $\tan A\tan B\neq 0$, 两边同除后 $\tan C=\sqrt{3}$. 又 C 为锐角, 得 $C=\frac{\pi}{3}$.

知乎@余命数

(2) 采用公式 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. 由正弦定理与 $c=\sqrt{3}$、$C=\frac{\pi}{3}$,

$$2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi/3)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}=2,$$

故 $R=1$. 再代入 $C=\frac{\pi}{3}$,

$$r=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{2}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}.$$

由 $A+B=\frac{2\pi}{3}$ 得 $B=\frac{2\pi}{3}-A$, 于是

$$r(A)=2\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{A}{2}\right).$$

锐角约束给出

知乎@余命数

$$\begin{cases}A\in(0,\pi/2),\\ B=\frac{2\pi}{3}-A\in(0,\pi/2)\implies \frac{\pi}{6}<A<\frac{2\pi}{3},\\ C=\frac{\pi}{3}\in(0,\pi/2),\end{cases}$$

取交集得 $A\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$.

令 $x=\frac{A}{2}$, 则 $x\in(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4})$, 且

知乎@余命数

$$r(x)=2\sin x\sin(\frac{\pi}{3}-x).$$

积化和差 $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ 给出

$$r(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 $x \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4})$ 得 $2x - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, 在此区间上

$$\cos(2x - \frac{\pi}{3}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1],$$

故

$$r \in \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\Big] = \Big(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}\Big].$$

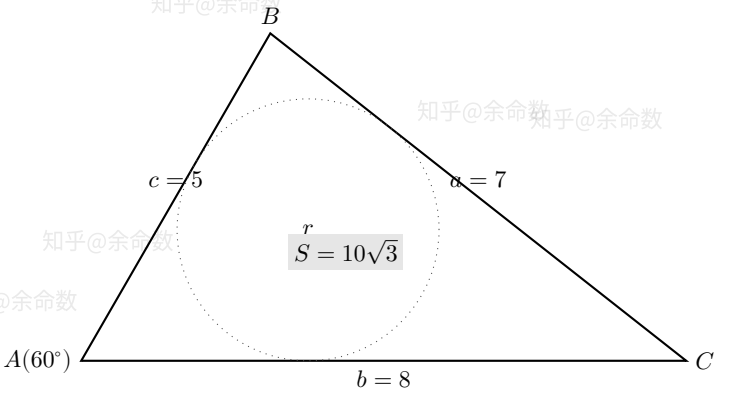
(1) $C = \frac{\pi}{3}$.(2) $\triangle ABC$ 内切圆半径的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

例题 2.22 (2023-2024 年武汉九月调研) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c, 且 $2a\cos B = 2c - b$.

(1.) 求角 A;

(2.) 若 $a = 7$, 且 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

解 第 (1) 问用余弦定理把 $\cos B$ 化为边长关系, 再反过来求角 A. 第 (2) 问已知 r 与角 A, 由 $r = (p - a)\tan(A/2)$ 求出半周长 p, 再用 $S = pr$ 求面积.



对于第 (1) 问.

条件 $2a\cos B = 2c - b$ 混合了边与角, 先由余弦定理把 $\cos B$ 用边长表示, 化为纯边关系.

根据余弦定理, $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. 代入已知等式:

$$2a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2c - b$$

化简得

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{c} = 2c - b$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两边同乘 c, 得 $a^2+c^2-b^2=c(2c-b)=2c^2-bc$.

由此得到一个纯边长关系式. 把它整理出 $b^2+c^2-a^2$ 这一项, 即可套用余弦定理求角 A.

整理上述等式:

$$a^2+c^2-b^2=2c^2-bc$$

$$b^2+c^2-a^2=bc$$

由余弦定理, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. 代入已得的关系:

$$\cos A=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$$

因为 $A\in(0,\pi)$, 所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

对于第 (2) 问.

已知 $a=7$, $r=\sqrt{3}$, 且由第 (1) 问得 $A=\pi/3$. 涉及内切圆半径与已知角时, 公式 $r=(p-a)\tan(A/2)$ 直接给出半周长 p, 再由 $S=pr$ 得面积.

利用公式 $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}$, 其中 p 是半周长. 将已知值代入, 得

$$\sqrt{3}=(p-7)\tan\left(\frac{\pi/3}{2}\right)=(p-7)\tan\frac{\pi}{6}$$

即:

$$\sqrt{3}=(p-7)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

交叉相乘得 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=p-7$, 即 $3=p-7$. 解得半周长 $p=10$.

最后, 利用三角形面积与内切圆半径的关系式 $S=pr$ 求面积:

$$S=10\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}$$

(1) $A=\frac{\pi}{3}$.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $10\sqrt{3}$.

2.2.5 多三角形问题

若一个三角形被内部线段分成多个小三角形, 我们就得到**多三角形**问题. 这些小三角形之间的公共边、公共角、互补角以及线段和差, 就是联系它们的关键.

- **公共边**: 两个三角形共享一条边, 这条边的长度把二者联系起来.
- **公共角**: 两个三角形共享一个角, 这个角的三角函数值是等价的.
- **互补角**: 分割线在一条边上产生的两个邻角, 如 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 互为补角, 由此 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$ 且 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$.
- **线段和差**: 被分割的边长等于各分段之和, 如 $AB=AD+DB$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

下列的例题展示如何利用这些公共量在多个三角形之间建立联系并求解.

练习 2.1 2023 武汉二调 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, D$ 为 AB 中点, $CD=\sqrt{2}$.
(1) 若 $BC=\sqrt{2}$, 求 AC 的长;
(2) 若 $\angle BAC=2\angle BCD$, 求 AC 的长.

练习 2.2 2023 福建质检 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, 且 $\angle CAD=\angle B$.
(1) 证明 $AC^2=BC\cdot CD$;
(2) 若 $\cos C=\frac{3}{4}$、$AD=2\sqrt{2}$、$CD=2$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

2.3 保底的建系法

在处理几何构型时, 正弦与余弦定理提供连接边角关系的代数工具. 然而, 当问题的几何条件非常规, 或图形本身缺乏明显特征时, 纯粹的几何方法或三角变换可能变得很复杂. 这时我们就把点、线放进平面直角坐标系, 给每个关键点配上坐标. 长度、角度、位置关系都变成代数表达式与方程, 几何推理就变成了代数运算. 这条路有时更长, 但按部就班, 逻辑上是确定的. 我们称这种方法为**建系法**.

建系法的第一步, 是为图形选一个尽量简化后续计算的坐标系. 我们通常按下面三条原则选取.

- **原点特殊化**: 尽可能将图形的特殊点, 如顶点、中点、垂足置于坐标原点.
- **轴线特殊化**: 尽可能将图形的特殊直线, 如对称轴、某条边所在的直线与坐标轴重合.
- **利用对称性**: 若图形具有对称性, 应使坐标系与之相适应, 从而使点的坐标呈现简洁的对称形式.

坐标系建立之后, 我们就把几何条件写成代数方程, 再解方程(组)即得解答.

例题 2.23 用坐标法证明阿波罗尼斯定理(中线长公式). 在 $\triangle ABC$ 中, 设 m_a 为边 a 上的中线, 则 $b^2+c^2=2\left(m_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)$.

解 为使坐标表示尽可能简洁, 将中线 m_a 所对的边 BC 置于 x 轴上, 并取该边的中点 D 作为坐标原点.

设 $D(0,0)$, 则 $B(-\frac{a}{2},0), C(\frac{a}{2},0)$. 设顶点 A 的坐标为 (x_0,y_0).

知乎@余命数

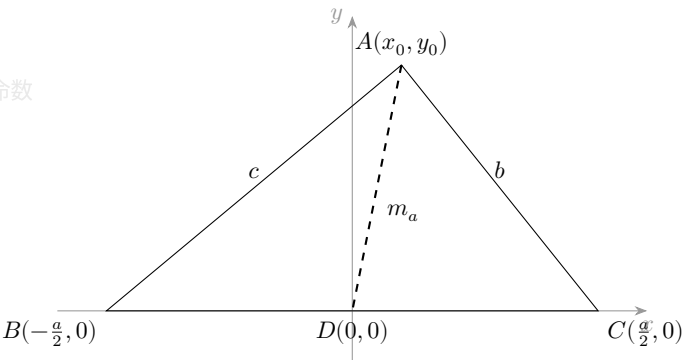


图 2.13　坐标法证明阿波罗尼斯定理

接着, 由两点间距离公式将三条边长 b, c 以及中线长 m_a 用坐标表示出来.

$$b^2 = |AC|^2 = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_0^2 = x_0^2 - ax_0 + \frac{a^2}{4} + y_0^2 \qquad \text{(距离公式)}$$

$$c^2 = |AB|^2 = \left(x_0 + \frac{a}{2}\right)^2 + y_0^2 = x_0^2 + ax_0 + \frac{a^2}{4} + y_0^2 \qquad \text{(距离公式)}$$

$$m_a^2 = |AD|^2 = x_0^2 + y_0^2 \qquad (D \text{ 为原点})$$

需建立 b^2, c^2, m_a^2 与 a^2 之间的关系. 观察 b^2 与 c^2 的表达式, 它们仅有一次项符号不同. 将两式相加, 可以消去 x_0 的一次项.

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= \left(x_0^2 - ax_0 + \frac{a^2}{4} + y_0^2\right) + \left(x_0^2 + ax_0 + \frac{a^2}{4} + y_0^2\right) \\ &= 2x_0^2 + 2y_0^2 + 2\left(\frac{a^2}{4}\right) \\ &= 2(x_0^2 + y_0^2) + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

而 $x_0^2 + y_0^2 = m_a^2$, 且 $\frac{a^2}{2} = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$. 代入上式, 得

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right).$$

定理得证.

例题 2.24 (2023 届湖北高三圆创三月联合测评第 18 题) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上的一点, $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}BD}{CD}$.
(1) 求 $\angle BAD$;
(2) 若 $AB = AD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 题目给出一个含四条线段的比例式. 若直接建立坐标并用距离公式计算, 会很繁琐. 我们借助坐标系重新整理几何关系, 特别是面积关系, 把问题代数化.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对第 (1) 问, 先建立一个坐标系; 同一个三角形的面积既可用坐标 (底乘高) 计算, 也可用两边夹角的三角公式计算. 把两种表达式相等, 就得到关于未知角的方程.

令点 D 为坐标原点 $(0,0)$, 并使边 BC 所在的直线与 x 轴重合. 设顶点 A 的坐标为 (x_A,h), 其中 $h>0$ 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高.

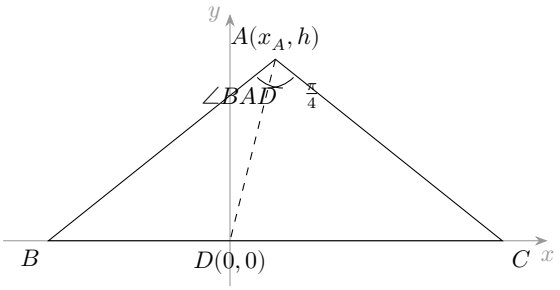


图 2.14 利用坐标系分析面积关系

在 $\triangle ACD$ 中, 面积有两种算法. 一方面, 基于坐标, 底为 CD, 高为 h, 故 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot h$. 另一方面,利用三角面积公式,$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin(\angle CAD)$. 联立两式, 得 $CD\cdot h=AC\cdot AD\cdot\sin(\angle CAD)$. 整理后得到一个关于边长比例的表达式

$$\frac{AC}{CD}=\frac{h}{AD\cdot\sin(\angle CAD)}$$

同理, 在 $\triangle ABD$ 中, 面积也有两种算法. $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin(\angle BAD)$. 整理后得到另一个比例表达式

$$\frac{AB}{BD}=\frac{h}{AD\cdot\sin(\angle BAD)}$$

接着, 将题目给出的比例式 $\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{2}BD}{CD}$ 变形, 使其结构与已得的比例式相匹配

$$\frac{AB}{BD}\cdot\frac{CD}{AC}=\sqrt{2}$$

将由面积关系得到的两个比例表达式代入上式, 得

$$\left(\frac{h}{AD\cdot\sin(\angle BAD)}\right)\cdot\left(\frac{AD\cdot\sin(\angle CAD)}{h}\right)=\sqrt{2}$$

变量 h 和 AD 被完全消去,这正是坐标法带来的简化. 于是得到一个纯粹的角的关系式

$$\frac{\sin(\angle CAD)}{\sin(\angle BAD)}=\sqrt{2}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

代入已知条件 $\angle CAD=\frac{\pi}{4}$, 即 $\sin(\angle CAD)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}/2}{\sin(\angle BAD)}=\sqrt{2}$$

解得 $\sin(\angle BAD)=\frac{1}{2}$. 又 $\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC<\pi$, 且 $\angle CAD=\frac{\pi}{4}$, 故 $\angle BAD<\frac{3\pi}{4}$, 排除 $\frac{5\pi}{6}$. 因此 $\angle BAD=\frac{\pi}{6}$.

对第 (2) 问, 由第 (1) 问可知 $\angle BAD=\frac{\pi}{6}$. 在 $\triangle ABD$ 中, 已知 $AB=AD=2$, 故该三角形为等腰三角形. 因此, $\angle B=\angle ADB=\frac{1}{2}(\pi-\angle BAD)=\frac{1}{2}(\pi-\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{12}$.

于是可确定 $\triangle ABC$ 的所有内角.

$$A=\angle BAD+\angle CAD=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$$

$$C=\pi-A-B=\pi-\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$$

知乎@余命数

至此, 已知了 $\triangle ABC$ 的一条边 $c=AB=2$ 以及所有角. 为求面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$, 还需计算边长 $b=AC$. 在 $\triangle ABC$ 中应用正弦定理, 得

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin(5\pi/12)}=\frac{2}{\sin(\pi/6)}$$

已知 $\sin(\pi/6)=1/2$, 以及 $\sin(5\pi/12)=\sin(75^\circ)=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

代入求解 b

$$b=\frac{2\cdot\sin(5\pi/12)}{1/2}=4\sin(5\pi/12)=4\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

最后, 计算 $\triangle ABC$ 的面积, 得

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\\&=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\&=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}=\frac{6+2+2\sqrt{12}}{4}=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

(1) $\angle BAD=\frac{\pi}{6}$.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $2+\sqrt{3}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.25 (浙江省十校联盟 2023 届高三第三次联考第 18 题) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, $DC=3, AD=5, AC=7, \angle DAC=\angle ABC$.
(1) 求 $\angle ADC$ 的大小;
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 对第 (1) 问, 所求角位于 $\triangle ADC$ 中, 而该三角形的三边长均已知, 故可直接应用余弦定理. 在 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{aligned}\cos(\angle ADC) &= \frac{AD^2+DC^2-AC^2}{2(AD)(DC)} \\ &= \frac{5^2+3^2-7^2}{2(5)(3)} = \frac{25+9-49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由于 $\angle ADC$ 为三角形内角, 其范围为 $(0,\pi)$, 故 $\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$.

对第 (2) 问, 我们运用坐标法, 把几何关系转化为代数方程求解.

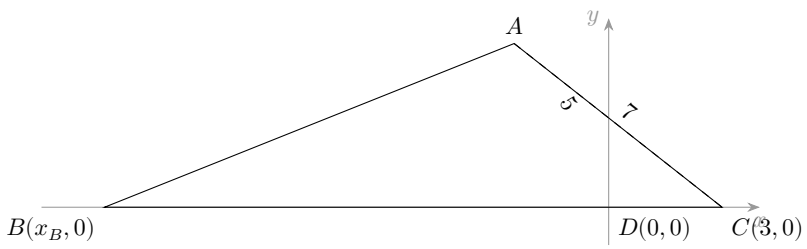


图 2.15 坐标法求解 $\triangle ABC$

建立坐标系. 以点 D 为坐标原点 $(0,0)$, 并使边 BC 所在的直线与 x 轴重合. 根据已知条件 $DC=3$, 可得点 C 的坐标为 $(3,0)$.

点 A 的坐标可以由其与 D,C 的距离关系确定. 设 $A(x_A,y_A)$, 则有方程组

$$\begin{cases}|AD|^2 = x_A^2+y_A^2 = 5^2 = 25 \\ |AC|^2 = (x_A-3)^2+y_A^2 = 7^2 = 49\end{cases}$$

将第一式代入第二式展开后得 $x_A^2-6x_A+9+y_A^2=49 \implies 25-6x_A+9=49$, 解得 $x_A=-5/2$. 进而求得 $y_A^2=25-(-5/2)^2=75/4$. 不妨取 $y_A>0$, 则 A 的坐标为 $\left(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

点 B 在 x 轴上, 其位置未知, 设其坐标为 $(x_B,0)$. 由于 D 在 B,C 之间, 可知 $x_B<0$.

接着, 将题设的几何条件 $\angle DAC=\angle ABC$ 转化为代数等式. 由于两角均为三角形内角, 且 $\angle DAC$ 为锐角, 故此条件等价于 $\cos(\angle DAC)=\cos(\angle ABC)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在 $\triangle ADC$ 中, 利用余弦定理可求得

$$\cos(\angle DAC)=\frac{AD^2+AC^2-DC^2}{2(AD)(AC)}=\frac{5^2+7^2-3^2}{2(5)(7)}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$$

对于 $\angle ABC$, 利用坐标与向量点积求其大小. $\overrightarrow{BA}=(A_x-B_x,A_y-B_y)=(-5/2-x_B,5\sqrt{3}/2)$. $\overrightarrow{BC}=(C_x-B_x,C_y-B_y)=(3-x_B,0)$.

$\cos(\angle ABC)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{(-5/2-x_B)(3-x_B)}{|\overrightarrow{BA}|\cdot(3-x_B)}=\frac{-5/2-x_B}{|\overrightarrow{BA}|}$.

令 $u=-5/2-x_B$. 由于 $x_B<-5/2$ (否则 B 角为钝角), 故 $u>0$. $|\overrightarrow{BA}|^2=u^2+(5\sqrt{3}/2)^2=u^2+75/4$.

于是, $\cos(\angle ABC)=\frac{u}{\sqrt{u^2+75/4}}$.

由等角条件建立关于 u 的方程

$$\frac{13}{14}=\frac{u}{\sqrt{u^2+75/4}}$$

两边平方得 $\frac{169}{196}=\frac{u^2}{u^2+75/4}$, 整理得 $169(u^2+75/4)=196u^2$. $27u^2=169\cdot 75/4\implies u^2=\frac{169\cdot 25}{36}$, 解得 $u=\frac{13\cdot 5}{6}=\frac{65}{6}$.

由 $u=-5/2-x_B=65/6$, 解得 $x_B=-5/2-65/6=-15/6-65/6=-80/6=-40/3$. 点 B 的坐标为 $(-40/3,0)$.

$\triangle ABC$ 的底边 BC 长度为 $|BC|=|x_C-x_B|=|3-(-40/3)|=49/3$. 其对应的高为点 A 的 y 坐标, 即 $h=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

因此, $\triangle ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{49}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{245\sqrt{3}}{12}$$

(1) $\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$.(2) $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{245\sqrt{3}}{12}$.

阅读提示

建系法把几何的直观与代数的严谨结合起来.

- **优点**: 思路清晰, 程序化, 降低了对几何直觉和构造性技巧的依赖. 对于几何关系复杂、难以直接识别突破口的题目, 建系法往往能通过系统性的计算得出结论.
- **缺点**: 若坐标系选择不当, 或几何图形本身不含特殊角度、特殊位置关系, 可能会导致计算量急剧增大, 从而引入计算风险.

当常规的几何方法或三角变换难以推进时, 建系法通过为图形赋予代数结构, 把几何思辨转入系统的代数运算轨道.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.4 非常规题型

前面几节用正弦、余弦定理和面积公式处理了许多常规三角形问题. 本节处理一些不那么直接的问题. 我们依旧依赖同样的定理, 只是需要更灵活地组合它们, 并引入一些代数技巧.

例题 2.26 已知 $\triangle ABC$ 中, $c^2=\sqrt{2}ab$.
(1) 求 $\cos C$ 的最小值;
(2) 证明: $C-A\leq\frac{\pi}{6}$.

解 (1) 求解 $\cos C$ 的最小值, 连接边角关系最直接的是余弦定理. 根据余弦定理,

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

代入已知条件 $c^2=\sqrt{2}ab$ 消去变量 c

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}{2ab}$$

为分析其最小值, 分离表达式.

$$\cos C=\frac{a^2+b^2}{2ab}-\frac{\sqrt{2}ab}{2ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是常数, 因此 $\cos C$ 的最小值取决于 $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ 的最小值.

根据 AM-GM 不等式, 对于任意正数 a,b(三角形边长),

$$a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$$

因此,

$$\frac{a^2+b^2}{2ab}\geq\frac{2ab}{2ab}=1$$

当且仅当 $a^2=b^2$, 即 $a=b$ 时, 等号成立. 此时三角形为等腰三角形, 是有效的几何构型.

代回 $\cos C$ 的表达式, 其最小值为

$$(\cos C)_{\min}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

对第 (2) 问, 证明不等式 $C-A\leq\frac{\pi}{6}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由第 (1) 问的结论, $\cos C \geq 1-\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 故角 C 必为锐角, 即 $C \in (0, \frac{\pi}{2})$. 若 $C \leq A$, 则 $C-A \leq 0 < \frac{\pi}{6}$, 结论成立. 故只需考虑 $C > A$ 的情形. 此时 $0 < C-A < C < \frac{\pi}{2}$. 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, 正弦函数单调递增, 故只需证明 $\sin(C-A) \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

利用正弦定理与余弦定理导出一个关于 $\sin(C-A)$ 的恒等式.

$$\begin{aligned}\sin(C-A) &= \sin C\cos A - \cos C\sin A \\ &= \frac{c}{2R}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\frac{a}{2R} \\ &= \frac{1}{4R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{b} - \frac{a^2+b^2-c^2}{b}\right) \\ &= \frac{2c^2-2a^2}{4Rb} = \frac{c^2-a^2}{2Rb}\end{aligned}$$

将 $b = 2R\sin B$ 代入分母, 可得一个更为简洁的形式

$$\sin(C-A) = \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin B$$

接着, 将题目给出的条件 $c^2 = \sqrt{2}ab$ 代入上式, 得

$$\sin(C-A) = \frac{\sqrt{2}ab-a^2}{b^2}\sin B = \left(\sqrt{2}\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\sin B$$

分析这个表达式的取值. 令 $x = \frac{a}{b}$, 考察函数 $f(x) = \sqrt{2}x - x^2$. 这是一个开口向下的二次函数, 其最大值在顶点处取得. 该函数的对称轴为 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2(-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 其最大值为 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 因此对任意边长比 $\frac{a}{b}$, 有 $\sqrt{2}\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$. 又 $B \in (0, \pi)$, 故 $0 < \sin B \leq 1$. 综合得

$$\sin(C-A) = \left(\sqrt{2}\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\sin B \leq \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

在当前 $C > A$ 的情形下, $C-A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 由正弦函数的单调性可得 $C-A \leq \frac{\pi}{6}$. 结合 $C \leq A$ 时结论显然成立, 原命题得证.

(1) $\cos C$ 的最小值为 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.(2) 证明见上.

例题 2.27　已知 $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \cos B = \tan C$.
(1) 求 $2A+C$ 的值;
(2) 证明: $c > b > \frac{2}{5}a$.

解 (1) 令 $\sin A = \cos B = \tan C = k$. 因 A, B, C 为三角形内角且 $k > 0$, 有 $A \in (0, \pi)$, 而 $\cos B > 0$、$\tan C > 0$ 迫使 B, C 均为锐角.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 $\sin A=\cos B$ 与 B 锐, $\cos B=\sin(\frac{\pi}{2}-B)$, 故 $\sin A=\sin(\frac{\pi}{2}-B)$, 通解为 $A=\frac{\pi}{2}-B$ 或 $A=\frac{\pi}{2}+B$. 若 $A=\frac{\pi}{2}-B$, 则 $A+B=\frac{\pi}{2}$, $C=\frac{\pi}{2}$, 但此时 $\tan C$ 无定义, 矛盾. 故必有 $A=\frac{\pi}{2}+B$, 即 $A-B=\frac{\pi}{2}$. 于是 $C=\pi-A-B=\frac{3\pi}{2}-2A$, 代入得

$$2A+C=2A+\left(\frac{3\pi}{2}-2A\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

(2) 由正弦定理, $c>b>\frac{2}{5}a$ 等价于 $\sin C>\sin B>\frac{2}{5}\sin A$. 由 (1), $A=\frac{\pi}{2}+B$, $C=\frac{\pi}{2}-2B$; $C>0$ 要求 $B<\frac{\pi}{4}$.

先证 $\sin C>\sin B$, 即 $\cos(2B)>\sin B$. 由题设 $\cos B=\tan C=\cot(2B)$, 得 $\cos(2B)=2\sin B\cos^2 B$, 故不等式化为 $2\sin B\cos^2 B>\sin B$. 因 $B\in(0,\frac{\pi}{4})$, $\sin B>0$, 约去后得 $\cos^2 B>\frac{1}{2}$, 即 $\cos B>\frac{1}{\sqrt{2}}$, 亦即 $B<\frac{\pi}{4}$, 恰为 $C>0$ 的必要条件, 故成立.

再证 $\sin B>\frac{2}{5}\sin A$, 即 $\sin B>\frac{2}{5}\cos B$, 或 $\tan B>\frac{2}{5}$. 仍用 $\cos B=\cot(2B)$. 令 $t=\tan B$, 则 $\cos B=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cot(2B)=\frac{1-t^2}{2t}$, 得

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1-t^2}{2t}.$$

由于 $B\in(0,\pi/4)$, $t\in(0,1)$, 方程两边均为正. 两边平方得

$$\frac{1}{1+t^2}=\frac{(1-t^2)^2}{4t^2}\implies 4t^2=(1+t^2)(1-t^2)^2$$

令 $u=t^2$, 得关于 u 的方程 $4u=(1+u)(1-u)^2$. 展开得 $4u=(1+u)(1-2u+u^2)=1-2u+u^2+u-2u^2+u^3=u^3-u^2-u+1$. 整理得一个关于 u 的三次方程

$$g(u)=u^3-u^2-5u+1=0$$

需证明 $t>\frac{2}{5}$, 这等价于证明 $u=t^2>\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$. 分析函数 $g(u)$. $g'(u)=3u^2-2u-5=(3u-5)(u+1)$. 因为 $B\in(0,\pi/4)$, 所以 $t=\tan B\in(0,1)$, 故 $u=t^2\in(0,1)$. 在此区间内, $u+1>0$ 且 $3u-5<0$, 故 $g'(u)<0$. 这说明函数 $g(u)$ 在其定义域 $(0,1)$ 上是严格单调递减的.

先计算 $u=\frac{4}{25}$ 处的函数值.

$$g\left(\frac{4}{25}\right)=\left(\frac{4}{25}\right)^3-\left(\frac{4}{25}\right)^2-5\left(\frac{4}{25}\right)+1=\frac{64}{15625}-\frac{16}{625}-\frac{4}{5}+1$$

$$=\frac{64-16\cdot 25-4\cdot 3125+15625}{15625}=\frac{64-400-12500+15625}{15625}=\frac{2789}{15625}>0$$

因为 $g(u)$ 单调递减, 且 $g(\frac{4}{25})>0$, 而 u_0 是使 $g(u_0)=0$ 的根, 故必有 $u_0>\frac{4}{25}$. 因此 $\tan^2 B>\frac{4}{25}$, 从而 $\tan B>\frac{2}{5}$.$\sin B>\frac{2}{5}\sin A$ 得证.

与前一部分 $\sin C>\sin B$ 合并, 不等式 $c>b>\frac{2}{5}a$ 得证.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.4.1 什么时候不宜使用建系法

前一节把建系法确立为处理复杂几何问题的一条保底路径. 然而普适性不等于最优性. 获得答案之后, 我们常常追问有没有更短、更直接的路. 过度依赖建系法, 有时会把结构清晰的问题变成冗长计算, 掩盖其内在几何联系.

因此需要敏锐识别那些不宜使用建系法的情形. 遇到下面几类情形, 我们优先尝试其他方法.

- **几何结构特征极其明显时**. 当题目条件或图形本身强烈暗示了某种特定的几何关系时, 回归纯粹的几何或三角方法往往更为高效.
  - **相似关系**: 若题目中出现平行线、角相等(尤其是跨越不同三角形的角相等)等条件, 应首先审视是否存在相似三角形. 相似关系能直接建立起边长的比例式, 其效率远高于通过坐标计算多条边长再求比值.
  - **圆的性质**: 若问题涉及共圆点、切线、相交弦等, 应优先考虑圆幂定理、托勒密定理、弦切角定理等. 这些定理是处理圆相关问题的专用工具, 能把复杂的几何构型直接转化为简洁的代数乘积式, 而坐标法需要联立直线与圆的方程, 计算量远大于此.
- **问题只涉及比例关系时**. 当问题的条件与结论主要涉及边长的比例时, 正弦定理、角平分线定理等工具能直接在比例的层面上操作. 坐标法引入了绝对的坐标值, 反而可能把一个简洁的比例问题复杂化.
- **向量方法更为直接时**. 对于涉及中点、重心、定比分点以及证明共线、垂直等问题, 向量运算往往比坐标运算更为简洁和普适. 向量法不依赖于坐标系的选择, 其运算直接反映几何变换本身.

为更精细地理解这种选择, 再看上一节的例题, 对比其几何解法与坐标法的思想差异.

例题 2.28 (方法对比分析) 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上一点, $DC=3, AD=5, AC=7, \angle DAC=\angle ABC$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解

解此题要洞察到条件 $\angle DAC=\angle ABC$ 的几何内涵. 考察 $\triangle DAC$ 与 $\triangle ABC$. 这两个三角形中

- $\angle C$ 是公共角, 即 $\angle DCA=\angle BCA$.
- $\angle DAC=\angle ABC$(题目已知).

根据 AA 相似判定, 得 $\triangle BAC\sim\triangle ADC$.

这一发现是解题的要点. 相似关系直接给出所有对应边的比例关系

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}=\frac{AB}{AD}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代入已知值 $AC=7, DC=3, AD=5$, 可直接解出所有未知边长

$$BC=\frac{AC^2}{DC}=\frac{7^2}{3}=\frac{49}{3}$$

$$AB=\frac{AC\cdot AD}{DC}=\frac{7\cdot 5}{3}=\frac{35}{3}$$

接下来, 为求面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B$, 只需 $\sin B$. 由 $\angle B=\angle DAC$, 在 $\triangle ADC$ 中利用余弦定理求出 $\cos(\angle DAC)$, 进而得到 $\sin(\angle DAC)$, 即 $\sin B$.

$$\cos(\angle DAC)=\frac{AD^2+AC^2-DC^2}{2(AD)(AC)}=\frac{5^2+7^2-3^2}{2(5)(7)}=\frac{65}{70}=\frac{13}{14}$$

$$\sin B=\sin(\angle DAC)=\sqrt{1-(13/14)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

最终面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{3}\cdot\frac{49}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{245\sqrt{3}}{12}$$

此解法逻辑清晰, 计算直接, 利用了问题的内在几何结构.

如前所示, 坐标法同样能解此题. 其路径如下. 建立坐标系 $\rightarrow$ 确定 A, C, D 坐标 $\rightarrow$ 设 B 的坐标为 $(x_B, 0)$ $\rightarrow$ 利用向量点积将 $\cos(\angle DAC)=\cos(\angle ABC)$ 转化为关于 x_B 的复杂方程 $\rightarrow$ 解方程求出 x_B $\rightarrow$ 计算底和高求得面积.

这个过程每一步都遵循固定的代数规则,完全可行. 然而它把一个简洁的相似关系拆解为一系列繁琐的坐标运算和方程求解. 在这一过程中, $\angle DAC=\angle ABC$ 这一条件被当作代数方程中的一个等量关系使用, 相似三角形之间的简洁联系便在繁琐计算中被忽略.

方法选择的准则

建系法普适但失于灵巧. 结构精巧的问题中, 几何关系往往更简洁; 当几何线索难以引导时, 建系法仍是稳健的路径. 以最能说明问题结构的方法求解, 本身就是一种基本的数学理解.

2.5 梅涅劳斯定理与塞瓦定理

正弦定理与余弦定理处理三角形的边角计算. 当问题涉及三点共线或三线共点时, 两个经典定理提供了直接的代数判据, 梅涅劳斯定理判定共线, 塞瓦定理判定共点.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.5.1 梅涅劳斯定理

定理 2.15 (梅涅劳斯定理) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 X、Y、Z 分别在边 AB、BC、CA 或其延长线上, 其中有奇数个点在边的延长线上. 三点 X、Y、Z 共线的充分必要条件是

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=-1 \tag{2-14}$$

其中各线段取有向长度(点在边上时比值为正, 在延长线上时为负).

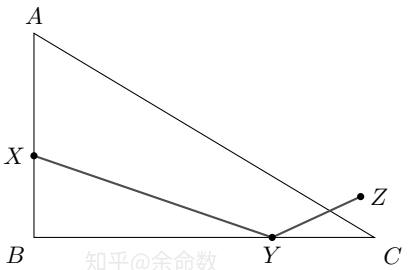


图 2.16　梅涅劳斯定理中截线 XYZ 与三角形三边, 或延长线的交点

证明 (面积法证明) 设直线 XYZ 截 $\triangle ABC$ 的三边, 或延长线于 X、Y、Z. 利用面积比与共边三角形的关系:

$$\frac{AX}{XB}=\frac{S_{\triangle AXY}}{S_{\triangle BXY}},\quad \frac{BY}{YC}=\frac{S_{\triangle BXY}}{S_{\triangle CXY}},\quad \frac{CZ}{ZA}=\frac{S_{\triangle CXY}}{S_{\triangle AXY}}$$

三式相乘, 分子分母轮换相消, 得

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=\frac{S_{\triangle AXY}}{S_{\triangle BXY}}\cdot\frac{S_{\triangle BXY}}{S_{\triangle CXY}}\cdot\frac{S_{\triangle CXY}}{S_{\triangle AXY}}=1$$

此处面积取有向面积, 当截线穿过三角形时恰有一个或三个交点在延长线上, 有向面积的符号使得乘积为 -1. □

证明 (向量法证明) 记 $\overrightarrow{AX}=\lambda_1\overrightarrow{XB},\overrightarrow{BY}=\lambda_2\overrightarrow{YC},\overrightarrow{CZ}=\lambda_3\overrightarrow{ZA}$. 选取 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 为基向量, 则

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AY}-\overrightarrow{AX}=\left(\frac{1}{1+\lambda_2}-\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{AX}=\frac{1}{1+\lambda_3}\overrightarrow{AC}-\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\overrightarrow{AB}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

X、Y、Z 三点共线当且仅当 $\overrightarrow{XY}$ 与 $\overrightarrow{XZ}$ 共线, 即两组系数对应成比例. 经计算, 这等价于 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$, 也就是 (2-14). □

向量形式给出了梅涅劳斯定理的简洁表达: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$, 且充分性与必要性在同一个计算中完成.

例题 2.29 (三个圆的外公切线交点共线) 考虑三个半径两两不同的圆, 每两个圆有一组外公切线, 三组外公切线的交点记为 P、Q、R. 这三个点共线.

解 设三个圆心为 A、B、C, 半径分别为 r_A、r_B、r_C. 圆 A 与圆 B 的外公切线交点 P 在 AB 的延长线上, 满足 $\frac{PA}{PB} = \frac{r_A}{r_B}$. 同理 $\frac{QB}{QC} = \frac{r_B}{r_C}$, $\frac{RC}{RA} = \frac{r_C}{r_A}$. 三式相乘: 知乎@余命数

$$\frac{PA}{PB}\cdot\frac{QB}{QC}\cdot\frac{RC}{RA} = \frac{r_A}{r_B}\cdot\frac{r_B}{r_C}\cdot\frac{r_C}{r_A} = 1$$

三个点分别在三角形三边的延长线上(偶数个在延长线上时乘积为 1, 对应梅涅劳斯定理的有向长度约定), 由梅涅劳斯定理知 P、Q、R 共线.

知乎@余命数

2.5.2 塞瓦定理

定理 2.16 (塞瓦定理) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 X、Y、Z 分别在边 AB、BC、CA 或其延长线上, 其中有偶数个点在边的延长线上. 三条线段 AY、BZ、CX 交于一点或相互平行的充分必要条件是

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA} = 1 \tag{2-15}$$

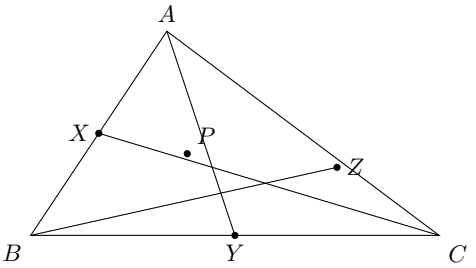


图 2.17 塞瓦定理, 三线 AY、BZ、CX 共点于 P

证明 (用梅涅劳斯定理证明) 设 AY、BZ、CX 交于点 P. 对 $\triangle ABY$ 和截线 XPC 使用梅涅劳斯定理: 知乎@余命数

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BC}{CY}\cdot\frac{YP}{PA} = -1$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再对 $\triangle ACY$ 和截线 BPZ 使用梅涅劳斯定理:

$$\frac{YB}{BC}\cdot\frac{CZ}{ZA}\cdot\frac{AP}{PY}=-1$$

两式相乘, $\frac{YP}{PA}\cdot\frac{AP}{PY}=1$, $\frac{BC}{CY}\cdot\frac{YB}{BC}=\frac{YB}{CY}$, 得

$$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BY}{YC}\cdot\frac{CZ}{ZA}=1$$

□

证明 (面积法证明) 设三条直线 AY、BZ、CX 交于 P. 利用共顶点三角形的面积比:

$$\frac{AX}{XB}=\frac{S_{\triangle CPA}}{S_{\triangle CPB}},\quad \frac{BY}{YC}=\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APC}},\quad \frac{CZ}{ZA}=\frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle BPA}}$$

知乎@余命数

三式相乘, 分子分母轮换相消, 得 1. □

证明 (向量法证明) 记 $\overrightarrow{AX}=\lambda_1\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY}=\lambda_2\overrightarrow{YC}$, $\overrightarrow{CZ}=\lambda_3\overrightarrow{ZA}$. 点 P 在 BZ 上, 可设 $\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{s}{1+\lambda_3}\overrightarrow{AC}$; 点 P 也在 CX 上, 可设 $\overrightarrow{AP}=\frac{t\lambda_1}{1+\lambda_1}\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$. 比较两组系数, 解出 P 的向量表达式, 再要求 P 在 AY 上, 得到 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$. □

塞瓦定理的向量形式与梅涅劳斯定理统一为: $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$ 判定共线, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ 判定共点.

知乎@余命数

2.5.2.1 塞瓦定理与三角形五心

塞瓦定理给出了三线共点的统一判据. 三角形的重心、内心、垂心都可以用塞瓦定理验证:

知乎@余命数

- **重心**: 三条中线的分比 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, 乘积为 1.
- **内心**: 三条角平分线的分比由角平分线定理给出 $\lambda_1=\frac{b}{a}$, $\lambda_2=\frac{c}{b}$, $\lambda_3=\frac{a}{c}$, 乘积为 1.
- **垂心**: 三条高线的分比 $\lambda_1=\frac{b\cos A}{a\cos B}$ 等, 乘积中余弦项轮换相消为 1.

2.5.3 张角定理

定理 2.17 (张角定理) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上任意一点, 则

$$\frac{\sin\angle BAC}{AD}=\frac{\sin\angle CAD}{AB}+\frac{\sin\angle BAD}{AC}\tag{2-16}$$

当射线 AD 落在 $\angle BAC$ 内部时, 逆定理成立, 即若四点满足上式, 则 B、C、D 三点共线.

知乎@余命数

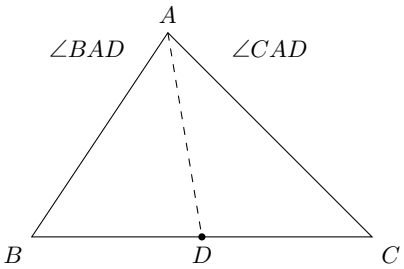


图 2.18 张角定理

证明 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 展开面积公式:

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD + \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin\angle CAD$$

两边同除以 $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot AD$ 即得 (2-16). □

张角定理建立了顶角被分成的两个角与对边分点之间的正弦关系, 常用于处理共线问题和角平分线长度公式.

例题 2.30 (角平分线长度公式) 利用张角定理推导三角形角平分线长度公式.

解 设 AD 是 $\angle A$ 的平分线, 则 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{A}{2}$. 由张角定理:

$$\frac{\sin A}{AD} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{AB} + \frac{\sin\frac{A}{2}}{AC} = \sin\frac{A}{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right)$$

利用 $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, 两边约去 $\sin\frac{A}{2}$:

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{AB + AC}{AB \cdot AC}$$

所以角平分线长度为

$$AD = \frac{2\,AB \cdot AC \cdot \cos\frac{A}{2}}{AB + AC}$$

结合余弦半角公式 $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ (s 为半周长), 可得

$$AD = \frac{2\sqrt{bc\,s(s-a)}}{b + c} \tag{2-17}$$

其中 $b = AC, c = AB$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.31 (共线判定) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的点, P 是平面上一点. 若 $\frac{\sin\angle BAP}{AP}=\frac{\sin\angle CAP}{AB}+\frac{\sin\angle BAP}{AC}$ 且 D 在 BC 上满足 $\angle BAP=\angle BAD$, 则 B、D、C 共线.

解 由张角定理的逆定理, 满足 (2-16) 的四点 A、B、C、D 中, B、C、D 必共线. 这给出了一个用正弦关系判定共线的方法.

2.6 斯特瓦尔特定理与三角形特殊点

2.6.1 斯特瓦尔特定理

斯特瓦尔特定理给出了三角形中从顶点到对边任意一点的距离公式, 它是中线长公式、角平分线长公式和余弦定理的推广.

定理 2.18 (斯特瓦尔特定理) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 边上任意一点, 记 $BD=m, CD=n, BC=a=m+n$, 则

$$m\,b^2+n\,c^2=a\,(AD^2+mn) \tag{2-18}$$

其中 $b=AC, c=AB$.

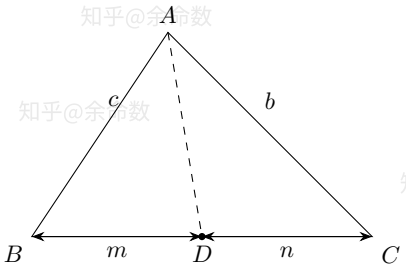


图 2.19　斯特瓦尔特定理

证明 (余弦定理证明) $\angle ADB$ 与 $\angle ADC$ 互补, 故 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$. 由余弦定理:

$$\cos\angle ADB=\frac{AD^2+m^2-c^2}{2\,AD\cdot m},\quad \cos\angle ADC=\frac{AD^2+n^2-b^2}{2\,AD\cdot n}$$

两式相加并乘以 $2\,AD\cdot mn$:

$$n(AD^2+m^2-c^2)+m(AD^2+n^2-b^2)=0$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

整理得 $(m+n)\,AD^2 = m\,b^2 + n\,c^2 - mn(m+n)$, 即 $a\,AD^2 = m\,b^2 + n\,c^2 - a\,mn$. □

证明 (向量法证明) 设 $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{DC}$, 则 $\lambda = \frac{m}{n}$, 且

$$\overrightarrow{AD} = \frac{n}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{a}\overrightarrow{AC}$$

两边取模平方:

$$AD^2 = \frac{n^2}{a^2}\,c^2 + \frac{m^2}{a^2}\,b^2 + \frac{2mn}{a^2}\,bc\cos A$$

用余弦定理 $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ 代入并整理, 即得 (2-18). □

知乎@余命数

2.6.1.1 中线长公式

当 D 为 BC 中点时, $m = n = \frac{a}{2}$, AD 为中线长 l_a. 代入 (2-18):

知乎@余命数

$$\frac{a}{2}(b^2 + c^2) = a\left(l_a^2 + \frac{a^2}{4}\right)$$

解出

$$l_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \tag{2-19}$$

2.6.1.2 角平分线长公式

当 AD 为 $\angle A$ 的平分线时, 由角平分线定理 $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$, 故 $m = \frac{ac}{b+c}$, $n = \frac{ab}{b+c}$. 代入 (2-18) 并整理:

知乎@余命数

$$\omega_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = \frac{4bc\,s(s-a)}{(b+c)^2} \tag{2-20}$$

知乎@余命数

其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$ 为半周长.

2.6.1.3 高线长公式与海伦公式

高线长 h_a 可直接由面积公式 $S = \frac{1}{2}ah_a$ 与余弦定理得到:

知乎@余命数

$$h_a = b\sin C = b\sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

知乎@余命数

结合 $S = \frac{1}{2}ah_a$ 与半周长 $s = \frac{a+b+c}{2}$, 得到海伦公式:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2-21}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2.6.2 三角形的旁心

定义 2.5 (旁心) 三角形一个内角的平分线与另外两个角的外角平分线交于一点, 称为该角对应的**旁心**. 旁心是三角形旁切圆的圆心, 旁切圆与一条边和另外两条边的延长线相切.

三角形有三个旁心, 分别记为 I_A、I_B、I_C, 对应顶点 A、B、C 的对角.

定理 2.19 (旁心的向量表示) 设 I_A 为 $\triangle ABC$ 对应顶点 A 的旁心, 以平面上任一点 O 为参考点, 则

$$\overrightarrow{OI_A}=\frac{-a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{-a+b+c} \tag{2-22}$$

知乎@余命数

证明 I_A 在 $\angle A$ 的内角平分线上, 同时在 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的外角平分线上. 由角平分线定理, I_A 到 BC 的距离等于到 AB、AC 延长线的距离. 利用塞瓦定理的向量形式, I_A 对应的分比为 $\lambda_1=-\frac{b}{a}$, $\lambda_2=\frac{c}{b}$, $\lambda_3=-\frac{a}{c}$, 乘积 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$, 满足塞瓦条件. 代入塞瓦定理的向量表达式即得. □

旁心 I_A 的重心坐标为 $(-a:b:c)$, 其中 a 前的负号反映了 I_A 在 $\angle A$ 的对侧. 当三角形为锐角三角形时, I_A 在 $\angle A$ 对侧的三角形外部.

2.6.3 费马点

知乎@余命数

定义 2.6 (费马点) 在 $\triangle ABC$ 中, 到三个顶点距离之和 $PA+PB+PC$ 最小的点 P 称为费马点.

定理 2.20 (费马点的构造) 若 $\triangle ABC$ 的所有内角都小于 120°, 费马点 F 满足 $\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120^\circ$. 若某个内角 $\geq 120^\circ$, 则该角顶点就是费马点.

知乎@余命数

证明 以 BC 为边向 $\triangle ABC$ 外侧作正三角形 BCD, 连接 AD. 对三角形内任一点 P, 把 $\triangle BPC$ 绕 B 旋转 60°, 使 C 落在 D 上, 记 P 的像为 P'. 旋转保持距离, 故 $P'D=PC$; 又 $BP'=BP$ 且 $\angle PBP'=60^\circ$, 故 $\triangle PBP'$ 是正三角形, $PP'=PB$. 于是

$$PA+PB+PC=PA+PP'+P'D\geq AD,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

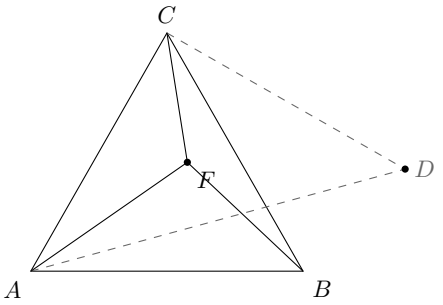


图 2.20 费马点 F, 以 BC 为边向外作正三角形 BCD, AD 与外接圆弧的交点即为 F

知乎@余命数

等号当且仅当 A、P、P'、D 依次共线, 此时 P 落在 AD 上. 故 $\triangle ABC$ 内使 $PA+PB+PC$ 最小的点 F 在 AD 上, 最小值为 AD.

再定 F 处的三个角. 取等号时 A、F、F'、D 依次共线, 而 $\triangle FBF'$ 是正三角形, 故 $\angle AFB = 180^\circ - \angle BFF' = 120^\circ$. 旋转把 C 映到 D、把 F 映到 F', 故 $\angle BFC = \angle BF'D = 180^\circ - \angle BF'F = 120^\circ$. 于是 $\angle CFA = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$. □

2.6.4 九点圆

定理 2.21 (九点圆定理) 在 $\triangle ABC$ 中, 以下九个点共圆:

1. 三边的中点(共 3 个);
2. 三条高线的垂足(共 3 个);
3. 三个顶点到垂心的连线的中点(共 3 个).

这个圆称为三角形的九点圆, 其半径等于外接圆半径的一半.

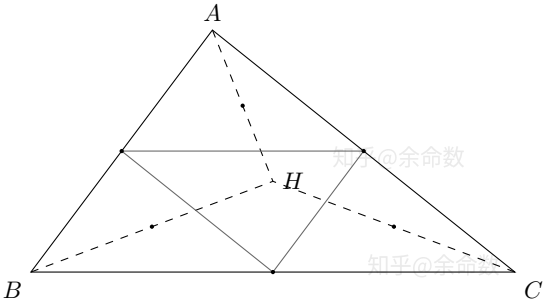


图 2.21 九点圆, 三边中点、三高线垂足、三顶点与垂心连线中点共圆

证明 设 H 为垂心, O 为外心, R 为外接圆半径. 记三边中点为 M_a、M_b、M_c, 三高线垂足为 D_a、D_b、D_c, 三顶点与垂心连线中点为 E_a、E_b、E_c, 并记 N 为 OH 的中点.

三边中点 M_a、M_b、M_c 构成中位三角形, 其外接圆半径为 $\frac{R}{2}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

以 O 为原点记顶点向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$，则 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|=R$，垂心向量 $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$，故 $\overrightarrow{ON}=\frac{\mathbf{h}}{2}$ 且

$$\overrightarrow{NM_a}=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}-\frac{\mathbf{h}}{2}=-\frac{\mathbf{a}}{2},\qquad \overrightarrow{NE_a}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{h}}{2}-\frac{\mathbf{h}}{2}=\frac{\mathbf{a}}{2}.$$

轮换即得 $|NM_a|=|NM_b|=|NM_c|=|NE_a|=|NE_b|=|NE_c|=\frac{R}{2}$. 这六点共圆，圆心为 N，半径 $\frac{R}{2}$，其中 $M_aM_bM_c$ 的外接圆就是这个圆.

高线垂足 D_a 也在这个圆上. 因 A、D_a、H 共线，而 E_a 是 AH 的中点，故直线 E_aD_a 就是高线所在直线，垂直于 BC；又 M_a、D_a 都在直线 BC 上，故 $\angle M_aD_aE_a=90^\circ$. 由 $\overrightarrow{M_aE_a}=\mathbf{a}$，即 $|M_aE_a|=R$，故 M_aE_a 是圆的直径，由直径所对的圆周角为直角知 D_a 在圆上. 轮换得 D_b、D_c 也在圆上.

九个点同在半径为 $\frac{R}{2}$ 的圆上，圆心在 OH 的中点处. □

定理 2.22 (欧拉公式) 设 O 为外心，I 为内心，R 为外接圆半径，r 为内切圆半径，则

$$OI^2=R^2-2Rr \tag{2-23}$$

证明 点 I 对以 O 为圆心、R 为半径的圆的幂为 OI^2-R^2，故 $OI^2=R^2-2Rr$ 等价于该幂等于 $-2Rr$.

利用内心的向量表示 $\overrightarrow{OI}=\frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$，计算 $|\overrightarrow{OI}|^2$ 并利用 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R$ 以及 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2C$ 等关系，再代入 $a=2R\sin A$ 与 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，化简得 $OI^2=R^2-2Rr$. □

欧拉公式给出了外心与内心距离的精确表达式. 由 $OI^2\geq 0$ 立得 $R\geq 2r$，即**欧拉不等式**，等号当且仅当三角形为正三角形时成立.

2.7 托勒密定理与西姆松定理

第2.5节 与 第2.6节 处理了三角形内部的线段关系. 本节转向圆内接四边形与三角形外接圆上的点，给出托勒密定理与西姆松定理，它们是圆与三角形结合的两个经典结论.

2.7.1 托勒密定理

圆内接四边形有对角互补的角度关系，但角度关系定不下对角线的长度. 托勒密定理把四条边和两条对角线压进一个等式，量出五条便锁定第六条. 取一条对角线为直径、圆直径为 1，这个等式给出两角和的正弦公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 2.23 (托勒密定理) 圆内接四边形 $ABCD$ 中, 两条对角线的乘积等于两组对边乘积之和

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \tag{2-24}$$

知乎@余命数

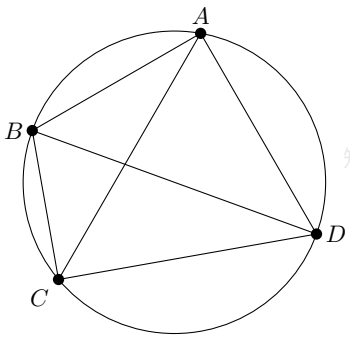


图 2.22 圆内接四边形 $ABCD$

证明 在 BD 上取点 E 使 $\angle BAE = \angle CAD$. 由 $\angle ABE = \angle ACD$, 同弧 AD 所对圆周角相等, $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, 故

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \implies AB \cdot CD = AC \cdot BE$$

又 $\angle BAC = \angle EAD$, 由 $\angle BAE = \angle CAD$ 两端加 $\angle EAC$ 即得, 且 $\angle ACB = \angle ADE$ (同弧 AB 所对), 故 $\triangle ABC \sim \triangle AED$, 于是

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD} \implies AD \cdot BC = AC \cdot ED$$

两式相加, 得 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD$. □

等号来自 E 恰好落在 BD 上, 使 $BE + ED = BD$. 构造一点拆分对角线、再用相似把乘积折算到同一段上, 是圆内接四边形度量问题的常用手法.

例题 2.32 (正五边形与黄金比) 正五边形 $ABCDE$ 的边长为 s, 对角线长为 d. 用托勒密定理求 d/s.

解 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = s$, $AC = BD = d$. 由托勒密定理 (2-24),

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

即 $d^2 = s^2 + d \cdot s$, 亦即 $d^2 - sd - s^2 = 0$. 解得 $d/s = (1 + \sqrt{5})/2 = \varphi$(黄金比).

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 2.33 (托勒密定理求对角线) 圆内接四边形 $ABCD$ 中 $AB=3, BC=4, CD=5, DA=6$. 求对角线 AC 与 BD 的比值.

解 由托勒密定理 $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC = 3\cdot 5 + 6\cdot 4 = 39$. 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中分别对 AC 用余弦定理, 由圆内接四边形对角互补 $B+D=\pi$ 得 $\cos D = -\cos B$.

$$AC^2 = 25 - 24\cos B = 61 + 60\cos B$$

解得 $\cos B = -3/7$, $AC^2 = 247/7$. 同理对 BD 用 $\cos C = -\cos A$.

$$BD^2 = 45 - 36\cos A = 41 + 40\cos A$$

知乎@余命数

解得 $\cos A = 1/19$, $BD^2 = 819/19$. 故

$$\frac{AC}{BD} = \sqrt{\frac{247/7}{819/19}} = \sqrt{\frac{247\cdot 19}{7\cdot 819}} = \sqrt{\frac{13\cdot 19^2}{7\cdot 9\cdot 7\cdot 13}} = \frac{19}{21}.$$

2.7.2 托勒密不等式

去掉四点共圆的条件, 托勒密等式不再成立. 对任意四点, 乘积 $AC\cdot BD$ 不超过两组对边乘积之和, 等号恰好把共圆情形挑出来. 这样托勒密定理就从计算工具升级为共圆判定.

知乎@余命数

定理 2.24 (托勒密不等式) 对平面上任意四点 A、B、C、D,

$$AC\cdot BD \le AB\cdot CD + AD\cdot BC \tag{2-25}$$

等号成立当且仅当 A、B、C、D 四点共圆; 四点共线的退化情形需另加次序条件, 例如四点共线且按 A、B、C、D 的次序排列时取等号.

证明 取点 E 使 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$(对应顶点 $A\to A, B\to C, E\to D$), 即 $\angle BAE = \angle CAD$ 且 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$. 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$, 故 $AB\cdot CD = AC\cdot BE$. 又 $\angle BAC = \angle EAD$, $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$, 故 $\triangle BAC \sim \triangle EAD$, $\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD}$, $AD\cdot BC = AC\cdot ED$. 于是

$$AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BE + AC\cdot ED = AC\cdot(BE+ED) \ge AC\cdot BD$$

最后一步用三角不等式 $BE+ED\ge BD$, 等号当 E 在线段 BD 上时成立. 此时 $\angle ABD$ 与 $\angle ABE$ 相等, 而 $\triangle ABE\sim\triangle ACD$ 给出 $\angle ABE = \angle ACD$, 故 $\angle ABD = \angle ACD$; 点 B 与点 C 对线段 AD 张出相等的圆周角, 于是 A、B、C、D 四点共圆. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明复用托勒密定理的构造, 区别在于点 E 一般不在 BD 上, 最后一步由三角不等式 $BE+ED\geq BD$ 产生不等号.E 落在 BD 上时 $\angle ABD=\angle ACD$, 这是四点共圆的刻画, 等号条件由此浮现.

2.7.3 西姆松定理

托勒密定理处理圆内接四边形的度量关系. 西姆松定理转向另一个问题, 即三角形外接圆上一点到三边作垂线时, 三个垂足何时共线. 对圆内任意一点, 三个垂足构成垂足三角形; 当点落在外接圆上, 垂足三角形退化为一条线段, 三个垂足共线. 这条线把点在圆上这一条件翻译成垂足共线的几何事实.

定理 2.25 (西姆松定理) 设 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上一点, 异于 A、B、C. 过 P 分别向三边 BC、CA、AB(或其延长线)作垂线, 垂足为 X、Y、Z. 则 X、Y、Z 三点共线.

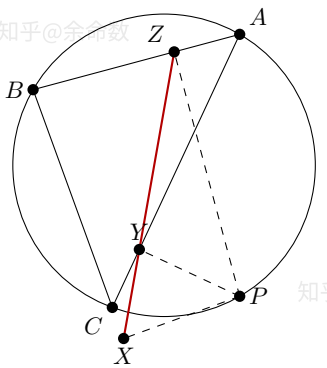


图 2.23 西姆松线, 外接圆上一点到三边的垂足所共的线

证明 以下用两直线的有向夹角 $\angle(l_1,l_2)$ 叙述. 它只依赖两条直线的方向, 以 180° 为周期, 于是三个垂足落在线段上还是落在线段延长线上不必分开讨论.

连接 PX、PY、PZ. 因 $\angle PXC=\angle PYC=90^\circ$, P、X、C、Y 四点共圆, PC 为直径, 同一弦 PX 在 Y 与 C 处张出相等的圆周角, 故

$$\angle(YP,\,YX)=\angle(CP,\,CX).$$

又 $\angle PZA=\angle PYA=90^\circ$, P、Z、A、Y 四点共圆, PA 为直径, 同一弦 PZ 张出

$$\angle(YP,\,YZ)=\angle(AP,\,AZ).$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 P、A、B、C 四点共圆, 弦 BP 在圆周上张出 $\angle(CB,\,CP)=\angle(AB,\,AP)$. 直线 CX 即直线 CB, 直线 AZ 即直线 AB, 于是

$$\angle(YX,\,YZ)=\angle(YX,\,YP)+\angle(YP,\,YZ)=-\angle(CP,\,CX)+\angle(AP,\,AZ)=\angle(CB,\,CP)+\angle(AP,\,AB)=$$

两条直线的有向夹角为零即二者方向相同, 而它们都过点 Y, 故 X、Y、Z 三点共线. □

证明靠两组四点共圆传递等角, $PXCY$ 与 $PZAY$ 分别以 PC、PA 为直径. P 在外接圆上给出 $\angle(CB,CP)=\angle(AB,AP)$, 经圆周角传递化为 $\angle(YX,YZ)=0$, 迫使 X、Y、Z 共线. 逆定理把论证反过来, 从垂足共线推出 $\angle(CB,CP)=\angle(AB,AP)$, 即 P 落在外接圆上. 正逆合在一起, 西姆松定理给出外接圆的垂足刻画.

定理 2.26 (西姆松定理的逆) 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点. 若 P 到三边 BC、CA、AB 的垂足 X、Y、Z 共线, 则 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明 设 X、Y、Z 共线, 仍用两直线的有向夹角. 由 $\angle PXC=\angle PYC=90^\circ$ 得 P、X、C、Y 四点共圆, 故 $\angle(YP,\,YX)=\angle(CP,\,CX)$; 由 X、Y、Z 共线得 $\angle(YP,\,YX)=\angle(YP,\,YZ)$; 又 P、Z、A、Y 四点共圆 (以 PA 为直径), 故 $\angle(YP,\,YZ)=\angle(AP,\,AZ)$. 三式合并, 并对两边同取反向角, 得

$$\angle(CB,\,CP)=\angle(CX,\,CP)=\angle(AZ,\,AP)=\angle(AB,\,AP),$$

其中 CX 即直线 CB, AZ 即直线 AB. 点 A 与点 C 对线段 PB 张出相等的有向角, 故 A、B、C、P 四点共圆, 即 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. □

定义 2.7 (西姆松线) 外接圆上一点 P 到三边的垂足所在的直线称为 P 对应的**西姆松线**.

西姆松定理与托勒密定理常在同一题中配合, 前者管外接圆上点的垂足共线, 后者管圆内接四边形的度量等式. 庞培定理是托勒密定理的一个干净推论.

例题 2.34 (庞培定理) 正 $\triangle ABC$ 外接圆上一点 P 到三顶点的距离 PA、PB、PC 中, 最大者等于其余两者之和.

解 设 P 在弧 BC 上且 $P\neq A$, 则 PA 最大. 对圆内接四边形 $PABC$ 用托勒密定理 (2-24),

$$PA\cdot BC=PB\cdot AC+PC\cdot AB$$

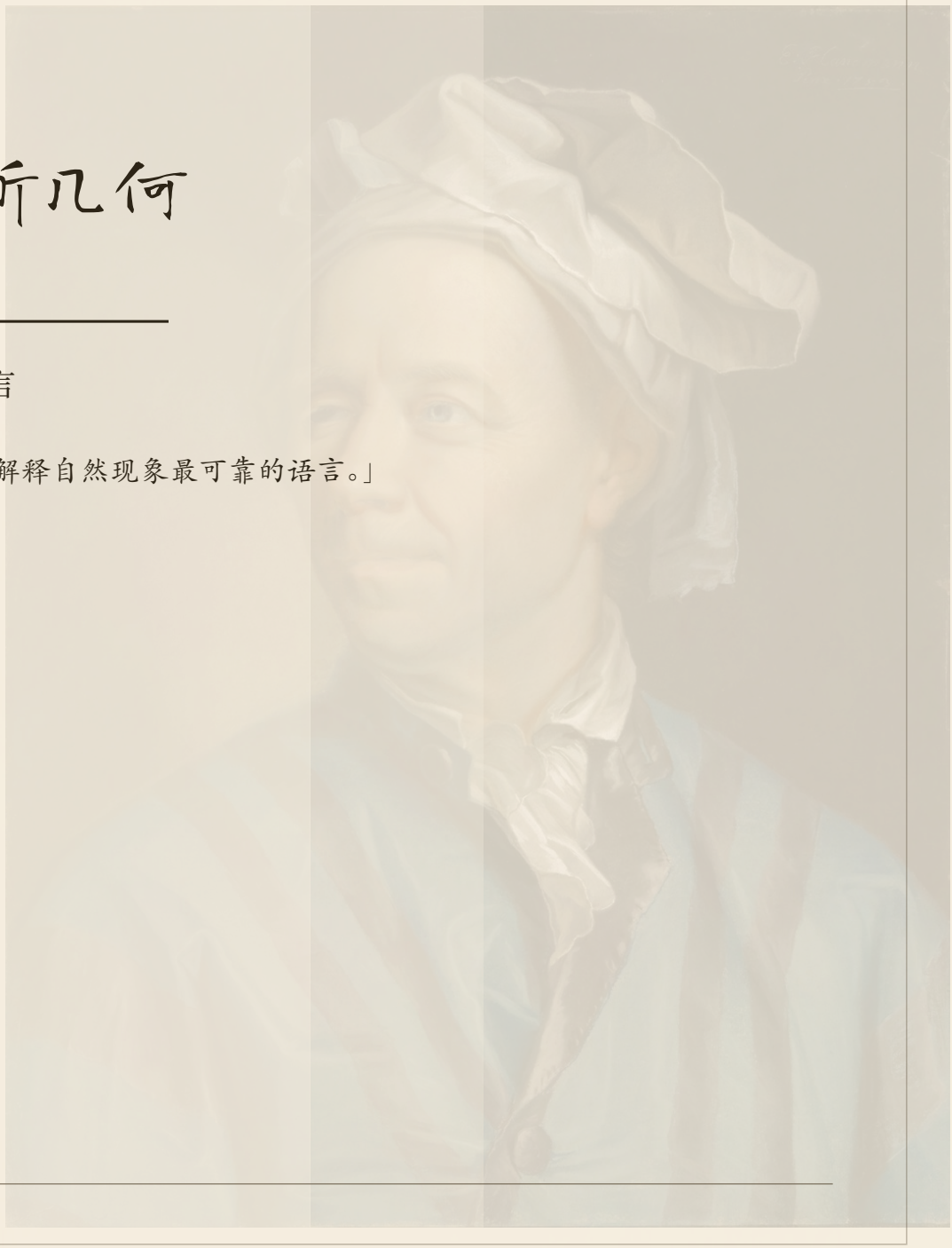
由 $AB=BC=CA$(正三角形), 两端约去边长得 $PA=PB+PC$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第 3 章

解析几何



基础语言

「数学是解释自然现象最可靠的语言。」

——欧拉

第三章 解析几何

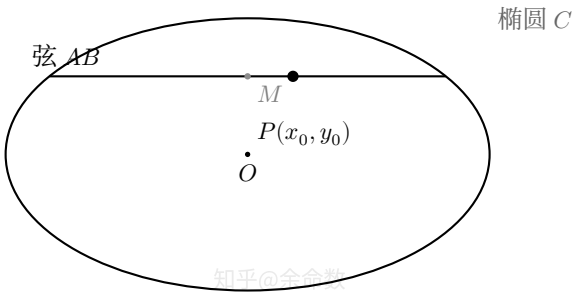


图 3.1 解析几何把几何对象翻译为坐标, 把几何关系翻译为代数方程

我们求解解析几何问题, 基本做法是把几何对象译为坐标, 把几何关系译为代数方程. 在建立方程之前, 需先选择参量. 一条路径用曲线上动点的坐标作参量, 另一条路径用直线方程的斜率与截距作参量. 前者对应本章后半部分讨论的**设点法**, 亦称点参法, 后者对应**设线法**, 亦称线参法、联立法.

本章在向量底座之上展开. 先建立直线与圆、线性规划(选学)以及椭圆、双曲线、抛物线等二次曲线的一般理论. 随后三节讨论设点法, 依次处理其技术基础、参量选择与典型应用. 再三节讨论设线法, 依次处理联立准备、直线方程形式的选择以及联立后的代数处理. 参数方程与极坐标将另设专章, 离心角等概念仅在设点法中作为工具引用. 在此基础上, 六节技巧专题分别处理一次式与法线式、直线偶与齐次化、三角形的心与共轴圆、轨迹方程与解析法证题. 最后一节回到方法论本身, 讨论何时设点、何时设线, 并指出与射影几何等后续章节的衔接.

注 3.1
平面向量的运算、数量积、定比分点与共线判定见第1章; 本章默认使用这些语言.

3.1 直线与圆

在建立了向量的代数体系之后, 我们便拥有了描述几何对象的有力工具. 此前, 几何对象的描述依赖于公理和逻辑演绎; 解析几何则把几何对象表示为代数方程, 从而将对形的研究转化为对数的运算. 将从最基本的几何图形直线与圆开始这一进程.

3.1.1 直线的方程

一条直线, 在欧几里得的观念中是没有宽度、无限延伸的长度. 用代数语言精确地捕捉这一概念, 可从不同的几何约束出发, 得到形式各异而彼此等价的方程.

描述直线方向最直观的量是其倾斜程度.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 3.1 (倾斜角与斜率) 在平面直角坐标系中, 对于一条直线 l, 我们把 x 轴正向绕 l 上任意一点逆时针旋转到与直线 l 重合时所转过的最小正角 α 称为该直线的**倾斜角**; 当 l 与 x 轴平行或重合时, 规定 $\alpha = 0$. 倾斜角的取值范围是 $[0, \pi)$. 当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 倾斜角 α 的正切值 $\tan\alpha$ 称为该直线的**斜率**, 记作 m.

注意到, 当直线与 x 轴平行时, $\alpha = 0, m = 0$. 当直线与 x 轴垂直时, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 其斜率不存在.

斜率刻画了直线变化的方向, 它等于直线在竖直方向上的变化量与水平方向上的变化量之比, 这个比值与直线上点的选取无关. 设直线 l 的斜率为 m, 且经过一个定点 $P_0(x_0, y_0)$. 对于直线上异于 P_0 的任意一点 $P(x, y)$, 有

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

整理此式, 即得直线的**点斜式方程**:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{3-1}$$

此方程表明, 一个定点 (x_0, y_0) 与一个斜率 m 即可确定一条直线.

若已知的定点是直线与 y 轴的交点 $(0, b)$, 我们称 b 为直线在 y 轴上的**截距**. 将该点坐标代入点斜式方程, 得到 $y - b = m(x - 0)$, 化简即得直线的**斜截式方程**:

$$y = mx + b \tag{3-2}$$

这是将函数思想与几何图形结合最紧密的方程形式.

过两点有且只有一条直线是基本的几何公理. 设已知直线上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$, 其中 $x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$. 首先, 可确定该直线的斜率:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

接着, 以 $P_1(x_1, y_1)$ 为定点, 利用点斜式方程, 可得

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

将此式变形, 得到更具对称性的**两点式方程**:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{3-3}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

若已知的两点恰好是直线与坐标轴的两个交点，即 x 截距点 $(a,0)$ 和 y 截距点 $(0,b)$，其中 a,b 均非零. 将 $x_1=a,y_1=0$ 和 $x_2=0,y_2=b$ 代入两点式方程：

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$$

$$\frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}=-\frac{x}{a}+1$$

整理即得直线的**截距式方程**：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{3-4}$$

知乎@余命数

上述各种方程形式直观地反映了直线的几何要素，但它们都存在局限性，例如点斜式和斜截式不能表示垂直于 x 轴的直线，而截距式不能表示过原点或与坐标轴平行的直线. 需一种能够涵盖所有情况的普适形式.

将任意一种形式的方程移项整理，都可以化为 $Ax+By+C=0$ 的形式. 例如，点斜式 $y-y_0=m(x-x_0)$ 可化为 $mx-y+(y_0-mx_0)=0$. 由此定义直线的一**般式方程**：

$$Ax+By+C=0 \quad (A,B\text{不全为零}) \tag{3-5}$$

当 $B\neq 0$，方程可化为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，即斜截式. 当 $B=0$，由于 A,B 不全为零，必有 $A\neq 0$，方程化为 $x=-\frac{C}{A}$，这是一条垂直于 x 轴的直线. 因此，一般式方程囊括了平面内所有直线.

为了更为精细地理解直线方程的内在结构，我们回归到向量的视角. 一条直线 l 可以由其上一点 P_0 和一个方向向量 $\vec{d}$ 唯一确定. 对于直线上任意一点 P，向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{d}$ 共线. 设 O 为原点，P_0,P 的位置向量分别为 $\overrightarrow{p_0},\vec{p}$，则 $\overrightarrow{P_0P}=\vec{p}-\overrightarrow{p_0}$. 于是存在实数 t 使得 $\vec{p}-\overrightarrow{p_0}=t\vec{d}$. 此即直线的**向量参数方程**：

$$\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{d},\quad t\in\mathbb{R}$$

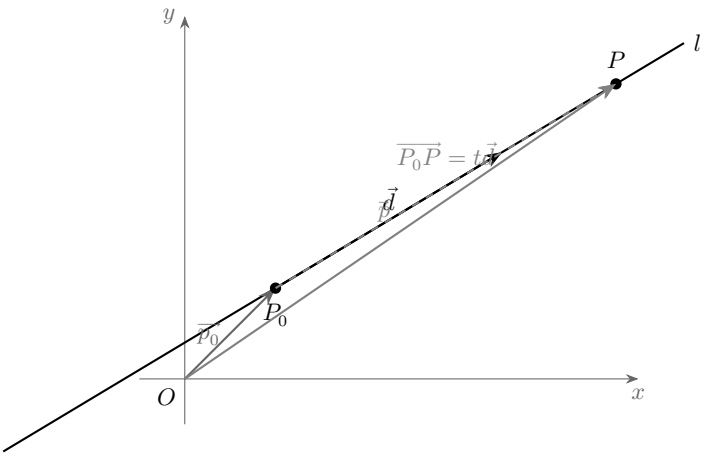
在笛卡尔坐标系下，设 $\vec{p}=(x,y),\overrightarrow{p_0}=(x_0,y_0),\vec{d}=(a,b)$. 向量方程等价于坐标表示的**参数方程**：

$$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

知乎@余命数

若 a,b 均不为零，消去参数 t 可得 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$，这被称为**对称式方程**，整理即得 $b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$，也就是 $bx-ay+(ay_0-bx_0)=0$. 这是 $Ax+By+C=0$ 的形式，其中 $A=b,B=-a,C=ay_0-bx_0$.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



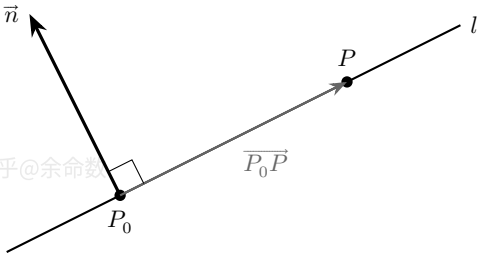
知乎@余命数

图 3.2　直线的向量参数表示

同时, 直线的方向亦可由一个与之垂直的**法向量** $\vec{n}$ 确定. 设直线过点 P_0, 法向量为 $\vec{n}$. 对线上任意点 P, 向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 恒与 $\vec{n}$ 正交, 故其数量积为零.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad \text{或} \quad \vec{n} \cdot (\vec{p} - \overrightarrow{p_0}) = 0$$

设 $\vec{n} = (A, B), \vec{p} = (x, y), \overrightarrow{p_0} = (x_0, y_0)$, 上述**点法式方程**展开为 $A(x - x_0) + B(y -$



知乎@余命数

图 3.3　直线的法向量表示法

$y_0) = 0$, 即 $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$. 令 $C = -(Ax_0 + By_0)$, 这又一次导出了直线的一般形式 $Ax + By + C = 0$. 这一推导说明了一个基本事实, 即**在直线的一般式方程 $Ax + By + C = 0$ 中, 系数 A 和 B 恰好构成该直线的一个法向量 $\vec{n} = (A, B)$.**

3.1.2 圆的方程

圆是继直线之后最简单的曲线. 其定义蕴含着一种纯粹的对称性.

知乎@余命数

定义 3.2 (圆) 平面内到一个定点 C 的距离等于一个定长 R 的所有点 P 的集合, 称为**圆**. 定点 C 称为**圆心**, 定长 R 称为**半径**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.1.2.1 圆的标准方程

这一定义可以直接翻译为代数语言. 引入笛卡尔坐标系, 设圆心 C 的坐标为 (h,k), 圆上任意一点 P 的坐标为 (x,y), 半径为 $R>0$. 把点 P 到点 C 的距离等于 R 用距离公式写出, 即得

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=R$$

由于距离 R 是非负的, 可对等式两边进行平方, 得到一个等价的、形式更简洁的方程, 此即圆的**标准方程**:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2 \tag{3-6}$$

此方程直观地展现了圆的三个几何要素: 圆心横坐标 h, 纵坐标 k 和半径 R. 特别地, 当圆心在原点 $(0,0)$ 时, 方程简化为 $x^2+y^2=R^2$.

从向量的角度看, 设圆心 C 和圆上一点 P 的位置向量分别为 $\vec{c}$ 和 $\vec{p}$. 定义 $|\vec{p}-\vec{c}|=R$ 即为圆的向量方程. 这也等价于 $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=R^2$, 它与坐标形式的方程是完全一致的.

3.1.2.2 圆的一般方程

将圆的标准方程 $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ 展开, 得

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-R^2=0$$

整理后, 方程具有以下形式:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

其中 $D=-2h, E=-2k, F=h^2+k^2-R^2$. 这被称为圆的**一般方程**. 其特点是:

- x^2 和 y^2 的系数相同, 且通常化为 1.
- 不含 xy 这样的交叉项.

自然要问, 是否任何形如 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的方程都表示一个圆; 即给定一组系数 D,E,F, 能否找到对应的圆心 (h,k) 和半径 R, 使得该方程与某个圆的标准方程等价.

为了回答这个问题, 我们采用配方法, 试图将一般方程还原为标准形式. 配方法的做法是, 把二次项和一次项组合成一个完全平方项, 使方程的形式更清晰.

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

$$(x^2+Dx)+(y^2+Ey)=-F$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为了配方, 需在 (x^2+Dx) 中加上 $(\frac{D}{2})^2=\frac{D^2}{4}$, 在 (y^2+Ey) 中加上 $(\frac{E}{2})^2=\frac{E^2}{4}$. 为了保证等式依然成立, 需在方程的右侧也加上相应的项:

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=-F+\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

方程的左侧是两个完全平方项的和, 形式上已经非常接近圆的标准方程. 为了使形式完全一致, 将方程右侧的表达式记作 $\frac{\Delta_c}{4}$, 其中 $\Delta_c=D^2+E^2-4F$.

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{\Delta_c}{4}$$

进一步变形, 得到

$$\left(x-\left(-\frac{D}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{E}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta_c}}{2}\right)^2$$

方程的几何意义完全取决于 Δ_c 的符号:

- **若** $\Delta_c>0$: 此时, $\frac{\sqrt{\Delta_c}}{2}$ 是一个正实数, 可以作为圆的半径 R. 方程表示一个圆心为 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$, 半径为 $R=\frac{\sqrt{\Delta_c}}{2}$ 的圆. 即, 当且仅当 $D^2+E^2>4F$ 时, 一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 才表示一个真正的圆.
- **若** $\Delta_c=0$: 此时, 方程变为

  $$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=0$$

  由于任何实数的平方都是非负的, 两个非负数的和为零, 意味着它们必须同时为零. 因此, $x=-\frac{D}{2}$ 且 $y=-\frac{E}{2}$. 方程只有一个解, 表示一个点 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$. 可将这个点视为半径为 0 的退化圆, 即圆心与圆周重合.
- **若** $\Delta_c<0$: 此时, 方程变为

  $$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{\Delta_c}{4}<0$$

  由于任何实数的平方都是非负的, 两个非负数的和也必然是非负的. 因此, 方程的左侧恒为非负, 而右侧为负数. 即, 不存在任何实数 x 和 y 能够满足该方程. 因此, 方程没有实数解, 不表示任何几何图形.

一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 只有在满足条件 $D^2+E^2>4F$ 时, 才表示一个圆. 此时, 圆心为 $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$, 半径为 $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

知乎@余命数

3.1.3 直线与圆的位置关系

研究直线与圆的位置关系, 实质上是研究它们的方程组解的情况. 设直线 l : $Ax+By+C=0$ 与圆 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$. 从代数角度看, 可联立这两个方程, 消去一个变量, 例如 y, 得到一个关于另一个变量, 例如 x 的一元二次方程. 该二次方程的判别式 Δ 的符号决定了交点的个数: $\Delta>0$ 对应两个交点, 即相交; $\Delta=0$ 对应一个交点, 即相切; $\Delta<0$ 对应无交点, 即相离.

然而, 这种纯代数的方法往往计算繁琐, 且掩盖了问题内在的几何结构. 一种更直接、更具几何意义的判别方法是比较圆心到直线的距离与半径的大小.

3.1.3.1 点到直线的距离

需一个公式来计算点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 l : $Ax+By+C=0$ 的距离 d. 设 $P_1(x_1,y_1)$ 是直线 l 上任意一点. 我们要求的是向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在直线法向量 $\vec{n}=(A,B)$ 方向上的投影的长度.

这个投影的长度 d 就是 P_0 到直线 l 的距离. 根据向量投影的公式:

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

将坐标代入: $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1),\vec{n}=(A,B)$.

$$d=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

由于点 $P_1(x_1,y_1)$ 在直线 l 上, 它的坐标满足直线方程, 即 $Ax_1+By_1+C=0$, 从而 $Ax_1+By_1=-C$. 代入上式, 即得点到直线的距离公式.

定理 3.1 (点到直线的距离) 点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$, 其中 A,B 不同时为 0 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

证明 因为 A,B 不同时为 0, 所以法向量 $\vec{n}=(A,B)$ 非零, 且直线 l 上可取一点 $P_1(x_1,y_1)$. 点 P_0 到直线的距离等于向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在法向量方向上的投影长度:

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

又 P_1 在直线 l 上, 故 $Ax_1+By_1+C=0$, 即 $Ax_1+By_1=-C$. 代入上式即得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

□

3.1.3.2 几何判别法

设圆 C 的圆心为 C, 半径为 R. 设直线为 l. 我们考察圆心 C 到直线 l 的距离, 记为 d. 设 H 是从 C 到 l 的垂足, 那么根据定义, $d = |CH|$. 接着考虑直线上任意一点 P. 点 P 是直线与圆的公共点, 当且仅当点 P 到圆心 C 的距离为 R, 即 $|CP| = R$.

在直角三角形 $\triangle CHP$ 中(若 P 与 H 不重合), 根据勾股定理, 有

$$|CP|^2 = |CH|^2 + |HP|^2$$

代入 d 和 R 的定义, 我们寻求满足下式的点 P:

$$R^2 = d^2 + |HP|^2$$

这个方程连接着代数关系与几何直观. 分析此方程解的存在性, 即可判断公共点的个数. 将方程变形为:

$$|HP|^2 = R^2 - d^2$$

方程的解, 即点 P 的位置, 取决于线段 HP 的长度 $|HP|$, 而 $|HP|$ 的值则完全由 $R^2 - d^2$ 的符号决定.

- **若** $d < R$, 则 $d^2 < R^2$, 从而 $R^2 - d^2 > 0$. 此时, 方程 $|HP|^2 = R^2 - d^2$ 有唯一正实数解 $|HP| = \sqrt{R^2 - d^2}$. 即在直线 l 上, 存在两个关于垂足 H 对称的点 P_1 和 P_2, 使得它们到 H 的距离等于这个正值. 这两个点 P_1, P_2 均满足 $|CP_1| = |CP_2| = R$, 故它们是直线上仅有的两个在圆上的点. 因此, 直线与圆**相交**, 有两个公共点. 此时直线称为圆的**割线**.
- **若** $d = R$, 则 $d^2 = R^2$, 从而 $R^2 - d^2 = 0$. 此时, 方程变为 $|HP|^2 = 0$, 其唯一解为 $|HP| = 0$. 即点 P 必须与垂足 H 重合. 因此, 直线与圆有且仅有一个公共点, 即垂足 H. 此时直线与圆**相切**, 该公共点称为**切点**.
- **若** $d > R$, 则 $d^2 > R^2$, 从而 $R^2 - d^2 < 0$. 此时, 方程 $|HP|^2 = R^2 - d^2$ 的右侧为负数. 由于任何实数的平方都不可能为负, 该方程没有实数解. 即在直线 l 上不存在任何点 P 能够满足 $|CP| = R$. 因此, 直线与圆**相离**, 没有公共点.

3.1.3.3 圆的切线

切线是位置关系中的临界状态, 具有简洁的几何性质. 注意到当直线与圆相切时, 圆心到直线的距离等于半径, 且这段距离本身就是由圆心到切点的半径. 即, **过切点的半径所在的直线与切线垂直**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

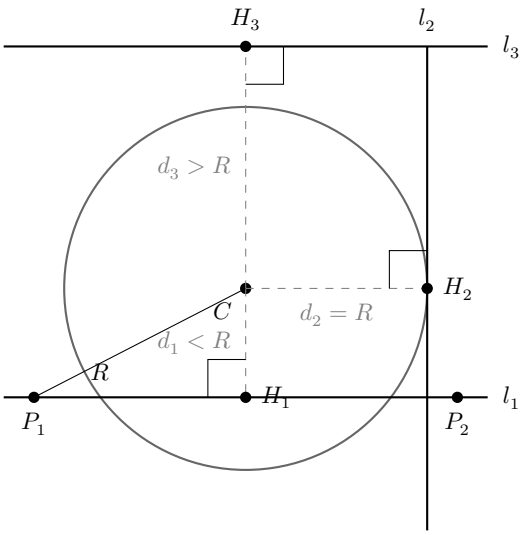


图 3.4 直线与圆的三种位置关系及其几何判定

这个性质提供一种求切线方程的实用方法. 设圆的标准方程为 $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$, 切点为 $P_0(x_0,y_0)$. 向量 $\overrightarrow{CP_0}=(x_0-h,y_0-k)$ 就是切线的一个法向量. 根据直线的点法式方程, 切线方程为

$$(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$$

为了得到一个更具对称性的形式, 对上式进行代数变换:

$$(x_0-h)(x-h-(x_0-h))+(y_0-k)(y-k-(y_0-k))=0$$

$$(x_0-h)(x-h)-(x_0-h)^2+(y_0-k)(y-k)-(y_0-k)^2=0$$

移项得到

$$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=(x_0-h)^2+(y_0-k)^2$$

由于点 $P_0(x_0,y_0)$ 在圆上, 它满足圆的方程, 即 $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=R^2$. 于是, 得圆的切线方程的**标准形式**:

$$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=R^2 \tag{3-7}$$

这个形式的特点在于, 它是将圆的标准方程 $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ 中的一个 $(x-h)$ 和一个 $(y-k)$ 分别替换为 (x_0-h) 和 (y_0-k) 得到的, 这种代换模式在解析几何的其他二次曲线的切线问题中也普遍存在.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

3.1.4 弦长、圆幂与两圆位置

前面给出了位置关系的几何判别. 再补充几件在解题中常用的工具: 弦长公式、圆幂、两圆位置与公切线, 以及直径所对圆周角. 它们既是直线与圆位置关系的自然延伸, 也是 第3.3节 中二次曲线弦长/点差的原型.

3.1.4.1 弦长公式

设圆 C 圆心为 C, 半径 R, 直线 l 与圆交于 P_1, P_2, 弦心距 $d = |CH| < R$(H 为垂足). 由直角三角形 CHP_1:

$$|P_1P_2| = 2\sqrt{R^2 - d^2}. \tag{3-8}$$

若采用设线法, 将 $y = kx + m$ 与圆方程联立得 $ax^2 + bx + c = 0$, 则弦长亦可写为

$$|P_1P_2| = \sqrt{1 + k^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|},$$

其中 $\Delta = b^2 - 4ac$. 两式等价, 几何式直接用 d, 代数式直接用韦达, 选型见 第3.7节.

例题 3.1 (弦长的几何与代数对照) 圆 $x^2 + y^2 = 25$, 直线 $x - y + 1 = 0$. 求弦长.

解 圆心 $O(0,0)$, $R = 5$. 弦心距

$$d = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故 $|P_1P_2| = 2\sqrt{25 - \dfrac{1}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{49}{2}} = 7\sqrt{2}$.

代数验算: 联立 $y = x + 1$ 与 $x^2 + (x+1)^2 = 25$, 得 $2x^2 + 2x - 24 = 0$, 即 $x^2 + x - 12 = 0$、$\Delta = 49$、$a = 1$、$k = 1$,

$$|P_1P_2| = \sqrt{2} \cdot \frac{7}{1} = 7\sqrt{2}.$$

3.1.4.2 圆幂与相交弦

定义 3.3 (点对圆的幂) 定点 P 对圆 C 的**幂**由过 P 的任一条与圆相交的直线的有向乘积 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 定义, 它与直线如何选取无关. 若圆方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 点 $P(x_0, y_0)$ 的幂等于把点代入圆方程左边所得值(对标准圆 $(x-h)^2 + (y-k)^2 - R^2$ 则为 $|PC|^2 - R^2$).

经典几何形式:

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **相交弦定理**：圆内两弦 AB, CD 交于 P，则 $|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$；
- **切割线定理**：自圆外一点 P 作割线交圆于 A, B，切线切于 T，则 $|PA|\cdot|PB| = |PT|^2$.

例题 3.2 (切割线) 圆 $x^2+y^2=4$，点 $P(4,0)$. 过 P 作圆的切线，求切线长；再过 P 作割线交圆于 A, B，验证 $|PA|\cdot|PB|$ 等于切线长的平方.

解 幂 $= |PO|^2 - R^2 = 16-4 = 12$，故切线长 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. 取水平割线 $y=0$ 与圆交于 $(\pm 2, 0)$，则 $A=(-2,0)$，$B=(2,0)$（有向时一端为负），乘积的绝对值 $|4-(-2)|\cdot|4-2|$ 在无向长度下为 $6\cdot 2 = 12$，与幂一致.

3.1.4.3 两圆的位置关系与公切线

设两圆圆心距为 d，半径 R_1, R_2 $(R_1 \ge R_2 > 0)$. 则

- $d > R_1 + R_2$：外离（4 条公切线：2 外切，2 内切）；
- $d = R_1 + R_2$：外切（3 条公切线）；
- $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$：相交于两点（2 条外公切线）；
- $d = |R_1 - R_2|$：内切（1 条外公切线）；
- $d < |R_1 - R_2|$：内含（无公切线，同心时 $d=0$ 另论）.

求公切线可用代数方法，设切线 $y = kx + m$（或 $x = my + n$），令圆心到直线距离等于相应半径，解 (k, m)；竖直切线单独讨论.

例题 3.3 (两圆公切线条数) 圆 $C_1: x^2+y^2=1$ 与 $C_2: (x-3)^2+y^2=1$. 判断位置关系并说明公切线条数.

解 圆心距 $d=3$、$R_1=R_2=1$、$R_1+R_2=2$、$|R_1-R_2|=0$. 因 $d>2$，两圆外离，有 4 条公切线.

3.1.4.4 直径所对的圆周角

定理 3.2 (Thales) 若 AB 为圆的直径，P 为圆上异于 A, B 的点，则 $\angle APB = \dfrac{\pi}{2}$，即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = 0$.

证明 取坐标系使圆心为原点、直径 AB 沿 x 轴：$A=(-R,0)$，$B=(R,0)$，圆上点 $P=(R\cos\theta, R\sin\theta)$ $(\sin\theta \ne 0)$. 则

$$\overrightarrow{PA} = R(-1-\cos\theta, -\sin\theta), \qquad \overrightarrow{PB} = R(1-\cos\theta, -\sin\theta).$$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

点积

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=R^2[(1+\cos\theta)(-1+\cos\theta)+\sin^2\theta]=R^2[\cos^2\theta-1+\sin^2\theta]=0.$$

故 $\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$. □

这一事实在 第3.3节 与设点法中反复出现:“以 PQ 为直径的圆过定点 F” $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$.

例题 3.4 (弦心距与中点) 圆 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 被直线 $x+y-1=0$ 所截得的弦的中点为 M. 求 M 的坐标与弦长.

解 配方得圆心 $C(2,1)$, $R=3$. 弦的中点 M 是圆心到直线的垂足, 故 $CM\perp$ 直线. 直线法向量 $(1,1)$, 故

$$M=(2,1)+t(1,1)=(2+t,1+t),$$

且 M 在直线上: $(2+t)+(1+t)-1=0 \implies 2+2t=0 \implies t=-1$. 于是 $M=(1,0)$. 弦心距 $d=|CM|=\sqrt{2}$, 弦长 $2\sqrt{9-2}=2\sqrt{7}$.

3.1.5 圆中范围与最值例题

圆上动点引发的 range 与最值问题, 通常要把目标式翻译为斜率、截距或距离, 再用相切条件求极值.

例题 3.5 (斜率型) 已知实数 x,y 满足方程 $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为(　)

A. 0　　C. $\sqrt{3}$

B. 1　　D. 2

解 答案:C. 方程 $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$ 化为 $(x-2)^2+y^2=3(y\geqslant 0)$, 表示的图形是一个以 $(2,0)$ 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的半圆; 令 $\frac{y}{x}=k$, 即 $y=kx$, 如图所示, 当直线与半圆相切时, 圆心到直线的距离 $d=\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$, 解得 $k=\sqrt{3}$ 或 $k=-\sqrt{3}$(负值不满足条件, 舍去), 所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$, 故选:C.

例题 3.6 (斜率型) 如果实数 x,y 满足 $(x-2)^2+y^2=2$, 则 $\frac{y}{x}$ 的范围是(　)

A. $(-1,1)$　　C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

B. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 答案: B. 设 $\frac{y}{x}=k$, 则 $y=kx$ 表示经过原点的直线, k 为直线的斜率. 如果实数 x,y 满足 $(x-2)^2+y^2=2$ 和 $\frac{y}{x}=k$, 即直线 $y=kx$ 同时经过原点和圆上的点 (x,y). 其中圆心 $C(2,0)$, 半径 $r=\sqrt{2}$ 从图中可知, 斜率取最大值时对应的直线斜率为正且刚好与圆相切, 设此时切点为 E

例题 3.7 (直线型) (2024·江西吉安·宁冈中学校考一模) 已知点 $P(x,y)$ 是圆 $x^2+y^2-6x-4y+12=0$ 上的动点, 则 $x+y$ 的最大值为(　)

A. $5+\sqrt{2}$　　C. 6

B. $5-\sqrt{2}$　　D. 5

余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

解 答案: A. 由 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$, 令 $\begin{cases}x=3+\cos\theta\\ y=2+\sin\theta\end{cases}$, 则 $x+y=5+\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$, 所以当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=1$ 时, $x+y$ 的最大值为 $5+\sqrt{2}$. 故选: A

例题 3.8 (直线型) 已知点 $P(x,y)$ 是圆 $C:(x-a)^2+y^2=3(a>0)$ 上的一动点, 若圆 C 经过点 $A(1,\sqrt{2})$, 则 $y-x$ 的最大值与最小值之和为(　)

A. 4　　C. -4

B. $2\sqrt{6}$　　D. $-2\sqrt{6}$

解 答案: C. 因为圆 $C:(x-a)^2+y^2=3(a>0)$ 经过点 $A(1,\sqrt{2})$, $(1-a)^2+2=3$, 又 $a>0$, 所以 $a=2$, $y-x$ 可看成是直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距. 如图所示, 当直线 $y=x+b$ 与圆相切时, 纵截距 b 取得最大值或最小值, 此时 $\frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$, 解得 $b=-2\pm\sqrt{6}$, 所以 $y-x$ 的最大值为 $-2+\sqrt{6}$, 最小值为 $-2-\sqrt{6}$, 故 $y-x$ 的最大值与最小值之和为 -4. 故选: C.

例题 3.9 (距离型) 已知点 $P(m,n)$ 在圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=9$ 上运动, 则 $(m+2)^2+(n+1)^2$ 的最大值为__, 最小值为__, $\sqrt{m^2+n^2}$ 的范围为__.

解 答案: $64;4;[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$. 由圆 C 的圆心为 $(2,2)$, 半径为 3, 且 P 在圆 C 上, 则 $(m+2)^2+(n+1)^2$ 表示在圆 C 上点到 $(-2,-1)$ 距离的平方. 而圆心到 $(-2,-1)$ 的距离为 $\sqrt{[2-(-2)]^2+[2-(-1)]^2}=5>3$, 所以在圆 C 上点到 $(-2,-1)$ 距离的最大值为 8, 最小值为 2, 故 $(m+2)^2+(n+1)^2$ 的最大值为 64, 最小值为 4; 又 $\sqrt{m^2+n^2}$ 表示在圆 C 上点到原点的距离, 而圆心到原点距离为 $2\sqrt{2}<3$,

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.10 (周长面积型) (2024·高三·河南·开学考试)若直线 $l:kx-y+2-k=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 交于 A,B 两点,则当 $\triangle ABC$ 周长最小时, $k=$(　)

A. $\frac{1}{2}$　　C. 1

B. $-\frac{1}{2}$　　D. -1

解 答案:C. 直线 $l:kx-y+2-k=0$ 的方程可化为 $y-2=k(x-1)$ 所以直线 l 恒过定点 $D(1,2)$,因为 $1^2+2^2-4\times1-2\times2-4=-7<0$

例题 3.11 (数量积型) 已知 PQ,MN 是半径为 5 的圆 O 上的两条动, $|\overrightarrow{PQ}|=6,|\overrightarrow{MN}|=8$,则 $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}|$ 最大值是(　)

A. 7　　C. 14

B. 12　　D. 16

解 答案: C. 如图, 连接 MO,OQ,OP,ON, 作 $PQ\perp OE,MN\perp OD$, 易知 E 是 QP 的中点, D 是 MN 的中点, 由股定理得 $OE=4,OD=3$, 故 $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})-(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE})$, 故 $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{QN}|=2|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}|\leqslant2(|\overrightarrow{OD}|+|\overrightarrow{OE}|)=14$, 当 $\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}$ 反向时等号成立, 故 C 正确. 故选:C

例题 3.12 (坐标与角度型) 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$, 点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $x-y+1=0$ 上运动. 若 C 上存在点 Q, 使 $\angle CPQ=30^\circ$, 则 x_0 的取值范围是__.

解 答案: $[-1,1]$. 圆 $C(1,0)$, P 在直线 $x-y+1=0$ 上, 若圆存在点 Q, 使得 $\angle CPQ=30^\circ$, 当 P 在直线 $x-y+1=0$ 上运动, 极端情况, PQ 与圆 C 相切, $\angle CPQ=30^\circ$. 在 $RT\triangle CPQ$ 中, $|CQ|=1$, 所以 $|CP|=2$. 所以以 $(1,0)$ 为圆心, 2 为半径的圆与直线交于 P,P_1 两点. 符合条件的点在线段 PP_1 之间. 所以 $\begin{cases}x-y+1=0\\(x-1)^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$ 故 x_0 的取值范围为 $[-1,1]$. 故答案为:$[-1,1]$

例题 3.13 (坐标与角度型) 已知 x,y 满足 $x^2+y^2=4y-3$, 则 $\dfrac{\sqrt{3}x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的最大值为(　)

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

A. 1　　C. $\sqrt{3}$

B. 2　　D. $\sqrt{5}$

解 答案:C.

知乎@余命数

例题 3.14 (长度和差型) 已知复数 $z_1=a+bi, z_2=c+di, a,b,c,d\in R$, 若 $|z_1|=|z_2|=2$, 且 $ac+bd=2$, 则 $|a+b-4|+2|c+d|$

知乎@余命数

知乎@余命数

例题 3.15 (方程中的参数型) (2024·山东泰安·二模) 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1, AD=\sqrt{3}$,动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上,则 $\vec{AP}\cdot\vec{AD}$ 的最大值为__;若 $\vec{AP}=m\vec{AB}+n\vec{AD}(m,n\in R)$, 则 $m+n$ 的最大值为__.

解 答案: $\frac{9}{2}, 3$. 如图, 以点为原点, 以 BA, BC 所在的直线为 y, x 轴建立如图所示的坐标系, 则 $B(0,0)$、$A(0,1)$、$D(\sqrt{3},1)$、$C(\sqrt{3},0)$、$\vec{AD}=(\sqrt{3},0)\therefore$ 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上, 设圆的半径为 r, $\therefore BC=\sqrt{3}, CD=1, \therefore BD=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2\therefore\frac{1}{2}BC\cdot CD=\frac{1}{2}BD\cdot r, \therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}\therefore$ 圆的方程为 $(x-\sqrt{3})^2+y^2=\frac{3}{4}$,设点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$,则 $\vec{AP}=(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-1)$, $\vec{AP}\cdot\vec{AD}=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\sqrt{3})=\frac{3}{2}\cos\theta+3\in[-\frac{3}{2},\frac{9}{2}]$, 故 $\vec{AP}\cdot\vec{AD}$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$;$\therefore\vec{AP}=m\vec{AB}+n\vec{AD}(m,n\in R)$, $\vec{AB}=(0,-1)$,

知乎@余命数

例题 3.16 (多选题) (多选题)设点 $P(x,y)$ 为圆 $C: x^2+y^2=1$ 上一点, 已知点 $A(4,0), B(5,0)$, 则下列结论正确的有(　)

A. $x+y$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

B. $x^2+y^2-4x-4y$ 的最小值为 -8

C. 存在点 P 使 $|PB|=\sqrt{2}|PA|$

D. 过 A 点作圆 C 的切线, 则切线长为 $\sqrt{15}$

解 答案: AD. 对于 A, 设 $x+y=k$, 则 $C(0,0)$ 点到直线 $x+y=k$ 的距离 $\frac{|0+0-k|}{\sqrt{2}}\leqslant 1$, 解得 $-\sqrt{2}\leqslant k\leqslant\sqrt{2}$, 得 k 的最大值为 $\sqrt{2}$, 故 A 正确; 对于 B, 令 $x^2+y^2-4x-4y=1-4x-4y=k$, 则 $C(0,0)$ 点到直线 $1-4x-4y=k$ 的距离 $\frac{|1-k|}{\sqrt{32}}\leqslant 1$, 解得 $-\sqrt{32}+1\leqslant k\leqslant\sqrt{32}+1$, 得 k 的最小值为 $-4\sqrt{2}+1$, 故 B 错误; 对于 C, 假设存在点 P 使 $|PB|=\sqrt{2}|PA|$, 设 $P(x,y)$, 则 $\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x-4)^2+y^2}$,化简得 $(x-3)^2+y^2=2$,因此满足 $|PB|=\sqrt{2}|PA|$ 的点 P 在圆 $(x-3)^2+y^2=2$ 上,此圆圆心为 $(3,0)$,半径为 $\sqrt{2}$,而 $\sqrt{2}+1<3$,因此与圆 C 外离, 所以不存在点 P 使 $|PB|=\sqrt{2}|PA|$, 故 C 错误;对于 D, 圆 C 的圆心为 $C(0,0)$, 半

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

径为 $r=1$, 则过 A 点作圆 C 的切线, 则切线长为 $\sqrt{|AC|^2-r^2}=\sqrt{4^2-1}=\sqrt{15}$, 故 D 正确. 故选: AD.

例题 3.17 (多选题) (2024·高三·辽宁鞍山·开学考试)已知直线 $kx-y+k=0$, 圆 $C: x^2+y^2-6x+5=0$, $P(x_0,y_0)$ 为圆 C 上任意一点, 则下列说法正确的是(　)

A. $x_0^2+y_0^2$ 的最大值为 5
B. $\frac{y_0}{x_0}$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. 直线 l 与圆 C 相切时, $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
D. 圆心 C 到直线 l 的距离最大为 4

解 答案: BC. 圆 C 的方程可化为 $(x-3)^2+y^2=2^2$, 所以圆 C 的圆心为 $C(3,0)$, 半径 $r=2$、$|OC|=3$、$P(x_0,y_0)$ 是圆上的点, 所以 $x_0^2+y_0^2$ 的最大值为 $(3+2)^2=25$, A 选项错误.

例题 3.18 若实数 x,y 满足条件 $x^2+y^2=1$, 则 $\frac{x+y-1}{x+1}$ 的范围是(　)

A. $[\frac{1}{4},+\infty)$
B. $(-\infty,\frac{1}{4}]$
C. $(-\infty,\frac{1}{2}]$
D. $[\frac{1}{2},+\infty)$

解 答案: B. 令 $\frac{x+y-1}{x+1}=k$, 可得 $(k-1)x-y+k+1=0$, 则直线 $(k-1)x-y+k+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点, 所以, $\frac{|k+1|}{\sqrt{(k-1)^2+1}}\leq 1$, 解得 $k\leq\frac{1}{4}$, 即 $\frac{x+y-1}{x+1}$ 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{4}]$, 故选: B.

例题 3.19 (2024·山东日照·二模)若实数 x,y 满足条件 $x^2+y^2=1$, 则 $\frac{y-2}{x+1}$ 的范围是(　)

A. $[0,\sqrt{2}]$
B. $[-3,5]$
C. $(-\infty,-1]$
D. $(-\infty,-\frac{3}{4}]$

解 答案: D. $\frac{y-2}{x+1}$ 的几何意义即圆上的点 (x,y) 到定点 $(-1,2)$ 的斜率, 由图知, 斜率的范围处在圆的两条切线率之间, 其中 AC 斜率不存在, 设 AB 的斜率为 k, 则 AB 的方程为 $y=k(x+1)+2=kx+k+2$, 由切线性质有, $\frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 解得 $k=-\frac{3}{4}$, 故 $\frac{y-2}{x+1}$ 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{3}{4}]$, 故选: D.

例题 3.20 已知 $P(m,n)$ 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点, 则 $\frac{m+n}{m+1}$ 的最大值为(　)

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

解 答案:C. $\frac{m+n}{m+1}=\frac{m+1+n-1}{m+1}=1+\frac{n-1}{m+1}$,由于 $P(m,n)$ 为圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上任意一点, 故 $\frac{n-1}{m+1}$ 可看作圆上任意一点 $P(m,n)$ 到定点 $A(-1,1)$ 的斜率, 当直线 PA 与圆相切时, 此时斜率最大, 由于相切时, $|AC|=2,|CP|=1$ 故 $|PA|=\sqrt{3}$, 此时斜率 $k=\frac{|PC|}{|AP|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 故 $\frac{m+n}{m+1}$ 的最大值为 $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选:C

例题 3.21 点 $P(x,y)$ 在圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ 上, 则 $x+y$ 的范围是__.

解 答案:$[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]$. 设 $x=2+\cos\theta,y=-3+\cos\theta$,即 $P(2+\cos\theta,-3+\sin\theta)$, 所以 $x+y=\sin\theta+\cos\theta-1=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1$, 因为 $-1\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le1$, 所以 $-\sqrt{2}-1\le x+y\le\sqrt{2}-1$. 故答案为:$[-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1]$

例题 3.22 已知 x,y 满足 $x^2+y^2+2x-4y=0$, 则 $2x+y$ 的范围是__.

解 答案:$[-5,5]$. 因为 $x^2+y^2+2x-4y=0$, 所以 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$, 表示以 $(-1,2)$ 为圆心, $\sqrt{5}$ 为半径的圆, 即点 (x,y) 为圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 上的点. 令 $2x+y=z$, 即 $2x+y-z=0$, 当直线与圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 相切时 z 取得最值, 所以 $d=\frac{|2\times(-1)+2-z|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$, 即 $|z|=5$, 解得 $z=\pm5$, 所以 $-5\le2x+y\le5$. 故答案为:$[-5,5]$

例题 3.23 如果实数 x,y 满足等式 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$, 那么 x^2+y^2 的最大值是__;$2x-y$ 的最大值是__.

解 答案:$14+6\sqrt{5};3\sqrt{5}-5$. 由 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$, 得 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$, x^2+y^2 的几何意义为圆 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ 上的动点到原点距离的平方. 因为圆心 $(-2,1)$ 到原点的距离为 $\sqrt{5}$, 所以圆上的动点到原点距离的最大值为 $\sqrt{5}+3$, 则 x^2+y^2 的最大值是 $(\sqrt{5}+3)^2=14+6\sqrt{5}$. 令 $2x-y=t$, 则 $-t$ 是直线 $2x-y=t$ 在 y 轴上的截距, 当直线与圆相切时, 直线 $2x-y=t$ 在 y 轴上的截距, 一个是最大值, 一个是最小值, 此时, 圆心 $(-2,1)$ 到直线 $2x-y=t$ 的距离 $d=\frac{|-4-1-t|}{\sqrt{5}}=3$, 解得 $t=-5\pm3\sqrt{5}$, 所以 $2x-y$ 的最大值为 $3\sqrt{5}-5$. 故答案为:$14+6\sqrt{5};3\sqrt{5}-5$.

例题 3.24 直线 $l:kx-y-2k+2=0(k\in R)$ 过定点 Q, 若 P 为圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 上任意一点, 则 $|PQ|$ 的最大值为(　)

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

A. 1　　C. 4

B. 3　　D. 2

解 答案: B. 由 $kx-y-2k+2=0(k\in R)$, 得 $y-2=k(x-2)$, 所以直线过定点 $Q(2,2)$, 由 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=4$, 知圆心坐标 $(2,3)$, 半径为 2, 所以 Q 到圆心的距离为 $d=\sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2}=1<2$, 则 Q 在圆内, 则 $|PQ|$ 的最大值为 $d+2=3$, 故选: B

3.1.6 本节小结

知乎@余命数

- **直线方程**: 点斜 / 斜截 / 两点 / 截距 / 一般式 $Ax+By+C=0$; 向量参数式 $\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{d}$.
- **圆**: 标准式 $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$; 一般式 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$(配方得圆心半径).
- **位置关系**: 比较弦心距 d 与 R; 切线替换式 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=R^2$.
- **弦长**: 几何式 $2\sqrt{R^2-d^2}$; 代数式 $\sqrt{1+k^2}\,\sqrt{\Delta}/|a|$.
- **圆幂**: 相交弦 / 切割线; 两圆位置由圆心距与半径比较; 直径所对圆周角为直角.

知乎@余命数

3.1.7 本节习题

知乎@余命数

3.1. 求点 $(1,-2)$ 到直线 $3x-4y+5=0$ 的距离, 并判断该点在直线哪一侧对距离公式中绝对值的影响.

3.2. 圆 $x^2+y^2=16$, 直线 $y=x+m$. 求使直线与圆相切的 m, 并写出切线方程.

3.3. 圆 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 被直线 $x-2y+1=0$ 所截, 求弦长与弦中点坐标.

3.4. 自点 $P(6,0)$ 向圆 $x^2+y^2=4$ 作切线, 求切线长; 若割线过 P 交圆于 A,B, 说明 $|PA|\cdot|PB|$ 的定值.

3.5. 两圆 $x^2+y^2=1$ 与 $(x-2)^2+y^2=4$, 判断它们相交、相切还是相离, 并求公共弦所在直线方程(两圆方程相减).

3.6. AB 为圆 $x^2+y^2=r^2$ 的直径, P 在圆上. 用坐标证明 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$, 并说明这与直径所对圆周角为直角这一事实的等价性.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.2 线性规划初步 *

在前面的章节中, 我们运用解析几何的工具来描述和分析确定的几何图形. 接着将视野转向一个更具动态和决策性的领域, 即如何在给定的限制条件下做出最优的选择. 这是运筹学要解决的问题, 而线性规划是处理此类问题最基本且最实用的数学工具之一.

从实质上讲, 线性规划是一种数学建模技术, 用于解决资源分配的最优化问题. 几乎所有组织, 无论是商业公司, 政府机构, 还是非营利组织, 都面临着一个共同的挑战, 即在资源, 如资金, 原材料, 人力, 时间有限的情况下, 如何实现某个目标的最大化, 如利润, 效率, 社会福利或最小化, 如成本, 风险, 资源消耗.

一个问题能够被构建为线性规划模型, 必须具备三个数学要素:

- **目标函数**: 一个需要被最优化的量, 并且这个量可以表示为决策变量的线性函数. 线性意味着变量之间的关系是成比例的, 例如, 生产两倍的产品会获得两倍的利润.
- **决策变量**: 一组可控制的变量, 它们的取值共同构成一个决策方案. 例如, 生产线上各种产品的产量, 或投资组合中各项资产的金额.
- **约束条件**: 一系列描述决策变量必须满足的限制条件的线性等式或不等式. 它们反映了现实世界中资源的稀缺性或规则的限制.

知乎@余命数

因此, 线性规划的宏观定义是**在一组线性约束条件下, 寻找一组决策变量的值, 使得一个线性目标函数达到最优(最大或最小)的数学方法.**

3.2.0.1 经济学中的资源优化问题

知乎@余命数

线性规划的思想与经济学的基本原则, 即研究稀缺资源如何有效配置, 不谋而合. 因此, 它在经济学领域得到了极其广泛和基本的应用. 一个经典的**生产计划问题**可以具体说明这一点.

设想一个企业, 它利用有限的资源, 如劳动力, 机器工时, 原材料来生产多种产品. 企业的目标是制定一个生产计划, 也就是决定每种产品的产量, 以实现总利润的最大化.

- **决策变量**: 设企业生产 n 种产品, 对应的产量分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$. 这就是企业需要决定的方案.
- **目标函数**: 每种产品 i 都有一个单位利润 c_i. 企业的总利润 Z 就是所有产品利润的总和, 即 $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. 这是一个典型的线性函数, 企业的目标是 $\max Z$.
- **约束条件**: 生产过程受到多种资源的限制. 假设有 m 种资源.
  - 对于第 j 种资源, 例如, 钢材, 其总供应量是有限的, 设为 b_j.
  - 生产每单位的第 i 种产品, 需要消耗 a_{ji} 个单位的第 j 种资源.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 因此, 对第 j 种资源的总消耗量不能超过其总供应量, 这就构成了一条线性不等式约束:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n \le b_j$$

  企业有多少种资源限制, 就会有多少条这样的约束.

- 同时, 产量不能为负, 即 $x_i \ge 0$ 对所有 i 成立.

通过这样的建模过程, 一个复杂的企业生产决策问题, 被清晰地转化为一个标准的线性规划数学模型.

除了生产计划, 线性规划在经济学中还有诸多其他应用, 例如:

- **运输问题**: 如何安排从多个产地到多个销地的货物运输方案, 以最低的总运输成本满足所有销地的需求.
- **投资组合选择**: 在预算和风险承受能力的约束下, 如何分配资金到不同的金融资产(股票, 债券等), 以最大化预期回报.
- **营养学问题**, 又称饮食问题: 如何从多种食物中进行搭配, 以最低的成本满足人体每日对各种营养素(维生素, 蛋白质等)的最低需求. 这是最早被研究的线性规划问题之一.

知乎@余命数

在所有这些场景中, 线性规划都提供了一个系统化的框架, 将现实世界的优化问题转化为一个结构清晰, 并且存在有效求解算法的数学问题. 接下来, 将分析如何利用解析几何的知识, 来求解这类问题.

3.2.1 线性规划问题的数学模型

下面用一个具体问题引入线性规划的数学结构.

例题 3.25　一个工坊生产两种产品, 产品 A 和产品 B.

- 每生产一件产品 A, 需要 2 个单位的原料甲和 1 个单位的原料乙, 可获利 3 万元.
- 每生产一件产品 B, 需要 1 个单位的原料甲和 2 个单位的原料乙, 可获利 4 万元.

工坊每日可用的原料甲总量为 8 个单位, 原料乙总量为 7 个单位. 问每日应如何安排两种产品的生产件数, 才能获得最大利润?

要将此问题数学化, 需确定三个要素:

1. **决策变量**: 这是需决定的未知量. 在本例中, 设每日生产产品 A 为 x 件, 产品 B 为 y 件.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. **约束条件**: 这是决策变量必须满足的限制, 通常由一系列线性等式或不等式表示.
   - 生产件数不能为负: $x \geq 0, y \geq 0$.
   - 原料甲的限制: $2x + y \leq 8$.
   - 原料乙的限制: $x + 2y \leq 7$.
3. **目标函数**: 这是一个关于决策变量的线性函数, 希望将其最大化或最小化. 在本例中, 目标是最大化总利润 z, 即 $z = 3x + 4y$.

故该问题被抽象为一个标准的二维线性规划模型:

$$\text{最大化} \quad z = 3x + 4y$$

$$\text{满足约束} \quad \begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 7 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

3.2.2 可行域与图解法

对于二维线性规划问题, 可借助解析几何的工具, 将整个优化过程转化为一个直观的几何搜寻任务. 这种方法被称为**图解法**, 其原理建立在对约束条件和目标函数的几何解释之上.

约束条件组中的每一个线性不等式, 如 $ax + by \leq c$, 都将笛卡尔平面分割为两部分, 即满足条件的点构成的**闭半平面**和不满足条件的点构成的开半平面. 所有约束条件所对应的闭半平面的公共交集, 构成了所有可行解 (x, y) 的集合. 我们称这个几何区域为**可行域**. 在二维平面上, 只要可行域有界, 它必然是一个**凸多边形**. 凸性意味着连接区域内任意两点的线段完全位于该区域之内.

对于我们的生产计划问题, 可行域由以下四个半平面交织而成: $x \geq 0$, 即 y 轴右侧; $y \geq 0$, 即 x 轴上方; $2x + y \leq 8$, 即直线 $2x + y = 8$ 左下方; $x + 2y \leq 7$, 即直线 $x + 2y = 7$ 左下方.

接着, 我们考察目标函数 $z = 3x + 4y$. 这个方程可以改写为斜截式:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{z}{4}$$

对于任意一个特定的利润值 z_0, 方程 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{z_0}{4}$ 都代表一条斜率为 $-\frac{3}{4}$ 的直线. 当 z 的值连续变化时, 得的是一族斜率相同但 y 轴截距 $\frac{z}{4}$ 不同的平行直线. 我们称这族直线为目标函数的**等值线**, 因为在同一条直线上的所有点 (x, y) 都会产生相同的目标函数值 z.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

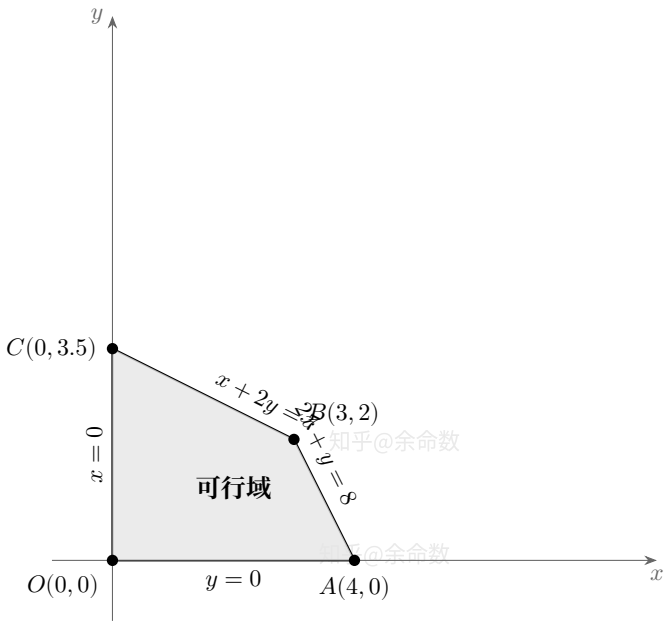


图 3.5　由约束条件构成的凸多边形可行域

我们的任务是最大化 z. 由上式可见, z 与 y 轴截距 $\frac{z}{4}$ 是成正比的. 因此, **最大化目标函数 z 在几何上等价于寻找一条与可行域有公共点, 且具有最大 y 轴截距的等值线**.

接下来确定使 z 增大的平移方向. 回忆直线的一般式方程 $Ax + By - z = 0$, 已知向量 $\vec{n} = (A, B)$ 是该直线的一个法向量. 在本例中, 目标函数 $z = 3x + 4y$ 对应的法向量为 $\vec{n} = (3, 4)$. 几何上, 法向量指向的方向是直线抬升最快的方向, 也就是使得 $3x + 4y$ 的值增大的方向. 因此, 我们的求解过程可以想象为, 将等值线 $3x + 4y = z$ 沿着其法向量 $\vec{n} = (3, 4)$ 的方向平移, 直到它即将离开可行域.

如图所示, 等值线族 $3x + 4y = z$ 是一系列斜率为 $-\frac{3}{4}$ 的平行线. 当我们沿着法向量 $\vec{n} = (3, 4)$ 的方向推动这条直线时, 即向右上方平移, z 的值不断增大. 这个平移过程是有限制的, 因为该直线必须始终与灰色表示的可行域保持接触. 当等值线移动到恰好经过顶点 $B(3, 2)$ 时, 它达到了在满足约束条件下的最远位置. 如果再向上平移丝毫, 它将与可行域完全分离. 因此, 可行域中的顶点 B 就是使目标函数值达到最大的点.

这个几何过程说明了线性规划问题的一个根本性质, 并提供下一节将要介绍的更普适的代数解法的理论基础.

3.2.3 线性规划基本定理

图解法提供了实用的几何直观, 但对于高维度问题或精度要求高的场景, 需一种更普适的代数方法. 该方法的理论基础是下列的定理.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

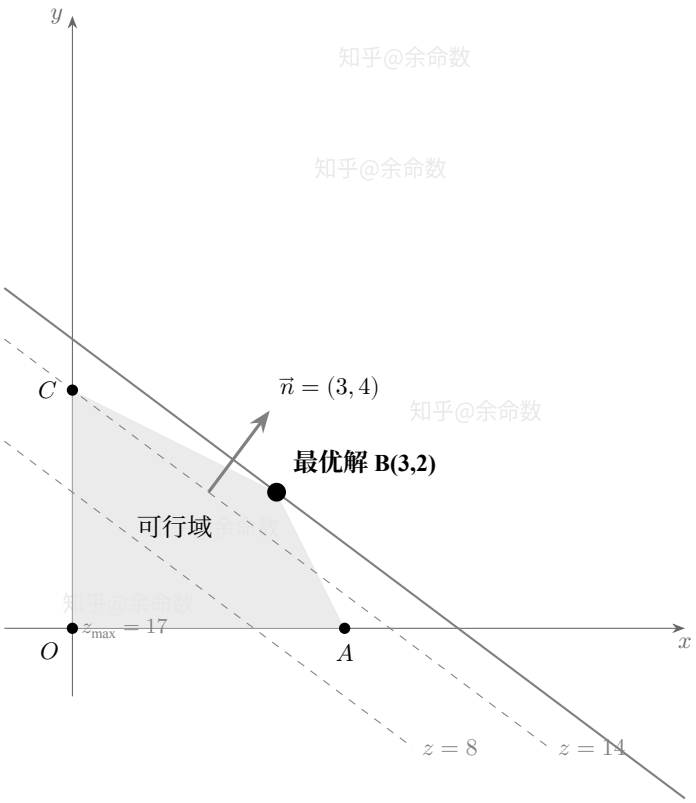


图 3.6 图解法原理, 沿法向量方向平移等值线

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.3 (线性规划基本定理) 对于本节图解法所处理的二维线性规划问题，若其可行域是非空有界凸多边形，那么目标函数的最优解一定可以在可行域的某个顶点处取得. 若存在多个最优解，则它们至少覆盖可行域的一条边，因而该边的端点（顶点）同样是最优解.

证明 考察目标函数 $z = ax + by$ 所代表的平行直线族 l_z. 设可行域为 S. 因为 S 是非空闭且有界的凸多边形，所以连续函数 z 在 S 上必然存在最大值和最小值. 以最大值为例证明，最小值情形同理. 设取得最大值的等值线为 l_{z^*}. l_{z^*} 与 S 至少有一个公共点. 若此公共点位于 S 的内部，则总可将 l_{z^*} 再微小平移一点而不离开 S，从而得到一个更大的 z 值，这与 z^* 是最大值矛盾. 因此，最优解必须出现在 S 的边界上. 若 l_{z^*} 与 S 的交集是边界上的一点，则该点必为顶点. 若 l_{z^*} 与 S 的交集是边界上的一条边，那么这条边上的所有点都是最优解，这自然也包括了该边的两个顶点. 故必有顶点是最优解. □

基本定理将一个可能包含无穷多个解的搜索问题，简化为对有限个顶点的考察. 这引出了**顶点检验法**：

1. **找出可行域的所有顶点**. 每个顶点都是两条或多条边界直线方程的交点，可通过解方程组得到.
2. **计算目标函数在每个顶点的值**.
3. **比较这些值**，其中最大者即为问题的最大值，最小者即为最小值.

对于引例，我们已通过图解法确定了四个顶点：

$$O(0,0), \quad A(4,0), \quad C(0,3.5), \quad B(3,2).$$

代入目标函数 $z = 3x + 4y$ 进行检验：

- $z(O) = 3(0) + 4(0) = 0$
- $z(A) = 3(4) + 4(0) = 12$
- $z(C) = 3(0) + 4(3.5) = 14$
- $z(B) = 3(3) + 4(2) = 17$

比较可知，最大值为 17，在顶点 $B(3,2)$ 处取得. 这与图解法的结果一致.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

例题 3.26 求目标函数 $z = 5x + 3y$ 在下列约束条件下

$$\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

的最大值.

解 先需确定由该线性不等式组定义的可行域. 该区域是一个位于第一象限的闭合凸多边形. 接着, 求解边界直线的交点, 找出其所有顶点. 可行域的顶点由边界

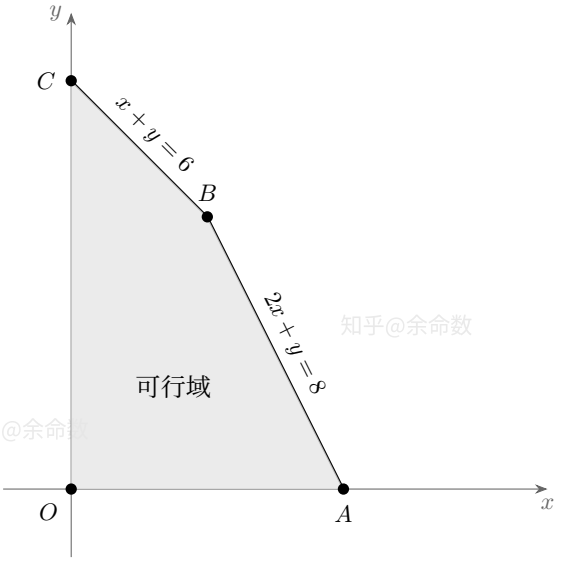


图 3.7 例 1 的可行域

线的交点确定:

- 顶点 O:$x = 0$ 与 $y = 0$ 的交点, $O(0, 0)$.
- 顶点 A:$2x + y = 8$ 与 $y = 0$ 的交点, 解得 $A(4, 0)$.
- 顶点 C:$x + y = 6$ 与 $x = 0$ 的交点, 解得 $C(0, 6)$.
- 顶点 B:$2x + y = 8$ 与 $x + y = 6$ 的交点. 联立方程组

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

故交点为 $B(2, 4)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

根据线性规划基本定理, 最大值必在这些顶点之一处取得. 将各顶点坐标代入目标函数 $z = 5x + 3y$ 进行检验: 比较上表中的目标函数值, 可见最大值为 22, 它在

顶点坐标 (x, y)	目标函数值 $z = 5x + 3y$
$O(0,0)$	$5(0) + 3(0) = 0$
$A(4,0)$	$5(4) + 3(0) = 20$
$B(2,4)$	$5(2) + 3(4) = 10 + 12 = 22$
$C(0,6)$	$5(0) + 3(6) = 18$

知乎@余命数

顶点 $B(2,4)$ 处取得.

例题 3.27　求目标函数 $z = 2x + 2y$ 在约束条件

$$\begin{cases} x + y \le 7 \\ x \ge 1 \\ y \ge 2 \end{cases}$$

下的最大值.

解　同样地, 先确定可行域的顶点. 该可行域是一个三角形. 顶点由以下边界线的

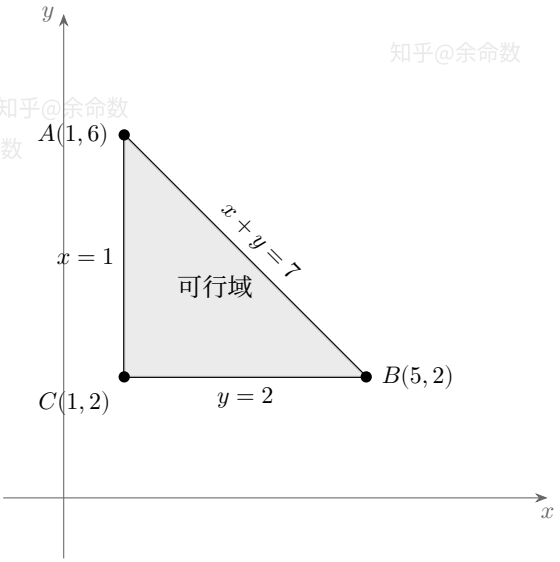


图 3.8　例 2 的可行域

交点构成:

- 顶点 C: $x = 1$ 与 $y = 2$ 的交点, $C(1,2)$.
- 顶点 A: $x = 1$ 与 $x + y = 7$ 的交点, 解得 $A(1,6)$.
- 顶点 B: $y = 2$ 与 $x + y = 7$ 的交点, 解得 $B(5,2)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将这些顶点代入目标函数 $z=2x+2y$ 中：观察结果，可见最大值 14 同时在两个顶

顶点坐标 (x,y)	目标函数值 $z=2x+2y$
$A(1,6)$	$2(1)+2(6)=14$
$B(5,2)$	$2(5)+2(2)=14$
$C(1,2)$	$2(1)+2(2)=6$

知乎@余命数

点 $A(1,6)$ 和 $B(5,2)$ 处取得.

这种情况源于目标函数等值线与可行域边界的平行关系. 注意到目标函数 $z=2x+2y$ 可以改写为 $y=-x+z/2$. 其等值线的斜率为 -1. 可行域的一条边界线 $x+y=7$ 的斜率同样为 -1. 即目标函数的等值线与可行域的边界 AB 平行. 当等值线平移至与线段 AB 重合时，整个线段上的所有点都将成为最优解. 因此，该线性规划问题的最大值为 14，且最优解为线段 AB 上的任意一点.

在某些问题中，决策变量必须取整数，这类问题称为**整数线性规划**. 虽然其通用解法远比标准线性规划复杂，但在二维平面上，若可行域有界，有时可以结合几何方法求解. 其中一类特殊问题是计算可行域内的整点（格点）总数.

例题 3.28 在笛卡尔坐标平面上，求满足不等式组

$$\begin{cases} y \le 3x \\ y \ge \frac{1}{3}x \\ x+y \le 100 \end{cases}$$

的整点 (x,y) 的个数.

在解决此问题之前，先介绍一个引理.

引理 3.1 (皮克定理) 对于一个顶点均为整点的简单多边形，其面积 S 与其内部的整点数 I、边界上的整点数 B 之间满足如下关系：

$$S=I+\frac{B}{2}-1$$

证明 证明 $\Phi(P)=I_P+\frac{B_P}{2}-1$ 与面积 $S(P)$ 具有相同的**可加性**；一旦在基本图形上验证 $S=\Phi$，即可推广到任意简单多边形.

取两个顶点为整点的简单多边形 P_1,P_2，共享公共边 e，且并 $P=P_1\cup P_2$ 仍为简单多边形. 设 e 上共有 k 个整点，含两端点. 面积显然可加：$S(P)=S(P_1)+S(P_2)$. 内部与边界整点满足

知乎@余命数

- 内部：$I_P=I_{P_1}+I_{P_2}+(k-2)$（$e$ 上不含端点的 $k-2$ 个点由边界转入内部）.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 边界：$B_P = B_{P_1} + B_{P_2} - 2k + 2$（$e$ 上的点在 P_1, P_2 中各计一次，合并后中间 $k-2$ 点不再属于边界，两端点仍属边界）.

于是

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= I_P + \frac{B_P}{2} - 1 \\ &= (I_{P_1} + I_{P_2} + k - 2) + \frac{B_{P_1} + B_{P_2} - 2k + 2}{2} - 1 \\ &= \Phi(P_1) + \Phi(P_2).\end{aligned}$$

故 Φ 与 S 同为可加. 只需在基本图形上验证 $S = \Phi$. 取边平行于坐标轴的整点矩形 R，边长为整数 a, b：

$$S_R = ab, \quad B_R = 2a + 2b, \quad I_R = (a-1)(b-1) = ab - a - b + 1.$$

$$\Phi(R) = I_R + \frac{B_R}{2} - 1 = ab = S_R.$$

定理对一切轴对齐整点矩形成立.

进一步，任一两条直角边分别平行于坐标轴的整点直角三角形，都可以看作某个上述整点矩形沿对角线分成的两个全等整点三角形之一. 这两个三角形的面积相等，且由平移或中心对称可知其内部整点数与边界整点数也相同，因而它们的 Φ 值相等. 由矩形的公式和可加性可知，每个这样的整点直角三角形也满足 $S = \Phi$.

任何一个顶点为整点的简单多边形，都可以被三**角剖分**，即分解为有限个顶点同为整点的三角形的并. 同时，任何一个顶点为整点的三角形，都可以通过一个外接的、边与坐标轴平行的矩形，减去其角上至多三个顶点为整点的直角三角形得到. 由于已证明 Φ 的可加性，并且在矩形和上述直角三角形上验证了 $S = \Phi$，那么由它们通过加减运算构成的任意三角形也必然满足. 最后，既然任意三角形都满足皮克定理，那么由这些三角形拼接而成的任意简单多边形也必然满足此定理. □

解 此问题要求对一个由线性不等式定义的凸多边形区域内的整点进行计数. 直接枚举的方法虽然可行，但过程繁琐. 一个更简洁的途径是运用几何与数论的联系.

先需精确地刻画该不等式组所定义的可行域. 该区域是由三条直线 $l_1 : y = 3x$，$l_2 : y = \frac{1}{3}x$ 以及 $l_3 : x + y = 100$ 所围成的封闭区域. 通过联立方程组，可确定这个区域的顶点.

- 直线 $y = 3x$ 与 $y = \frac{1}{3}x$ 的交点为 $O(0, 0)$.
- 直线 $y = 3x$ 与 $x + y = 100$ 的交点为 $A(25, 75)$.
- 直线 $y = \frac{1}{3}x$ 与 $x + y = 100$ 的交点为 $B(75, 25)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

该可行域是一个以 O, A, B 为顶点的三角形. 要点在于, **所有顶点均为整点**, 这一特性为应用**皮克定理**提供了理想的条件.

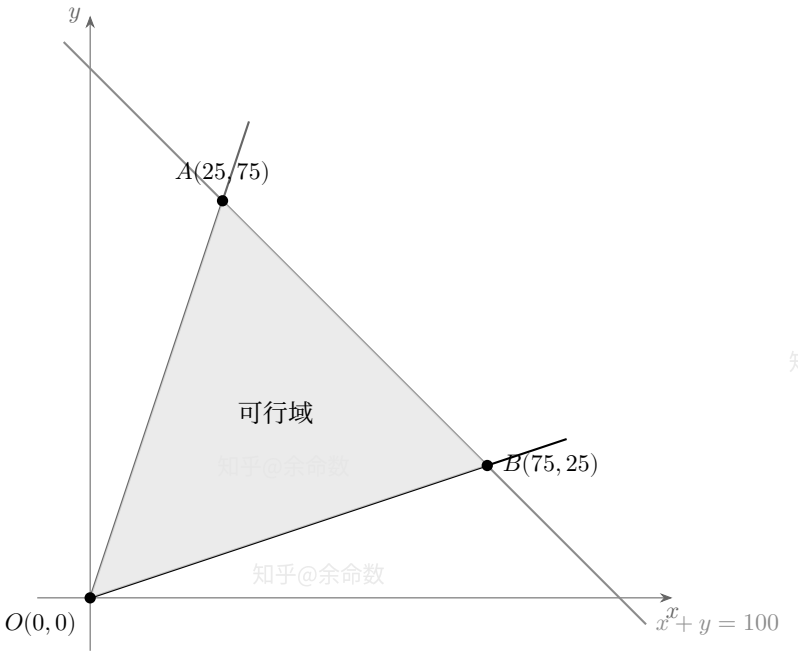


图 3.9 由不等式组定义的可行域 $\triangle OAB$

皮克定理指出, 对于一个顶点均为整点的简单多边形, 其面积 S 与其内部的整点数 I、边界上的整点数 B 之间满足如下关系:

$$S = I + \frac{B}{2} - 1$$

现求总整点数 $N = I + B$. 借助皮克定理, 可将 I 表示为 $I = S - \frac{B}{2} + 1$, 从而得到总整点数的计算公式

$$N = \left(S - \frac{B}{2} + 1\right) + B = S + \frac{B}{2} + 1$$

接下来的任务是分别计算该三角形的面积 S 与其边界上的整点数 B.

对于顶点为 $(x_O, y_O), (x_A, y_A), (x_B, y_B)$ 的三角形, 其面积可由鞋带公式给出:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|(x_O y_A + x_A y_B + x_B y_O) - (y_O x_A + y_A x_B + y_B x_O)| \\ &= \frac{1}{2}|(0 \cdot 75 + 25 \cdot 25 + 75 \cdot 0) - (0 \cdot 25 + 75 \cdot 75 + 25 \cdot 0)| \\ &= \frac{1}{2}|625 - 5625| = 2500 \end{aligned}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

面积算毕后, 转向边界整点数 B 的计算. 连接两个整点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的线段上, 其包含的整点个数, 含端点为 $\gcd(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) + 1$, 其中 gcd 表示最大公约数.

- **边 OA**(从 $O(0,0)$ 到 $A(25,75)$):整点数为 $\gcd(25,75)+1 = 25+1 = 26$.
- **边 OB**(从 $O(0,0)$ 到 $B(75,25)$):整点数为 $\gcd(75,25)+1 = 25+1 = 26$.
- **边 AB** (从 $A(25,75)$ 到 $B(75,25)$): 整点数为 $\gcd(|75-25|, |25-75|)+1 = \gcd(50,50)+1 = 50+1 = 51$.

边界上的总整点数 B 是三条边上的整点数之和, 并减去被重复计算的三个顶点, 得

$$B = 26 + 26 + 51 - 3 = 100$$

现在, 已具备所有要素, 可以得出最终的整点总数. 将 $S = 2500$ 和 $B = 100$ 代入公式:

$$N = S + \frac{B}{2} + 1 = 2500 + \frac{100}{2} + 1 = 2500 + 50 + 1 = 2551$$

因此, 满足给定不等式组的整点共有 2551 个.

解 [补集计数法] 亦可补集计数, 先数一个包含目标区域且易计的大区域中的整点, 再减去不满足原约束的点.

取 $T: x \geq 0、y \geq 0、x + y \leq 100$. T 包含全部目标整点. 固定 $x = k \in \{0, \ldots, 100\}$ 时 $0 \leq y \leq 100 - k$, 有 $101 - k$ 个整数 y, 故

$$N(T) = \sum_{k=0}^{100} (101 - k) = \frac{101 \times 102}{2} = 5151.$$

令 T_A 为 T 中 $y < \frac{1}{3}x$ 的整点集, T_B 为 $y > 3x$ 的整点集, 则所求 $N = N(T) - N(T_A) - N(T_B)$. 变换 $\phi: (x, y) \mapsto (y, x)$(关于 $y = x$ 对称)将 T 映到自身, 并将 T_A 一一映到 T_B, 故 $N(T_A) = N(T_B)$, 从而 $N = N(T) - 2N(T_B)$.

T_B 由 $x \geq 0、y \geq 3x + 1、x + y \leq 100$ 刻画. 固定 $x = k$ 时需 $3k + 1 \leq 100 - k$, 即 $k \leq 24$, 且 y 有 $100 - 4k$ 个取值, 故

$$N(T_B) = \sum_{k=0}^{24} (100 - 4k) = \frac{(100 + 4) \times 25}{2} = 1300.$$

于是 $N = 5151 - 2 \times 1300 = 2551$.

例题 3.29 点 $P(1,1), Q(2,2), R(0,-1)$ 在由方程 $|x-1| + |y-1| = 1$ 确定的曲线所围成的图形中的个数有

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

解 此问题需要先识别方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 定义的几何图形，再判断给定点与该图形的位置关系. 该方程描述的是一个区域的边界，而区域内部及边界上的点 (x,y) 则满足不等式

$$|x-1|+|y-1|\leq 1$$

为了清晰地说明其几何形态，可引入一个坐标平移变换. 令 $x'=x-1$ 及 $y'=y-1$. 在新的 $x'y'$ 坐标系中，不等式转化为

$$|x'|+|y'|\leq 1$$

这是一个标准形式，它表示一个以新坐标系原点为中心，顶点分别位于坐标轴上 $(\pm 1,0)$ 和 $(0,\pm 1)$ 的正方形区域. 将这个几何图形变换回原始的 xy 坐标系，可知该区域是一个以点 $(1,1)$ 为对称中心，顶点为 $(2,1),(1,2),(0,1),(1,0)$ 的旋转正方形.

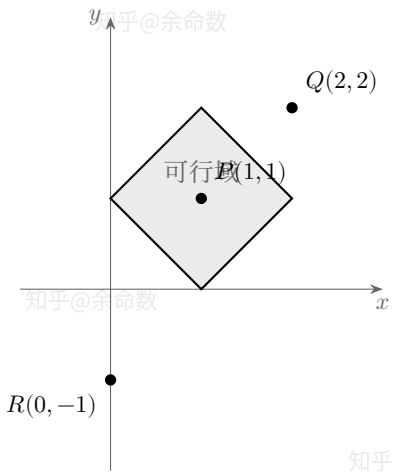


图 3.10　由 $|x-1|+|y-1|\leq 1$ 定义的区域及相关点

接着，通过代数方法精确检验每个点的位置：

- 对于点 $P(1,1)$：

$$|1-1|+|1-1|=0+0=0$$

由于 $0\leq 1$，点 P 位于该区域内，且为其对称中心.

- 对于点 $Q(2,2)$：

$$|2-1|+|2-1|=1+1=2$$

由于 $2>1$，点 Q 位于该区域之外.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 对于点 $R(0,-1)$:

$$|0-1|+|-1-1|=|-1|+|-2|=1+2=3$$

由于 $3>1$, 点 R 同样位于该区域之外.

仅有点 P 满足条件, 因此在图形中的点的个数为 1. 正确的选项为 C.

例题 3.30 坐标平面内区域 $M\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x-y+1\geq 0\\ x+y-1\leq 0\\ kx-y-1\leq 0\end{cases},(0\leq k\leq 1)\right\}$ 的面积可用函数 $f(k)$ 表示, 若 $f(k)=8$, 则 $k=$ 是多少.

解 区域 M 由含参数 k 的线性不等式组确定, 已知面积 $f(k)=8$, 求 k. 先把不等式写成边界直线:

$$\begin{cases}y\leq x+1 & (l_1)\\ y\leq -x+1 & (l_2)\\ y\geq kx-1 & (l_3)\end{cases}$$

当 $0\leq k<1$ 时, 可行域为三直线围成的三角形; 当 $k=1$ 时区域无界, 不可能有有限面积 8. 故只需讨论 $0\leq k<1$. 顶点由边界两两相交得到:

- l_1 与 l_2: $\begin{cases}y=x+1\\ y=-x+1\end{cases}$ 得 $A=(0,1)$, 与 k 无关.
- l_1 与 l_3: $x+1=kx-1$ 得 $x=\frac{2}{k-1}$, $y=\frac{k+1}{k-1}$, 故 $B=\left(\frac{2}{k-1},\frac{k+1}{k-1}\right)$.
- l_2 与 l_3: $-x+1=kx-1$ 得 $x=\frac{2}{k+1}$, $y=\frac{k-1}{k+1}$, 故 $C=\left(\frac{2}{k+1},\frac{k-1}{k+1}\right)$.

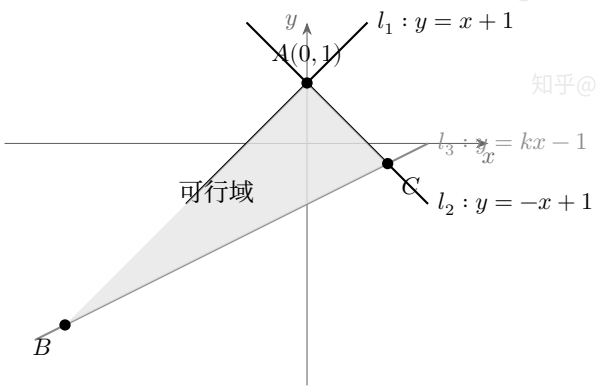


图 3.11　可行域示意图(以 $k=0.5$ 为例)

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

以 BC 为底(落在 $l_3: kx-y-1=0$ 上)算面积. 底长平方为

$$\begin{aligned}|BC|^2 &= \left(\frac{2}{k-1}-\frac{2}{k+1}\right)^2+\left(\frac{k+1}{k-1}-\frac{k-1}{k+1}\right)^2\\ &= \left(\frac{4}{k^2-1}\right)^2+\left(\frac{4k}{k^2-1}\right)^2=\frac{16(1+k^2)}{(k^2-1)^2}.\end{aligned}$$

因 $0\le k<1, k^2-1<0$, 故 $|BC|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1-k^2}$. 顶点 $A(0,1)$ 到 l_3 的距离为高:

$$h=\frac{|k\cdot 0-1-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}.$$

于是

$$f(k)=\frac{1}{2}|BC|\cdot h=\frac{4}{1-k^2}.$$

令 $f(k)=8$: $\frac{4}{1-k^2}=8$, 即 $2k^2=1, k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由 $0\le k\le 1$ 舍去负根, 得 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例题 3.31 对于每个自然数 n, 抛物线 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 与 x 轴交于 A_n, B_n 两点, 以 $|A_nB_n|$ 表示该两点的距离, 则 $|A_1B_1|+|A_2B_2|+\cdots+|A_{2000}B_{2000}|$ 的值是

A. $\frac{1999}{2000}$　　C. $\frac{1999}{2001}$

B. $\frac{2000}{2001}$　　D. $\frac{2001}{2001}$

解 此问题考察了二次函数与 x 轴交点距离的计算, 并将其与级数求和, 特别是裂项相消法, 巧妙地结合在一起.

对于给定的自然数 n, 抛物线 $y=(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1$ 与 x 轴的交点 A_n, B_n 的横坐标是二次方程

$$(n^2+n)x^2-(2n+1)x+1=0$$

的两个实数根. 设这两个根为 x_1 和 x_2. 根据韦达定理, 有

$$x_1+x_2=\frac{2n+1}{n^2+n},\quad x_1x_2=\frac{1}{n^2+n}$$

两交点之间的距离 $|A_nB_n|$ 即为两根之差的绝对值 $|x_1-x_2|$. 可利用根与系数的关系来计算这个距离, 得

$$|A_nB_n|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将韦达定理的结果代入上式, 得

$$\begin{aligned}|A_nB_n| &= \sqrt{\left(\frac{2n+1}{n^2+n}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{n^2+n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{(2n+1)^2-4(n^2+n)}{(n^2+n)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4n^2+4n+1-4n^2-4n}{(n^2+n)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(n^2+n)^2}} = \frac{1}{n^2+n}\end{aligned}$$

知乎@余命数

由于 n 是自然数, $n \geq 1$, 故 $n^2+n>0$, 分母开方后无需加绝对值.

注意到 $n^2+n=n(n+1)$, 于是得距离的简洁表达式:

$$|A_nB_n| = \frac{1}{n(n+1)}$$

这是一个可以进行裂项分解的结构. 将其分解为部分分式:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

现在的任务是计算这个级数的和. 这是一个典型的裂项相消.

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=1}^{2000} |A_nB_n| = \sum_{n=1}^{2000} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{2000} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}\right)\end{aligned}$$

观察到, 除首项和末项外, 所有中间项都相互抵消. 因此, 和为

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2001} = \frac{2001-1}{2001} = \frac{2000}{2001}$$

故正确选项为 B.

例题 3.32　若当点 $P(m,n)$ 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任一点时, 不等式 $m+n+c \geq 0$ 恒成立, 则 c 的取值范围是?

解　需寻找参数 c 的范围, 使得一个线性不等式在一个圆域上恒成立. 这是一个典型的线性规划思想在解析几何中的应用.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

题目所给的条件是, 对于满足方程 $m^2+(n-1)^2=1$ 的任意实数对 (m,n), 不等式 $m+n+c\geq 0$ 均成立. 可将此不等式变形为 $c\geq -(m+n)$. 此不等式恒成立, 意味着 c 的值必须大于或等于表达式 $-(m+n)$ 在圆上的所有可能取值.c 必须大于或等于 $-(m+n)$ 的最大值.

$$c\geq \max_{m^2+(n-1)^2=1}\{-(m+n)\}$$

求 $-(m+n)$ 的最大值, 等价于求 $z=m+n$ 的最小值.

知乎@余命数

将此问题置于几何框架中考察. 目标函数 $z=m+n$ 在 mn-坐标平面上代表了一族斜率为 -1 的平行直线. 需寻找当这条直线与圆 $m^2+(n-1)^2=1$ 有公共点时, z 所能取到的最小值. 该圆的圆心为 $C(0,1)$, 半径为 $R=1$. 当直线 $m+n-z=0$ 与圆相切时, 目标函数 z 会取得其最大值或最小值. 相切的条件是圆心到直线的距离等于半径.

$$d=\frac{|1\cdot 0+1\cdot 1-z|}{\sqrt{1^2+1^2}}=R=1$$

$$\frac{|1-z|}{\sqrt{2}}=1$$

解此方程, 得 $|1-z|=\sqrt{2}$, 从而 $1-z=\sqrt{2}$ 或 $1-z=-\sqrt{2}$. 这给出了 z 的两个临界值: $z=1-\sqrt{2}$ 和 $z=1+\sqrt{2}$. 显然, $z=m+n$ 在圆上的最小值为 $z_{\min}=1-\sqrt{2}$.

已确定 $m+n$ 的最小值为 $1-\sqrt{2}$. 因此, $-(m+n)$ 的最大值为 $-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$. 要使不等式 $c\geq -(m+n)$ 恒成立, c 必须大于或等于 $-(m+n)$ 的最大值. 所以, $c\geq \sqrt{2}-1$. c 的取值范围是 $[\sqrt{2}-1,+\infty)$.

知乎@余命数

例题 3.33 已知坐标平面内有曲线 C 的方程为 $x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4$.

(1) 当 θ 在什么范围内时, 由曲线 C 上的所有点都位于不等式 $x^2+y^2\leq 16$ 所表示的图形之中(这里 $0\leq\theta\leq\pi$), 并求出此范围;

(2) 当 $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ 时, 求满足曲线 C 的方程的点 (x,y) 的取值范围, 并用图形表示.

解 (1) 先分析曲线 C 的方程. 该方程可改写为

知乎@余命数

$$\frac{x^2}{4/\cos^2\theta}+\frac{y^2}{4/\sin^2\theta}=1$$

知乎@余命数

当 $\cos\theta\neq 0$ 且 $\sin\theta\neq 0$ 时, 此方程表示一个中心在原点的椭圆, 其在 x 轴和 y 轴上的半轴长分别为 $a=\frac{2}{|\cos\theta|}$ 和 $b=\frac{2}{|\sin\theta|}$.

不等式 $x^2+y^2\leq 16$ 表示一个以原点为中心、半径为 4 的闭圆盘. 要使椭圆上的所有点都位于该圆盘内, 椭圆的半长轴必须不大于圆的半径. 椭圆上任意点到

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

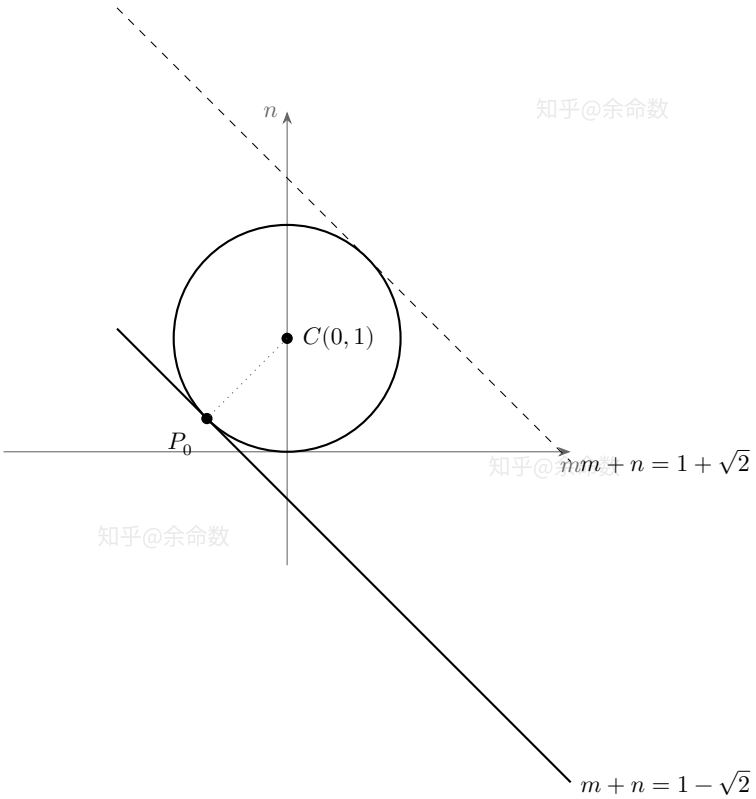


图 3.12　目标函数 $z = m + n$ 的几何解释

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

原点的距离的最大值不能超过 4. 这个最大距离就是椭圆的半长轴长度. 因此, 须满足条件:

$$\max\{a,b\}=\max\left\{\frac{2}{|\cos\theta|},\frac{2}{|\sin\theta|}\right\}\le 4$$

这等价于同时满足以下两个不等式:

$$\frac{2}{|\cos\theta|}\le 4 \quad 和 \quad \frac{2}{|\sin\theta|}\le 4$$

化简得到

$$|\cos\theta|\ge\frac{1}{2} \quad 和 \quad |\sin\theta|\ge\frac{1}{2}$$

现在在给定区间 $0\le\theta\le\pi$ 内求解这两个不等式.

- 对于 $|\sin\theta|\ge\frac{1}{2}$: 在 $[0,\pi]$ 上, $\sin\theta\ge 0$, 故不等式为 $\sin\theta\ge\frac{1}{2}$. 解得 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$.
- 对于 $|\cos\theta|\ge\frac{1}{2}$: 即 $\cos\theta\ge\frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta\le-\frac{1}{2}$.
  - 在 $[0,\pi]$ 上, $\cos\theta\ge\frac{1}{2}$ 的解为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.
  - 在 $[0,\pi]$ 上, $\cos\theta\le-\frac{1}{2}$ 的解为 $\theta\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

  因此, $|\cos\theta|\ge\frac{1}{2}$ 的解集为 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$.

为了使两个条件同时成立, 需取上述两个解集的交集:

$$\begin{aligned}&\left([0,\tfrac{\pi}{3}]\cup[\tfrac{2\pi}{3},\pi]\right)\cap[\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5\pi}{6}]\\&=[\tfrac{\pi}{6},\tfrac{\pi}{3}]\cup[\tfrac{2\pi}{3},\tfrac{5\pi}{6}].\end{aligned}$$

所以, θ 的取值范围是

$$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right].$$

(2) 当 θ 在开区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 内变化时, 需确定满足下列方程的点 (x,y) 所构成的区域:

$$x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta=4.$$

当 θ 取区间的两个端点时, 得两个边界椭圆:

- 当 $\theta\to\frac{\pi}{6}$, $\cos^2\theta\to\frac{3}{4}$, $\sin^2\theta\to\frac{1}{4}$. 曲线趋近于 $x^2\left(\frac{3}{4}\right)+y^2\left(\frac{1}{4}\right)=4$, 即 $3x^2+y^2=16$.
- 当 $\theta\to\frac{\pi}{3}$, $\cos^2\theta\to\frac{1}{4}$, $\sin^2\theta\to\frac{3}{4}$. 曲线趋近于 $x^2\left(\frac{1}{4}\right)+y^2\left(\frac{3}{4}\right)=4$, 即 $x^2+3y^2=16$.

知乎@余命数
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

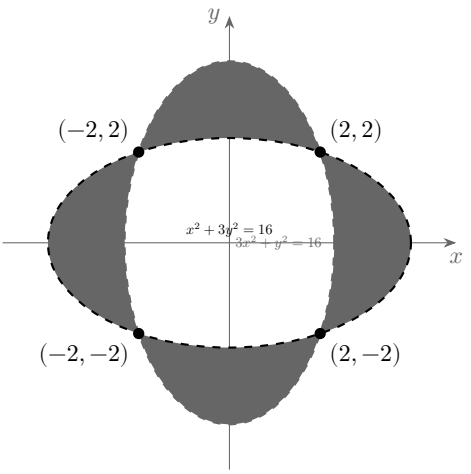


图 3.13　点 (x,y) 的取值范围(阴影部分不含边界, 但包含四个交点)

对于任意一个固定的点 (x,y), 方程 $x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta = 4$ 可以看作是关于变量 $u = \cos^2\theta$ 的线性方程: $x^2u + y^2(1-u) = 4$, 即 $u(x^2-y^2) = 4-y^2$. 当 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 时, $u = \cos^2\theta \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. 因此, 点 (x,y) 属于所求区域的充要条件是, 存在 $u \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ 使得 $u(x^2-y^2) = 4-y^2$.

当 $x^2 \neq y^2$ 时, 这等价于数值 4 严格地位于 $x^2u + y^2(1-u)$ 当 $u = \frac{1}{4}$ 和 $u = \frac{3}{4}$ 时的两个值之间. 这两个值分别是 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2$ 和 $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2$. 所以, 这一部分点 (x,y) 所在的区域由以下复合不等式定义:

$$\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{4}y^2 < 4 \quad \text{且} \quad \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 > 4\right)$$

或

$$\left(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{3}{4}y^2 > 4 \quad \text{且} \quad \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 < 4\right).$$

整理后即

$$(x^2 + 3y^2 < 16 \quad \text{且} \quad 3x^2 + y^2 > 16)$$

或

$$(x^2 + 3y^2 > 16 \quad \text{且} \quad 3x^2 + y^2 < 16).$$

当 $x^2 = y^2$ 时, 原式左端恒为 x^2, 因而还需满足 $x^2 = 4$, 即得到四个点 $(\pm 2, \pm 2)$. 这四个点是两条边界椭圆的交点, 且对开区间内任意 θ 都满足原方程.

因此, 该区域是位于椭圆 $3x^2 + y^2 = 16$ 和 $x^2 + 3y^2 = 16$ 之间的开区域, 并包含两椭圆的四个交点 $(\pm 2, \pm 2)$.

图形表示在下一页:

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.2.4 饮食问题与计划经济应用

线性规划的作用，在于把现实世界的优化问题提炼为结构清晰的数学模型. 这一从具体问题到抽象模型的转化过程，被称为**数学建模**，它是应用数学的一项基本技能. 其要点在于准确地识别出决策变量，目标函数和约束条件.

下面用一个经典的**饮食问题**完整地展示这一过程. 这是一个典型的成本最小化问题.

例题 3.34 (营养膳食的成本优化) 一位营养师需要为一位运动员设计一份最低成本的早餐食谱，该食谱必须满足特定的营养需求. 早餐由燕麦和牛奶两种食物构成.

- **营养信息与成本**：
  - 每 100 克燕麦：含蛋白质 10 克，维生素 C 5 毫克. 成本为 3 元.
  - 每 100 毫升牛奶：含蛋白质 4 克，维生素 C 20 毫克. 成本为 5 元.
- **营养需求**：早餐必须至少提供 44 克的蛋白质和 60 毫克的维生素 C.

问：应该如何搭配燕麦和牛奶的份量，才能在满足营养需求的前提下，使得总成本最低？

解 设购买燕麦 x 个单位，每单位 100 克，牛奶 y 个单位，每单位 100 毫升，则 $x \geq 0$，$y \geq 0$. 按单价，目标是最小化总成本

$$z = 3x + 5y.$$

营养约束为蛋白质不少于 44 克、维生素 C 不少于 60 毫克：

$$10x + 4y \geq 44, \qquad 5x + 20y \geq 60 \ (\text{即} x + 4y \geq 12).$$

完整模型为

$$\begin{cases} 10x + 4y \geq 44 \\ x + 4y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

用顶点检验法. 可行域向右上方无限延伸，是**无界区域**. 可行域的顶点由边界线的交点构成：

- 顶点 A：$10x + 4y = 44$ 与 $x = 0$ 的交点，解得 $A(0, 11)$.
- 顶点 C：$x + 4y = 12$ 与 $y = 0$ 的交点，解得 $C(12, 0)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

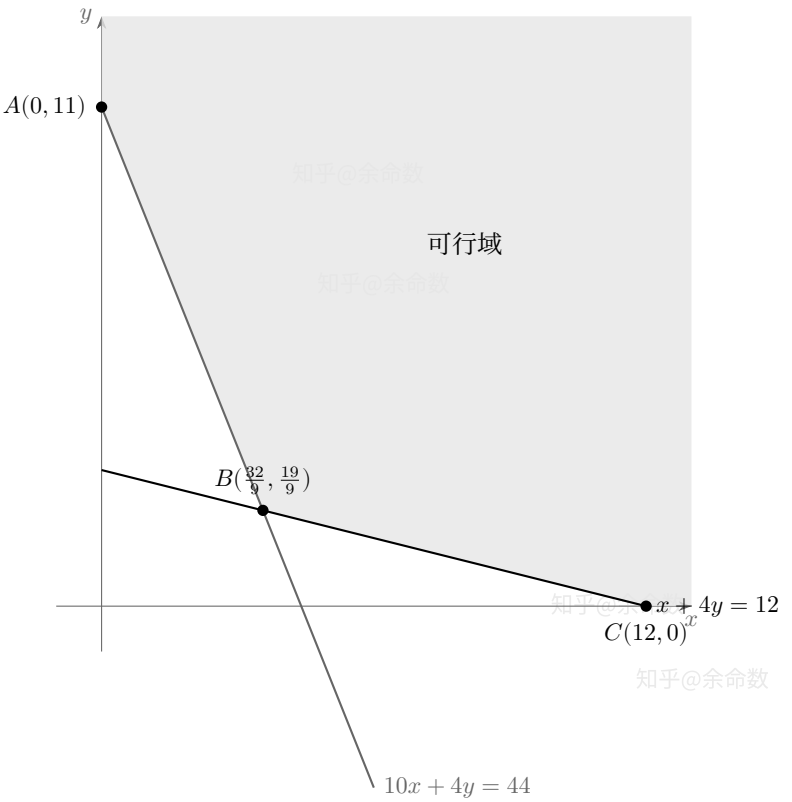


图 3.14　饮食问题的无界可行域

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

顶点	坐标 (x, y)	成本 $z = 3x + 5y$
A	$(0, 11)$	$3(0) + 5(11) = 55$
B	$(32/9, 19/9)$	$3(32/9) + 5(19/9) = (96 + 95)/9 = 191/9 \approx 21.22$
C	$(12, 0)$	$3(12) + 5(0) = 36$

- 顶点 B: $10x + 4y = 44$ 与 $x + 4y = 12$ 的交点. 两式相减得 $9x = 32 \implies x = 32/9$. 代入第二式, $32/9 + 4y = 12 \implies 4y = 12 - 32/9 = 76/9 \implies y = 19/9$. 故 $B(32/9, 19/9)$.

即使可行域无界, 线性规划基本定理的一个推论指出, 如果最优解存在, 它也必然在顶点处取得. 可检验目标函数 $z = 3x + 5y$ 的等值线 $y = -\frac{3}{5}x + \frac{z}{5}$. 当希望最小化 z 时, 相当于在图中寻找截距最小, 即最靠下方的、且与可行域有交点的等值线. 几何直观显示, 这条线必定会首先触碰到可行域的某个角落, 即顶点.

将顶点坐标代入目标函数: 比较可知, 最小成本为 $191/9$ 元, 在顶点 $B(32/9, 19/9)$ 处取得.

因此, 最优的膳食搭配方案是购买 $32/9 \approx 3.56$ 个单位, 即 356 克的燕麦和 $19/9 \approx 2.11$ 个单位, 即 211 毫升的牛奶.

分析计划经济中的应用. 先理解不同经济体系如何影响优化目标. 在市场经济中, 企业通常以**利润最大化**或**成本最小化**为目标. 而在**计划经济**体系中, 经济决策由中央计划机构, 如国家计划委员会做出, 资源依据国家层面的宏观战略目标进行指令性分配.

因此, 计划经济下的优化目标函数可以是一个衡量国家战略优先级的**综合指数**或**计划产值**. 例如, 在优先发展重工业的时期,

钢材的价值权重可能远高于消费品; 在专注于农业机械化时, 拖拉机的权重则会最高. 线性规划作为一种数学工具具有这种普适性, 不管目标是利润还是战略价值, 其底层的优化逻辑都是相通的.

例题 3.35 (重工业与农业的平衡发展) 一个地区的计划委员会需要为下一个五年计划周期制定主要产品的生产指标. 该地区主要利用电力、劳动力和铁矿石这三种资源, 生产钢材与拖拉机两种主要产品, 前者是重工业的基础, 后者支援农业.

- **可用资源总量**:
  - 电力: 1800 万千瓦时
  - 熟练劳动力: 2100 万工时
- **生产消耗**(以万吨为单位的钢材和万台为单位的拖拉机):
  - 生产 1 万吨钢材 (x) 需要: 5 万千瓦时电力, 10 万工时劳动力.
  - 生产 1 万台拖拉机 (y) 需要: 20 万千瓦时电力, 15 万工时劳动力.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **内部结构与最低任务约束**:
  - **内部消耗**:每生产 1 万台拖拉机, 需要消耗 2 万吨钢材作为原材料.
  - **最低保障**:为满足基本建设和农业需求, 必须保证钢材产量至少为 60 万吨, 拖拉机产量至少为 30 万台.
- **国家优先指数**: 根据国家以农促工, 工农并举的战略方针, 每单位钢材的优先指数计为 3 分, 每单位拖拉机的优先指数计为 10 分.

问: 应如何规划钢材和拖拉机的产量, 才能使该地区的总国家优先指数最高?

解 这是一个典型的、具有多重及内部关联约束的线性规划问题. 将严格按照数学建模的步骤来构建和求解.

设钢材的计划产量为 x 万吨, 拖拉机的计划产量为 y 万台. 目标是最大化国家优先指数 z, 其目标函数为:

$$\text{最大化} \quad z = 3x + 10y$$

决策变量 (x, y) 必须满足一系列约束条件.

- **资源约束**:

$$5x + 20y \leq 1800 \quad (\text{电力约束}) \implies x + 4y \leq 360$$

$$10x + 15y \leq 2100 \quad (\text{劳动力约束}) \implies 2x + 3y \leq 420$$

- **内部消耗约束**:用于生产拖拉机的钢材 $(2y)$ 不能超过钢材的总产量 (x).

$$2y \leq x \implies x - 2y \geq 0$$

- **最低任务约束**:

$$x \geq 60, \quad y \geq 30$$

获得了完整的线性规划模型. 接着, 通过顶点检验法求解. 首先确定可行域的顶点. 可行域的顶点由边界线的交点构成:

- 顶点 A:$x = 60$ 与 $y = 30$ 的交点. 检验:$60 - 2(30) = 0 \geq 0$. 故 $A(60, 30)$ 是一个顶点.
- 顶点 B:$y = 30$ 与 $2x + 3y = 420$ 的交点.$2x + 3(30) = 420 \implies 2x = 330 \implies x = 165$. 故 $B(165, 30)$.
- 顶点 C:$2x + 3y = 420$ 与 $x + 4y = 360$ 的交点. 联立求解得 $x = 120, y = 60$. 故 $C(120, 60)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

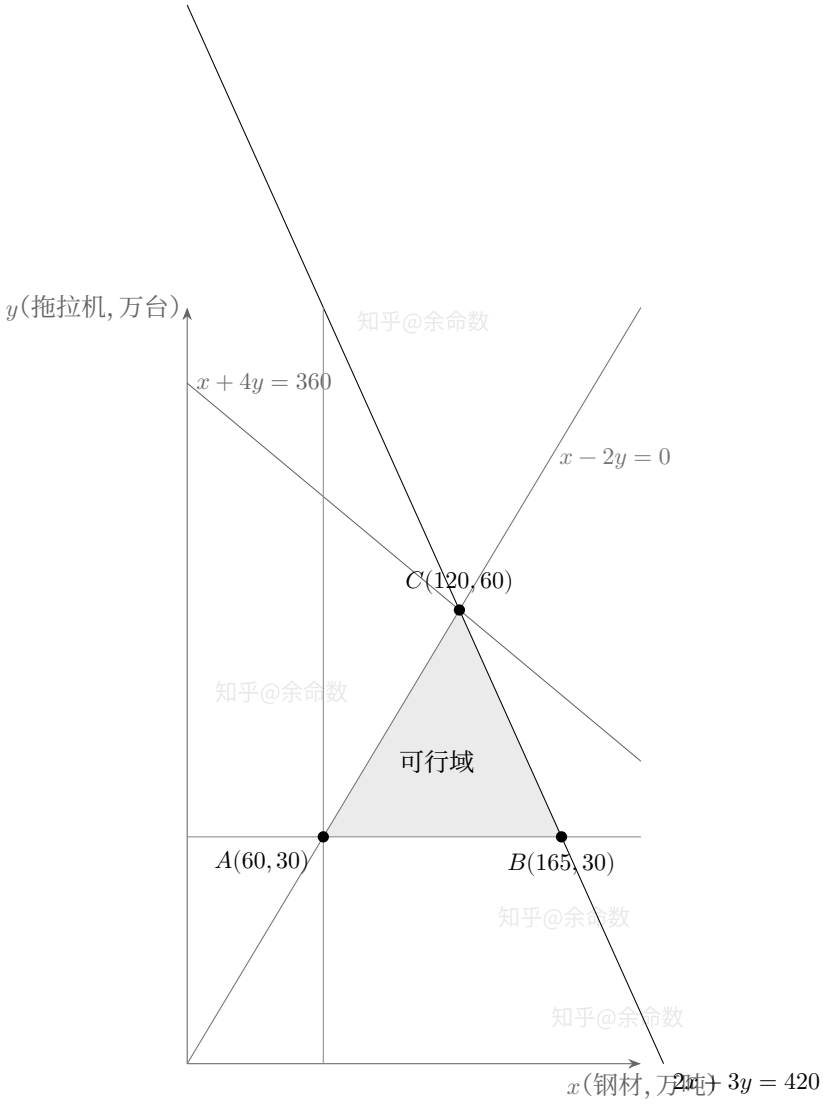


图 3.15 计划经济问题的可行域

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(需验证其他交点是否构成可行域. 例如 $x = 2y$ 与 $x + 4y = 360$ 的交点也是 $(120, 60)$, 表明三条约束线在此交于一点.$x = 60$ 与 $x = 2y$ 的交点为 $(60, 30)$, 即顶点 A. 故可行域确实为三角形 ABC.)

最后, 将顶点代入目标函数 $z = 3x + 10y$ 进行检验: 比较可知, 最大的国家优

顶点坐标 (x, y)	优先指数 $z = 3x + 10y$
$A(60, 30)$	$3(60) + 10(30) = 180 + 300 = 480$
$B(165, 30)$	$3(165) + 10(30) = 495 + 300 = 795$
$C(120, 60)$	$3(120) + 10(60) = 360 + 600 = 960$

先指数为 960, 在顶点 $C(120, 60)$ 处取得.

因此, 计划委员会应下达生产 120 万吨钢材和 60 万台拖拉机的指标. 在此计划下, 电力消耗为 $5(120) + 20(60) = 600 + 1200 = 1800$, 达到上限. 劳动力消耗为 $10(120) + 15(60) = 1200 + 900 = 2100$, 达到上限. 内部钢材消耗为 $2(60) = 120$, 与钢材产量相等. 此解表明, 最优策略是将所有可用资源全部投入生产, 直到电力和劳动力同时耗尽, 并且生产的钢材恰好全部用于制造拖拉机, 没有剩余.

知乎@余命数

例题 3.36　假设你是国家计划委员会的规划专家, 需要为某一年的生产制定主要指标. 你的决策涉及三个主要部门: 钢铁、机械制造与农业, 后两者分别以机床和粮食为代表.

- **决策变量**:
  - 钢材年产量: x(万吨)
  - 机床年产量: y(万台)
  - 粮食年产量: z(百万吨)
- **可用资源约束**:
  - **国家投资总额**: 60 亿元. 生产 1 万吨钢材需投资 0.3 亿元; 1 万台机床需投资 0.8 亿元; 1 百万吨粮食需投资 0.1 亿元.
  - **技术工人总工时**: 3000 万工时. 生产 1 万吨钢材需 5 万工时; 1 万台机床需 20 万工时; 粮食生产主要依赖普通劳力, 对技术工人需求极小, 忽略不计.
- **内部结构与社会需求约束**:
  - **钢材内部消耗**: 每制造 1 万台机床, 需消耗 2 万吨钢材. 剩余的钢材才能用于其他建设.
  - **粮食基本需求**: 工业部门 (钢铁, 机床) 的工人需要粮食来维持生产. 假设每生产 1 万吨钢材或 1 万台机床, 需要消耗 0.2 百万吨粮食. 同时, 国家必须保证至少 80 百万吨的粮食储备与民用.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **最低工业指标**：为奠定工业化基础，钢材产量至少为 40 万吨，机床产量至少为 5 万台.
- **国家战略价值函数**：根据优先发展重工业，特别是装备制造业的国策，经测算，每单位产出的战略价值为：钢材 5 分，机床 12 分，粮食 2 分.

问：应如何制定 x, y, z 的年度生产计划，使得国家战略价值总分最高？

解 这是一个三维线性规划问题，其复杂性与真实性远超二维平面. 先系统地构建其数学模型.

目标函数是最大化国家战略价值 W：

$$\text{最大化} \quad W = 5x + 12y + 2z$$

约束条件如下：

1. 投资约束：$0.3x + 0.8y + 0.1z \le 60 \implies 3x + 8y + z \le 600$
2. 技术工人约束：$5x + 20y \le 3000 \implies x + 4y \le 600$
3. 钢材内部平衡：（此为隐性约束，净钢材为 $x - 2y$，必须非负）$x - 2y \ge 0$
4. 粮食需求约束：$z \ge 0.2x + 0.2y + 80$
5. 最低指标约束：$x \ge 40, y \ge 5$

三个变量下无法直接使用二维图解法，但可以利用投资约束消去 z. 目标函数中 z 的系数为正，因而在最优解处必会用尽投资预算；否则可以在不减少 x, y 的前提下增加 z，使 W 继续增大.

因此最优解满足

$$3x + 8y + z = 600, \quad z = 600 - 3x - 8y.$$

将其代入目标函数：

$$W = 5x + 12y + 2(600 - 3x - 8y) = 1200 - x - 4y.$$

所以最大化 W 等价于在可行条件下最小化 $x + 4y$.

同时，粮食需求约束给出

$$600 - 3x - 8y \ge 0.2x + 0.2y + 80$$

即

$$16x + 41y \le 2600.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是只需考察关于 x, y 的约束

$$\begin{cases} x + 4y \le 600 \\ 16x + 41y \le 2600 \\ x - 2y \ge 0 \\ x \ge 40 \\ y \ge 5 \end{cases}$$

在这些约束中,x 与 y 的下界分别为 $x \ge 40, y \ge 5$,且目标 $x+4y$ 的两个系数均为正. 因此其最小值在 $x = 40, y = 5$ 处取得. 该点满足 $x-2y = 30 \ge 0$、$x+4y = 60 \le 600$、$16x + 41y = 845 \le 2600$, 确为可行点.

代回投资约束求得

$$z = 600 - 3(40) - 8(5) = 440.$$

最终的战略价值总分为

$$W = 5(40) + 12(5) + 2(440) = 200 + 60 + 880 = 1140.$$

因此, 按照题设给出的目标函数与资源数据, 最优的年度生产计划是生产钢材 40 万吨, 机床 5 万台, 粮食 440 百万吨. 可见, 在线性规划建模中, 目标函数系数与资源消耗系数共同决定最优方向; 若希望模型体现“粮食只满足最低需求、资源优先投向工业”的政策目标, 则需要相应调整目标函数或增加额外约束.

3.2.5 金融领域的投资组合优化

金融学的主要议题之一是在不确定性中做出最优决策. 对任何投资者而言, 这都归结于一场在**回报**与**风险**之间的永恒博弈. 通常, 潜在回报越高的资产, 其价格波动的风险也越大. 一个纯粹追求最高回报的策略可能会导致无法承受的亏损, 而一个完全回避风险的策略则可能使资产价值停滞不前.

现代投资组合理论, 由诺贝尔奖得主哈里·马科维茨奠基, 为解决这一难题提供了科学的框架. 它主张通过**分散化**投资于多种不完全相关的资产, 在不牺牲预期回报的前提下降低整个投资组合的风险. 理论上, 存在一系列被称为*有效前沿*的投资组合, 它们在给定风险水平下提供了最高的回报.

虽然完整的马科维茨模型因其对风险 (通常用方差衡量) 的处理而属于二次规划的范畴, 但线性规划为解决这类问题提供了一个极其实用且易于理解的入门工具和近似方法. 在许多现实场景中, 风险可以用一系列线性的规则和约束有效控制, 从而将问题转化为一个标准的线性规划模型.

在线性规划的视角下, 投资组合优化的任务被清晰地解构为:

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **决策变量**: 决定投入到每一种金融资产, 如股票, 债券, 房地产等的资金数额 $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- **目标函数**: 通常是最大化整个投资组合的总预期回报, 即 Maximize$Z = r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n$, 其中 r_i 是资产 i 的预期回报率.
- **约束条件**: 这部分把所有现实世界的限制和投资者的偏好转化为数学语言.
  - **预算约束**: $\sum x_i \le$ 总投资额.
  - **风险控制约束**: 对高风险资产类别的投资上限, 如 $\sum_{k\in\text{高风险}} x_k \le$ 风险敞口上限.
  - **分散化约束**: 对单一资产或行业的最低或最高投资比例, 如 $x_j \ge$ 最低要求, 或 $x_j \le$ 单一资产上限.
  - **监管与合规约束**: 法律或基金章程规定的其他任何线性限制.

通过这种方式, 线性规划将投资者的主观目标与客观限制, 即高回报、预算与风险, 转化为一个精确的数学问题, 并提供了一个保证找到最优解的系统性方法; 最优解未必唯一, 此时可行域的整条边, 或整个面上的点都同样最优.

例题 3.37 (风险与回报的权衡) 一位基金经理负责管理一笔总额为 100 万元的资金. 她的目标是在遵守基金的投资章程的前提下, 将这笔资金分配给两种类型的股票: 高增长科技股和蓝筹公用事业股, 以期获得最大的年度预期回报.

- **投资标的与预期回报**:
  - 高增长科技股 (T): 风险较高, 预期年回报率为 10%.
  - 蓝筹公用事业股 (U): 风险较低, 预期年回报率为 4%.
- **基金投资章程约束**:
  - **总预算**: 投入两种股票的总金额不得超过 100 万元.
  - **风险敞口限制**: 对高风险的科技股, 投资额不得超过 60 万元.
  - **稳健性要求**: 为保证投资组合的稳定性, 对公用事业股的投资额不得低于 10 万元.

问: 基金经理应如何分配资金, 才能使总的预期年回报最大化?

解 这是一个典型的投资组合优化问题, 可通过线性规划进行建模求解.

设投入高增长科技股的资金为 x 万元, 投入蓝筹公用事业股的资金为 y 万元. 目标是最大化总预期回报 Z(单位: 万元), 其目标函数为:

$$\text{最大化} \quad Z = 0.10x + 0.04y$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此决策必须满足基金章程规定的所有约束条件：

1. 预算约束：$x + y \le 100$
2. 风险敞口约束：$x \le 60$
3. 稳健性约束：$y \ge 10$
4. 非负约束：$x \ge 0$.

通过顶点检验法求解. 首先绘制由上述不等式组定义的可行域. 可行域是一

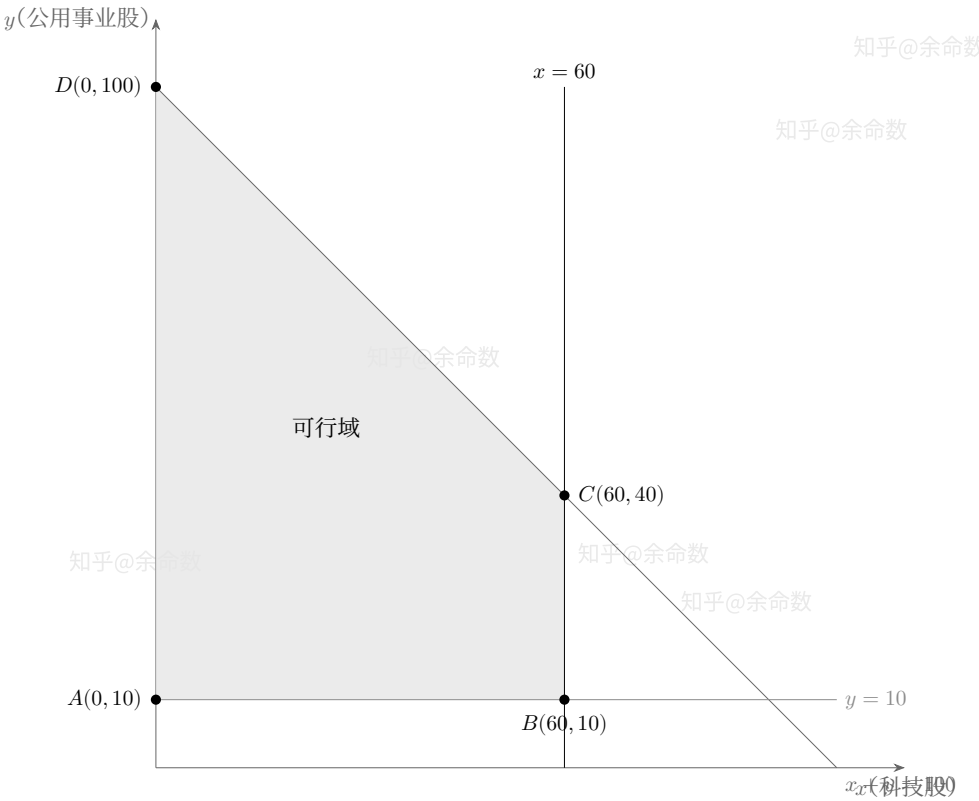


图 3.16　投资组合问题的可行域

个四边形，其顶点由边界线的交点构成：

- 顶点 A：$x = 0$ 与 $y = 10$ 的交点. 故 $A(0, 10)$.
- 顶点 B：$x = 60$ 与 $y = 10$ 的交点. 故 $B(60, 10)$.
- 顶点 C：$x = 60$ 与 $x + y = 100$ 的交点，解得 $y = 40$. 故 $C(60, 40)$.
- 顶点 D：$x = 0$ 与 $x + y = 100$ 的交点，解得 $y = 100$. 故 $D(0, 100)$.

根据线性规划基本定理，最大回报必在这些顶点之一处取得. 将各顶点坐标代入目标函数 $Z = 0.10x + 0.04y$ 进行检验：

比较上表中的回报值，可见最大值为 7.6 万元，它在顶点 $C(60, 40)$ 处取得.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

顶点坐标 (x, y)	预期回报 $Z = 0.1x + 0.04y$
$A(0, 10)$	$0.1(0) + 0.04(10) = 0.4$
$B(60, 10)$	$0.1(60) + 0.04(10) = 6 + 0.4 = 6.4$
$C(60, 40)$	$0.1(60) + 0.04(40) = 6 + 1.6 = 7.6$
$D(0, 100)$	$0.1(0) + 0.04(100) = 4$

因此, 最优的投资策略是将 60 万元投入高增长科技股, 将 40 万元投入蓝筹公用事业股. 这个解的经济学含义是, 为了追求最高回报, 基金经理应该将高风险资产的头寸加到规则允许的上限 ($x = 60$), 然后将剩余的资金全部投入到稳健资产中, 直到用尽全部预算.

例题 3.38 (构建固定收益投资组合) 一家保险公司的资产管理部门需要将一笔 500 万元的资金投资于一个由国债和企业债构成的固定收益投资组合. 目标是在满足严格的风险和流动性要求下, 最大化年度利息总收入.

- **投资标的**:
  - A 类资产(政府主权债券 - 国债): 预期年收益率 3%, 风险评级为 1(极低风险).
  - B 类资产, 即高收益企业债券: 预期年收益率 7%, 风险评级为 5(中等风险).
- **投资规定与风控要求**:
  - **总预算**: 总投资额不超过 500 万元.
  - **平均风险控制**: 整个投资组合的加权平均风险评级不得超过 2.
  - **流动性要求**: 出于流动性考虑, 投资于国债的资金必须至少占总投资额的 40%.

问: 应如何配置国债和企业债的投资金额, 才能使年度利息收入最大化?

解 需在多重财务约束下, 寻找最优的资产配置方案. 将此问题构建为一个线性规划模型.

设投资于国债的金额为 x 万元, 投资于企业债的金额为 y 万元. 目标是最大化年度利息总收入 Z(单位: 万元), 其目标函数为:

$$\text{最大化} \quad Z = 0.03x + 0.07y$$

投资决策必须满足下列约束条件:

1. **预算约束**: $x + y \leq 500$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. **平均风险约束**：当实际投资额 $x+y>0$ 时，投资组合的加权平均风险评级由 $\frac{1\cdot x+5\cdot y}{x+y}$ 给出. 对非零投资组合有

$$\begin{aligned}\frac{x+5y}{x+y}\le 2 &\implies x+5y\le 2(x+y)\\ &\implies x+5y\le 2x+2y\\ &\implies 3y\le x\\ &\implies x-3y\ge 0.\end{aligned}$$

零投资点可视为退化可行点；它显然不会给最大收益，不影响最优解.

3. **流动性约束**：$x\ge 0.40(x+y)$. 化简得

$$\begin{aligned}x\ge 0.40(x+y) &\implies x\ge 0.4x+0.4y\\ &\implies 0.6x\ge 0.4y\\ &\implies 3x\ge 2y\\ &\implies 3x-2y\ge 0.\end{aligned}$$

4. **非负约束**：$x\ge 0, y\ge 0$.

通过顶点检验法求解. 首先确定可行域. 可行域是一个由原点和另外两个顶

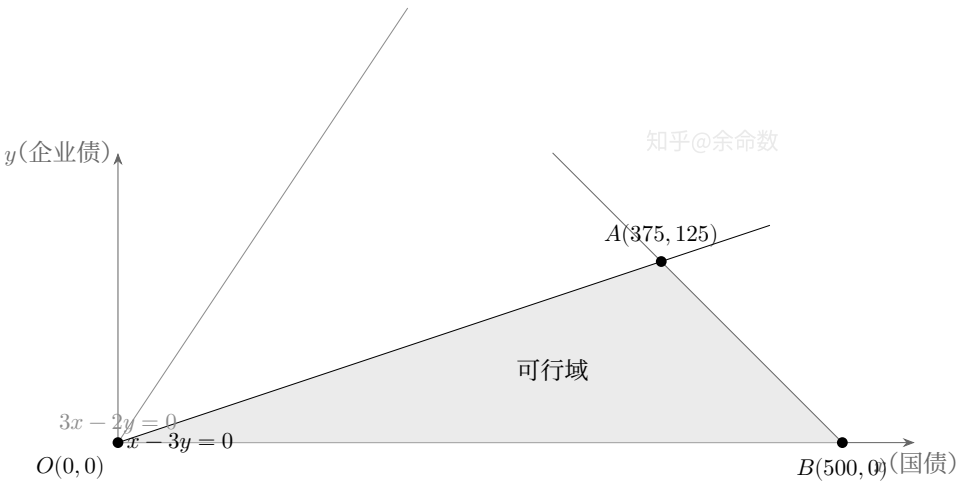


图 3.17　债券投资组合问题的可行域

点构成的三角形. 它的顶点由以下边界线的交点确定：(注意到 $3x-2y\ge 0 \implies y\le 1.5x$ 是一个比 $x-3y\ge 0 \implies y\le x/3$ 更宽松的约束，因此可行域的边界由 $y=x/3, x+y=500$ 和 $y=0$ 决定).

- 顶点 O：原点 $(0,0)$.
- 顶点 B：$x+y=500$ 与 $y=0$ 的交点. 故 $B(500,0)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 顶点 A: $x+y=500$ 与 $x-3y=0$ 的交点. 联立求解, $3y+y=500 \implies 4y=500 \implies y=125$, 则 $x=375$. 故 $A(375,125)$.

(需检验顶点 A 是否满足所有约束.$3(375)-2(125)=1125-250>0$, 满足流动性约束. 故 A 是有效顶点).

将顶点代入目标函数 $Z=0.03x+0.07y$ 进行检验:

顶点坐标 (x,y)	利息收入 $Z=0.03x+0.07y$
$O(0,0)$	$0.03(0)+0.07(0)=0$
$B(500,0)$	$0.03(500)+0.07(0)=15$
$A(375,125)$	$0.03(375)+0.07(125)=11.25+8.75=20$

比较结果, 最大利息收入为 20 万元, 在顶点 $A(375,125)$ 处取得.

因此, 最优的资产配置方案是投资 375 万元于国债, 投资 125 万元于企业债. 此解的金融学含义是, 在满足预算的前提下, 风险控制主导决策. 投资者应将尽可能多的资金投入到高收益的企业债中, 直到组合的平均风险达到规定的上限 ($x-3y=0$). 此时, 任何进一步增加企业债投资的行为都将违反风险规定.

知乎@余命数

3.3 二次曲线

直线由一次方程 $Ax+By+C=0$ 给出, 圆是特殊的二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 一个自然的下一步是把二次推到最一般的情形, 考察

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

所定义的点集. 这一族曲线统称二**次曲线**, 也叫**圆锥曲线**, 包括椭圆(含圆)、抛物线、双曲线, 以及退化成一点、一条或两条直线乃至空集的若干情形. 行星轨道、光学反射面、炮弹弹道的简化模型, 都落在这一代数框架里.

知乎@余命数

3.3.1 二次曲线的一般理论

3.3.1.1 从几何定义到代数方程

三种经典曲线各有几何定义, 后文各小节会给出. **椭圆**是到两定点(焦点)距离之和为常数的点的轨迹. **双曲线**是到两定点距离之差的绝对值为常数的点的轨迹. **抛物线**是到定点与到定直线距离相等的点的轨迹, 定点称为焦点, 定直线称为准线.

取焦点在 x 轴、中心或顶点在原点、对称轴与坐标轴重合的坐标系, 把距离公式代入定义, 再两边平方消去根式, 得到**只含** x^2,y^2 **与常数**的方程, 例如

知乎@余命数

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y^2=2px.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这是标准方程. 它们都是二次方程, 但不含交叉项 xy, 也不含一次项 x, y（抛物线中 x 的一次项是顶点在原点、轴沿坐标轴时的特殊情形）.

现实中的曲线往往中心偏离原点、轴相对坐标轴倾斜. 要把标准形放到任意位置, 需要平面上的**刚体运动**. 刚体运动只改变图形在坐标系中的位置与朝向, 而**不改变**任何两点之间的距离, 因而也不改变长度、角度与形状. 在欧氏平面上, 任意刚体运动都可以分解为两步: **旋转**绕某点转过一个角 θ, 改变朝向; **平移**把图形整体沿某个向量挪动, 改变位置. 若还允许镜面反射, 就得到更广的等距变换; 但二次曲线的标准分类只需旋转加平移. 把曲线先绕原点逆时针旋转角 θ, 再平移到 (h, k), 则旧坐标 (x, y) 与贴着曲线的新坐标 (x', y') 之间满足

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + h,$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + k.$$

以椭圆 $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ 为例, 把上式代入并展开. 因为 x, y 都是 x', y' 的一次式, 而方程关于 x', y' 是二次的, 代回 (x, y) 之后总次数仍是 2, 并且一定会出现四类项: x^2, y^2 项来自二次型本身; xy 项来自旋转, 它使两个坐标混在一起; x, y 项来自平移, 它把原点挪开; 常数项则把原点处的方程值搬到新位置. 整理后恰是

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{3-9}$$

双曲线、抛物线经同样的旋转加平移, 也落入同一形式. 平面上任意一个**总次数恰好为** 2 的实系数多项式方程, 都可以写成 (3-9), 其中 A, B, C 不全为零（否则退化为直线方程）. 这就是二次曲线的代数定义. 六个系数正是标准圆锥曲线经刚体运动后留下的全部自由度.

定义 3.4 (二次曲线的代数定义) 平面上一条**二次曲线**是所有满足方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3-10}$$

的点 (x, y) 的集合, 其中 $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, 且二次项系数 A, B, C 不全为零.

同一几何曲线的方程可以整体乘一个非零常数, 六个系数只有五个自由度. 系数不同时, 方程可以给出椭圆、抛物线、双曲线, 也可以给出退化情形（一点、一对相交直线、一对平行直线、一条二重直线, 或空集）. 圆锥曲线一称来自正圆锥面的截口.

知乎@余命数

3.3.1.2 六个系数各自做什么

把 (3-9) 拆成三块来读.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

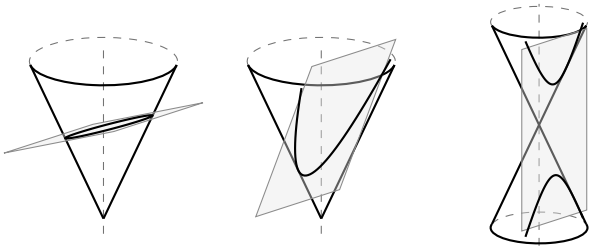


图 3.18 平面截正圆锥面的立体示意：(1) 截面与所有母线相交得椭圆，(2) 截面与一条母线平行得抛物线，(3) 截面切到对顶两半得双曲线. 截线是锥面与截面方程联立解出的精确曲线.

知乎@余命数

块	项	几何角色
二次型	$Ax^2+Bxy+Cy^2$	形状与朝向（椭圆 / 抛物 / 双曲类型，以及轴相对坐标轴的倾斜）
一次项	$Dx+Ey$	中心或顶点相对原点的平移
常数项	F	与原点相对位置、整体尺度的定标（与 A 至 E 联立后决定大小）

下面分项说明.

1. A **与** C，即对角二次项. 当 $B=0$ 时，方程可写成 $Ax^2+Cy^2+\cdots=0$，此时对称轴已与坐标轴平行. 若 A,C 同号且非零，曲线属椭圆类型，再经平移与缩放可到 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，也可能退化为空集或一点. 若 A,C 异号，曲线属双曲线类型. 若 A,C 恰有一个为零，曲线属抛物线类型，例如 $y^2=2px$ 对应 $A=0,\ C=1$. $|A|$ 与 $|C|$ 的相对大小决定沿 x 方向挤得多还是沿 y 方向挤得多. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 写成 $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ 时，$A=b^2,\ C=a^2$.
2. B（交叉项 xy）. $B\neq 0$ 表示对称轴**相对坐标轴发生了旋转**. 例如把 $x^2-y^2=1$ 旋转 45°，得到 $xy=\frac{1}{2}$ 这类方程，此时 $A=C=0,\ B\neq 0$. 消掉 B 的办法是绕原点旋转坐标系；旋转角由

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}\quad(B\neq 0)$$

决定. 若 $B=0$，轴已与坐标轴平行，无需旋转.

3. D **与** E，即一次项. 它们编码**平移**. 把原点挪到椭圆与双曲线的中心，或抛物线的顶点后，适当选取时 $D=E=0$. 例如圆 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 展开后 $D=-2h,\ E=-2k$. 对椭圆与双曲线这类有中心的曲线，令 $x=x'+x_0,\ y=y'+y_0$ 代入 $Q=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$，并要求新方程中 x',y' 的一次项系数同时为零，即得关于中心 (x_0,y_0) 的线性组

$$2Ax_0+By_0+D=0,\qquad Bx_0+2Cy_0+E=0.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

当系数行列式 $4AC-B^2=-\Delta\neq 0$(此时必为椭圆型或双曲线型)时,中心唯一确定.

4. F(常数项). 固定二次型与一次项后, F 决定曲线相对于原点的尺度与是否实点. 对方程 $x^2+y^2+F=0$, 当 $F<0$ 时为圆, 当 $F=0$ 时为原点, 当 $F>0$ 时为空集. 整体乘非零常数会同时改写 F 与其他系数, 几何图形不变.

解析几何的常用操作是**坐标变换**,先旋转消掉 B,再平移消掉(中心型的)D,E,得到**标准方程**, 再从标准方程读出顶点、焦点、离心率等几何量. 曲线类型其实不必做完变换也能读出来, 关键在于一个旋转不变量.

3.3.1.3 判别式 $\Delta=B^2-4AC$ 的推导

我们只讨论绕原点的旋转, 平移不改变二次项系数 A,B,C, 也不改变 B^2-4AC. 令

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,$$

$$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,$$

并简记 $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$. 将

$$Q=Ax^2+Bxy+Cy^2$$

代入, 收集 x'^2, $x'y'$, y'^2 的系数, 得到

$$A'=Ac^2+Bcs+Cs^2,$$

$$B'=2(C-A)sc+B(c^2-s^2),$$

$$C'=As^2-Bcs+Cc^2.$$

利用倍角公式 $c^2-s^2=\cos 2\theta$, $2sc=\sin 2\theta$, 交叉项可写成

$$B'=B\cos 2\theta-(A-C)\sin 2\theta. \tag{3-11}$$

我们的目标是选 θ 使 $B'=0$. 若 $B=0$ 且 $A=C$, 任意 θ 都行, 此时曲线本就是圆型, 各向同性;若 $B=0$ 且 $A\neq C$, 取 $\theta=0$ 即可. 若 $B\neq 0$, 令 $B'=0$ 得

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B},$$

在 $2\theta\in(0,\pi)$ 上总有解, 故**总能**消去交叉项, 使方程化为

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

消交叉项之后, 类型由 A', C' 的符号决定. 若 $A'C' > 0$, 曲线属椭圆类型, 含圆, 此时旋转后 $A' = C'$, 且可化为 $x'^2 + y'^2 = r^2$. 若 $A'C' = 0$, 曲线属抛物线类型, 此时恰有一个二次项消失. 若 $A'C' < 0$, 曲线属双曲线类型. 希望**不先算出** θ **与** A', C', 直接从原始 A, B, C 读出 $A'C'$ 的符号. 关键是证明

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC. \tag{3-12}$$

把 A', B', C' 的表达式代入左边, 先算 $A' + C'$ 与 $A' - C'$.

$$A' + C' = (Ac^2 + Bcs + Cs^2) + (As^2 - Bcs + Cc^2) = A + C,$$

$$A' - C' = A(c^2 - s^2) + 2Bcs + C(s^2 - c^2) = (A - C)\cos 2\theta + B\sin 2\theta.$$

再由 (3-11) 知

$$B' = B\cos 2\theta - (A - C)\sin 2\theta.$$

于是

$$\begin{aligned} B'^2 + (A' - C')^2 &= \left[B\cos 2\theta - (A - C)\sin 2\theta\right]^2 + \left[(A - C)\cos 2\theta + B\sin 2\theta\right]^2 \\ &= B^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) + (A - C)^2(\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ &= B^2 + (A - C)^2. \end{aligned}$$

另一方面, 恒等式

$$(A' - C')^2 + B'^2 = (A' + C')^2 - 4A'C'$$

给出

$$B'^2 - 4A'C' = B'^2 + (A' - C')^2 - (A' + C')^2 = B^2 + (A - C)^2 - (A + C)^2.$$

右边化简为

$$B^2 + (A-C)^2 - (A+C)^2 = B^2 + (A^2 - 2AC + C^2) - (A^2 + 2AC + C^2) = B^2 - 4AC.$$

于是 (3-12) 成立, 即 $B^2 - 4AC$ 在旋转下不变.

取定使 $B' = 0$ 的 θ 后,

$$-4A'C' = B^2 - 4AC.$$

于是 $A'C'$ 的符号与 $-(B^2 - 4AC)$ 一致. 记

$$\Delta = B^2 - 4AC,$$

称为二次曲线的**判别式**(二次型判别式). 分类表如下.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\Delta = B^2 - 4AC$	$A'C'$	类型	典型标准形(非退化)
$\Delta < 0$	> 0	椭圆型	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$(圆对应 $a = b$)
$\Delta = 0$	$= 0$	抛物线型	$y^2 = 2px$
$\Delta > 0$	< 0	双曲线型	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

知乎@余命数

我们补充三点, 避免把类型与实图形混为一谈.

知乎@余命数

1. Δ 只由二次项决定, 平移系数 D, E, F 不进入 Δ. 同一 Δ 下, 改 D, E, F 可把椭圆变成空集或一点, 把双曲线变成一对相交直线, 把抛物线变成一对平行直线等**退化**情形. 完整区分退化与否需要更大的不变量, 即 3×3 系数矩阵的行列式. 本书先用 Δ 判断椭圆、抛物与双曲大类, 再在标准形中用参数是否满足几何约束, 如 $a > c > 0$ 排除退化.
2. 当 $B = 0$ 且 $A = C \neq 0$ 时 $\Delta = -4A^2 < 0$, 属于椭圆型; 再配合一次项与常数, 可化为圆.
3. Δ 与一元二次方程 $at^2 + bt + c = 0$ 的判别式 $b^2 - 4ac$ 同形. 二次型 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 在 $x \neq 0$ 的射线上可看作关于方向斜率 $t = y/x$ 的二次式 $A + Bt + Ct^2$, 其判别式正是 $B^2 - 4AC$. 它刻画各方向上二次型取值是否变号. 变号对应双曲型, 恒同号对应椭圆型, 恰有一方向为零对应抛物型.

下面从椭圆开始, 逐一给出几何定义、标准方程与性质.

知乎@余命数

3.3.2 椭圆

3.3.2.1 椭圆的几何定义

我们从一个不依赖坐标系的几何构造出发, 用两焦点和距离之和刻画椭圆.

定义 3.5 (椭圆) 平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于一个常数 (该常数必须大于两定点之间的距离) 的所有点 P 的轨迹, 称为**椭圆**. 这两个定点 F_1, F_2 称为椭圆的**焦点**.

知乎@余命数

拉绳法给出这个定义的直观图像. 把一根长度固定的绳子的两端固定在 F_1, F_2 两图钉上, 用笔尖 P 拉紧绳子并移动, 笔尖经过的轨迹就是椭圆.

知乎@余命数

3.3.2.2 椭圆的标准方程

为了把上述几何定义写成代数方程, 我们建立一个坐标系. 最能简化计算的坐标系是把 x 轴放在两焦点所在直线上, 原点放在线段 F_1F_2 的中点. 设两焦点之间的距离为 $2c$ ($c > 0$), 则 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. 设点 P 到两焦点的距离之和为常数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

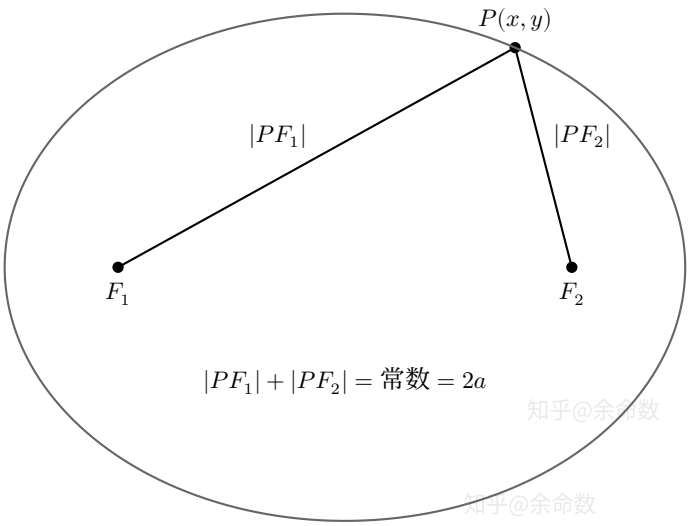


图 3.19 椭圆的焦点定义

$2a$. 根据三角形两边之和大于第三边, 必须有 $2a > |F_1F_2| = 2c$, 即 $a > c$. 设 P 的坐标为 (x, y). 根据定义, 有

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

利用两点间距离公式, 将其写为坐标形式:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

这是含两个根式的方程. 我们通过代数运算消去根式. 首先, 将其中一个根式移到等式右侧:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

对等式两边同时平方:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

展开并化简. 注意到 x^2, y^2, c^2 项在两侧被消去:

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

两边同除以 4, 整理得到

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为了消去最后的根式, 再对等式两边平方:

$$(a^2-cx)^2=a^2\left((x-c)^2+y^2\right)$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

注意到 $-2a^2cx$ 项在两侧也被消去. 将含有变量的项移到一边, 常数项移到另一边:

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

由于已假设 $a>c$, 故 a^2-c^2 为正数. 我们把这个量定义为 b:

$$b^2=a^2-c^2\quad(b>0)$$

将此式代入, 方程变为

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

最后, 用 a^2b^2 除以方程两边(由 $a>c>0$ 知 $b^2>0$, 故 $a^2b^2\neq0$), 得到椭圆的标准方程:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)\tag{3-13}$$

若焦点位于 y 轴上, 即 $F_1(0,-c),F_2(0,c)$, 遵循同样的推导, 可得标准方程为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. 通常我们约定 a 代表半长轴, 故 $a>b$ 总是成立.

3.3.2.3 椭圆的几何性质

椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 编码了它的全部几何信息.

- **对称性**: 由于方程中 x,y 均以平方形式出现, 将 (x,y) 替换为 $(-x,y)$、$(x,-y)$ 或 $(-x,-y)$ 时方程均不变. 故椭圆关于 y 轴、x 轴以及原点中心对称.
- **范围**: 从方程可知

  $$\frac{x^2}{a^2}\leq1,\qquad\frac{y^2}{b^2}\leq1,$$

  即 $|x|\leq a$ 且 $|y|\leq b$. 椭圆是有界图形, 完全落在直线 $x=\pm a$ 与 $y=\pm b$ 围成的矩形内部.
- **顶点**: 椭圆与对称轴的交点称为顶点, 即 $(\pm a,0)$ 与 $(0,\pm b)$.
- **轴**: 连接顶点 $(\pm a,0)$ 的线段称为**长轴**, 长度为 $2a$. 连接顶点 $(0,\pm b)$ 的线段称为**短轴**, 长度为 $2b$. 其中 a 为**半长轴长**, b 为**半短轴长**.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **焦点与轴长的关系**：定义 $b^2=a^2-c^2$ 可改写为

知乎@余命数

$$a^2=b^2+c^2.$$

几何上，这对应以半长轴长 a 为斜边、半短轴长 b 与焦距 c 为直角边的直角三角形.

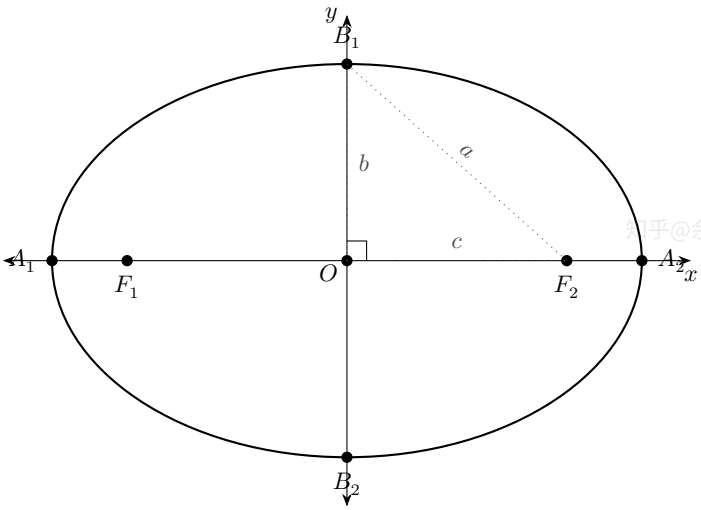


图 3.20 椭圆的标准方程几何要素，其中 $a^2=b^2+c^2$

知乎@余命数

例题 3.39 设 F_1 为椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的右焦点，AB 为过原点的弦，则 $\triangle ABF_1$ 面积的最大值为

A. 20　　C. $13\dfrac{1}{2}$

B. 15　　D. 12

解 我们需求以焦点为顶点、以中心弦为底边的三角形的最大面积.

先从椭圆方程 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 中提取几何参数：半长轴 $a=5$，半短轴 $b=3$. 半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$. 由于 F_1 是右焦点，它的坐标为 $(4,0)$.

设弦 AB 是过原点的一条直线. 设其与椭圆的交点为 $A(x_A,y_A)$ 和 $B(x_B,y_B)$. 由于直线过原点且椭圆关于原点中心对称，A,B 也关于原点对称，即 $x_B=-x_A, y_B=-y_A$.

计算 $\triangle ABF_1$ 的面积. 把 $\triangle ABF_1$ 看成 $\triangle OAF_1$ 与 $\triangle OBF_1$ 拼接而成，它们共享底边 OF_1. 底边长为 $|OF_1|=c=4$. $\triangle OAF_1$ 的高是点 A 到 x 轴的距离，即 $|y_A|$. $\triangle OBF_1$ 的高是点 B 到 x 轴的距离，即 $|y_B|=|-y_A|=|y_A|$.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

于是 $\triangle ABF_1$ 的总面积 S 为

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle OAF_1} + S_{\triangle OBF_1} \\ &= \frac{1}{2}|OF_1| \cdot |y_A| + \frac{1}{2}|OF_1| \cdot |y_B| \\ &= \frac{1}{2}c|y_A| + \frac{1}{2}c|y_A| \\ &= c|y_A|. \end{aligned}$$

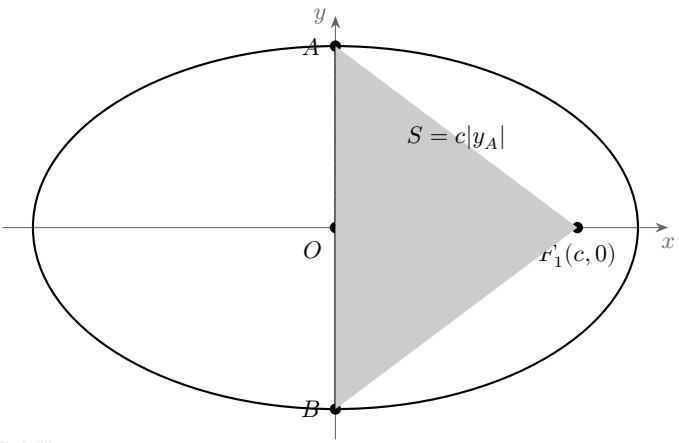


图 3.21　焦点-中心弦三角形面积的构成

要使面积 $S = c|y_A|$ 最大化，需最大化点 A 的纵坐标的绝对值 $|y_A|$. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上任意一点满足 $|y| \leq b$, 最大值在短轴顶点 $x = 0$ 处取得.

因此, 当弦 AB 为椭圆的短轴时, $|y_A|$ 取得最大值 b, 此时 $\triangle ABF_1$ 的面积也达到最大值.

$$S_{\text{max}} = c \cdot b$$

代入本题的数值, 得:

$$S_{\text{max}} = 4 \times 3 = 12$$

故选 D.

这个例题的解法说明了一个普遍结论, 我们把它写成定理.

知乎@余命数　知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.4 (焦点-中心弦三角形面积) 对于中心在原点的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0, c^2=a^2-b^2)$, 由一个焦点 $F(c,0)$ 和一条非长轴的过原点弦 AB 构成的非退化三角形 $\triangle ABF$, 其面积 S 的取值范围为:

$$0<S\le cb$$

- 当弦 AB 为短轴时, 面积取得**最大值** cb.
- 当弦 AB 趋近于长轴时(此时三角形退化为线段), 面积趋近于**最小值** 0.

证明 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 其右焦点为 $F(c,0)$. 设过原点的弦 AB 由直线 l 确定, A,B 为 l 与椭圆的两个交点. 由于椭圆关于原点中心对称, 若 $A(x_A,y_A)$, 则 $B(-x_A,-y_A)$.

计算 $\triangle ABF$ 的面积 S. 把 $\triangle ABF$ 的面积看成两个共底边的小三角形 $\triangle OAF$ 与 $\triangle OBF$ 的面积之和.

以 OF 所在的 x 轴为基准.

- $\triangle OAF$ 的底边为 $|OF|=c$, 其高为点 A 到 x 轴的距离, 即 $|y_A|$. 因此, $S_{\triangle OAF}=\frac{1}{2}c|y_A|$.
- $\triangle OBF$ 的底边也为 $|OF|=c$, 其高为点 B 到 x 轴的距离, 即 $|y_B|$. 由于 $y_B=-y_A$, 有 $|y_B|=|y_A|$. 因此, $S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}c|y_A|$.

将两者相加, 得到 $\triangle ABF$ 的总面积:

$$S=S_{\triangle OAF}+S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}c|y_A|+\frac{1}{2}c|y_A|=c|y_A|$$

因此, S 与 $|y_A|$ 成正比; 求 S 的最大值等价于求椭圆上 $|y_A|$ 的最大值.

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 (x,y) 满足方程, 可推断 y 的取值范围:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\le 1$$

$$y^2\le b^2 \implies |y|\le b$$

因此, 椭圆上任意一点的纵坐标的绝对值 $|y|$ 的最大值为 b, 且在 $x=0$ 处取得, 对应短轴顶点 $(0,\pm b)$.

把 $|y_A|$ 的最大值代入面积公式, 得到面积最大值:

$$S_{\max}=c\cdot b=cb$$

这种情况发生在 A 为 $(0,b)$ 或 $(0,-b)$ 时, 此时弦 AB 正是椭圆的短轴.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再考察面积的最小值.$|y_A|$ 的最小值为 0, 发生在 A 为长轴顶点 $(\pm a, 0)$ 时. 此时弦 AB 为椭圆的长轴. 在这种情况下, 三个点 A, B, F 共线, 三角形退化为一条线段, 其面积为 0. 对于任意非退化的三角形, 弦 AB 不能是长轴, 故 $|y_A| > 0$, 从而 $S > 0$. 面积可以随着弦 AB 任意地接近长轴而趋近于 0.

因此 S 的取值范围为 $0 < S \leq cb$. □

例题 3.40　在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上取三点, 其横坐标满足 $x_1 + x_3 = 2x_2$. 三点与某一个焦点连结的线段长分别为 r_1, r_2, r_3, 则 r_1, r_2, r_3 满足

A. $2r_2 = r_1 + r_3$　　C. $r_2^2 = r_1 \cdot r_3$

B. $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{2}{r_2}$　　D. 以上结论全不对

解　我们用椭圆的焦半径公式, 把 r_i 的关系转化为 x_i 的关系.

设这三点为 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$. 设它们与右焦点 $F_2(c, 0)$ 相连. (选择左焦点 $F_1(-c, 0)$ 会得到相同的结论). 根据前面证明的焦半径公式, 椭圆上一点 (x, y) 到右焦点 $F_2(c, 0)$ 的距离为

$$r = a - ex$$

其中 $e = \frac{c}{a}$ 是椭圆的离心率.

将此公式应用于给定的三点:

$$r_1 = a - ex_1$$

$$r_2 = a - ex_2$$

$$r_3 = a - ex_3$$

这是 r_i 与 x_i 之间的一阶线性关系.

题目条件是三点的横坐标构成等差数列, 即 $x_1 + x_3 = 2x_2$. 我们看 r_1, r_2, r_3 是否也成等差数列. 计算 $r_1 + r_3$, 得

$$\begin{aligned} r_1 + r_3 &= (a - ex_1) + (a - ex_3) \\ &= 2a - e(x_1 + x_3) \end{aligned}$$

将条件 $x_1 + x_3 = 2x_2$ 代入上式, 得

$$r_1 + r_3 = 2a - e(2x_2) = 2(a - ex_2)$$

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

注意到 $a-ex_2$ 正是 r_2 的表达式. 因此

$$r_1+r_3=2r_2$$

于是 r_1,r_2,r_3 也成等差数列.

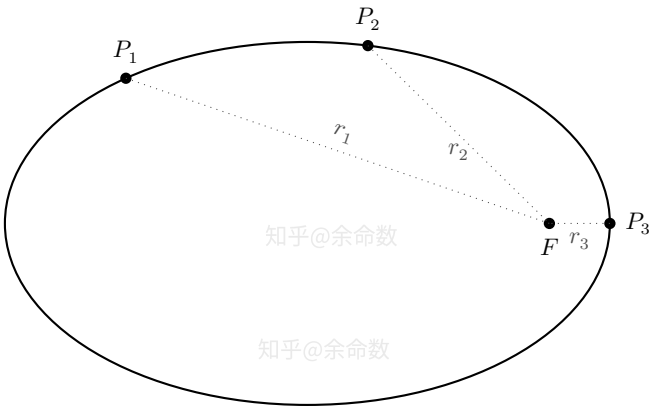


图 3.22 横坐标成等差数列的点的焦半径

(若选择左焦点 $F_1(-c,0)$, 焦半径公式为 $r=a+ex$. 同样地, $r_1+r_3=(a+ex_1)+(a+ex_3)=2a+e(x_1+x_3)=2a+e(2x_2)=2(a+ex_2)=2r_2$. 结论不变.)

故选 A. 这个结论说明了椭圆的一个内在性质, 即**焦半径的长度是其端点横坐标的线性函数**, 等差数列的结构因此可以在横坐标与焦半径之间传递.

3.3.2.4 椭圆的参数方程

标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 描述了坐标 (x,y) 满足的代数关系, 但也可把曲线看成质点运动的轨迹, 用一个独立变量 (通常代表时间或角度) 表示每个坐标. 这就是参数方程.

为得到椭圆的参数方程, 观察标准方程:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

这个结构与三角恒等式 $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ 形式相同. 令

$$\frac{x}{a}=\cos t,\quad \frac{y}{b}=\sin t$$

由此, 直接得到椭圆的**参数方程**:

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\quad (t\text{为参数})\tag{3-14}$$

当 t 从 0 变到 2π 时, 点 (x,y) 恰好沿椭圆逆时针运行一周.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

参数 t 的几何意义需要辨析. 一个常见的误解是认为 t 是点 $P(x,y)$ 的位置向量与 x 轴正向的夹角, 即极角. 实际上, t 是**离心角**, 需借助一个辅助几何构造说明.

引入椭圆的**长轴辅助圆**, 它与椭圆同中心, 半径为 a, 方程为 $x^2+y^2=a^2$. 如

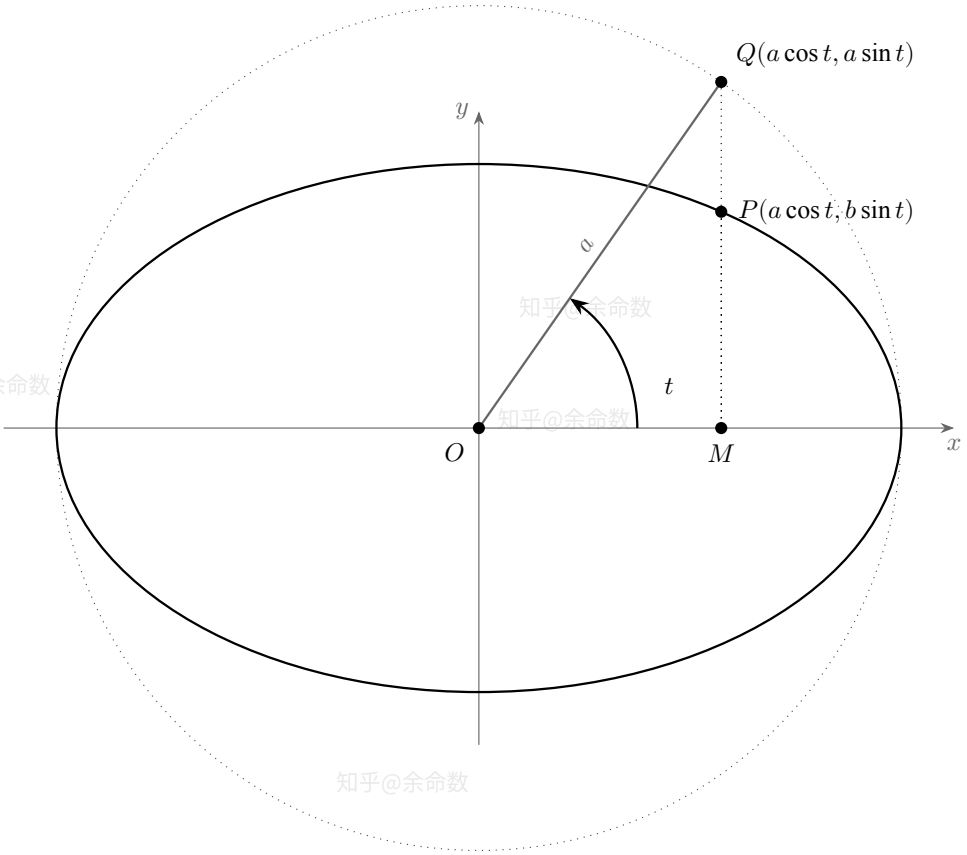


图 3.23　参数 t(离心角)的几何意义

图所示, 离心角 t 的构造如下.

1. 从椭圆上任意一点 $P(x,y)$ 向长轴即 x 轴作垂线, 垂足为 M.
2. 延长或缩短线段 MP 交长轴辅助圆于点 Q.
3. 则有向角 $\angle MOQ$, 其中 O 为原点的大小就是参数 t.

下面验证参数方程. 点 Q 位于半径为 a 的圆上, 且其极角为 t, 因此其坐标为 $(a\cos t, a\sin t)$. 由于点 P 与点 Q 在同一条垂线上, 它们的横坐标相同, 故 $x=a\cos t$. 将此 x 代入椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$\frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \implies \cos^2 t+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2 t=\sin^2 t \implies y^2=b^2\sin^2 t$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由此可得 $y=\pm b\sin t$. 结合点 P 与 Q 的位置关系 (同在 x 轴上方或下方), 可知 $y=b\sin t$. 这一构造解释了离心角 t 的含义, 也给出了从圆到椭圆的视角, 把长轴辅助圆沿短轴方向均匀压缩, 或拉伸 $\frac{b}{a}$ 倍, 即得椭圆.

参数方程在切线、面积、弧长与轨道等问题中都很方便.

例题 3.41 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 y 轴正向的交点为 B. 求以 B 为直角顶点的椭圆内接等腰直角三角形的个数.

知乎@余命数

解 我们要求以短轴顶点 B 为直角顶点的椭圆内接等腰直角三角形个数. 个数由离心率决定, 需对方程根的存在性分类讨论.

知乎@余命数

椭圆与 y 轴正向交于 $B(0,b)$. 设等腰直角三角形为 $\triangle BPQ$, 其中 P,Q 为椭圆上另两点. 取腰 BP 的方向向量为 $(\cos\theta,-\sin\theta)$, 与之垂直且朝向椭圆内部的腰 BQ 取方向 $(-\sin\theta,-\cos\theta)$.

知乎@余命数

射线 BP 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\theta\\ y=b-t\sin\theta\end{cases}(t>0)$. 把它代入椭圆方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$:

$$b^2(t\cos\theta)^2+a^2(b-t\sin\theta)^2=a^2b^2$$

展开整理, 得到关于 $t=|BP|$ 的二次方程:

$$(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)t^2-(2a^2b\sin\theta)t=0$$

知乎@余命数

此方程的非零解即为 $|BP|$:

知乎@余命数

$$|BP|=\frac{2a^2b\sin\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

同理, 对于射线 BQ, 其参数方程为 $\begin{cases}x=-t\sin\theta\\ y=b-t\cos\theta\end{cases}(t>0)$. 代入椭圆方程得 $|BQ|$:

$$|BQ|=\frac{2a^2b\cos\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

知乎@余命数

由等腰条件 $|BP|=|BQ|$:

$$\frac{\sin\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

交叉相乘并整理, 得

$$\sin\theta(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)=\cos\theta(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

假设 $\cos\theta \neq 0$, 两边同除以 $\cos^3\theta$, 得

$$\tan\theta(a^2 + b^2\tan^2\theta) = a^2\tan^2\theta + b^2$$

令 $T = \tan\theta$, 得到关于 T 的三次方程:

$$b^2T^3 - a^2T^2 + a^2T - b^2 = 0$$

注意到 $T = 1$ 是该方程的一个根, 因为 $b^2(1)^3 - a^2(1)^2 + a^2(1) - b^2 = 0$. 因此, 可分解因式:

$$(T-1)[b^2T^2 + (b^2 - a^2)T + b^2] = 0$$

三角形个数取决于该方程实数根的个数. 其中一个根为 $T = \tan\theta = 1$, 对应 $\theta = 45^\circ$, 此时两腰关于 y 轴对称, 底边 PQ 水平. 这种三角形总存在.

其余可能解来自二次方程 $b^2T^2 + (b^2 - a^2)T + b^2 = 0$. 判别式

$$\Delta = (b^2 - a^2)^2 - 4b^4.$$

由 $c^2 = a^2 - b^2$ 即 $b^2 - a^2 = -c^2$, 得 $\Delta = c^4 - 4b^4 = (c^2 - 2b^2)(c^2 + 2b^2)$. 因 $c^2 + 2b^2 > 0$, Δ 的符号由 $c^2 - 2b^2$ 决定:

$$c^2 - 2b^2 > 0 \iff 3c^2 > 2a^2 \iff e > \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

分类讨论如下:

1. **当** $e > \frac{\sqrt{6}}{3}$, 即 $c^2 > 2b^2$, $\Delta > 0$. 此时二次方程有两个不相等的实数根 T_1, T_2. 由于二次方程的两根乘积为 1、两根之和为 $\frac{c^2}{b^2} > 0$, 它们均为正数, 因而都对应某个 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. 注意 $T = 1$ 不是该二次方程的根(代入得 $3b^2 - a^2 \neq 0$, 除非 $c^2 = 2b^2$). 于是共有三个不同的可用实根 $1, T_1, T_2$. 每个根对应一个 θ 值, 从而对应一个等腰直角三角形. 故此时共有 **3** 个这样的三角形.
2. **当** $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 即 $c^2 = 2b^2$, $\Delta = 0$. 此时二次方程有一个重根 $T = -\frac{b^2 - a^2}{2b^2} = \frac{c^2}{2b^2} = \frac{2b^2}{2b^2} = 1$. 即三次方程有三重根 $T = 1$. 因此只存在一个 $\tan\theta = 1$ 的解. 故此时只有 **1** 个这样的三角形.
3. **当** $e < \frac{\sqrt{6}}{3}$, 即 $c^2 < 2b^2$, $\Delta < 0$. 此时二次方程没有实数根. 三次方程唯一的实数根是 $T = 1$. 故此时也只有 **1** 个这样的三角形.

椭圆内接等腰直角三角形的个数取决于离心率 e:

- 若 $e > \frac{\sqrt{6}}{3}$, 存在 3 个.
- 若 $0 < e \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$, 存在 1 个.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.3.2.5 椭圆的切线方程

推导经过椭圆上一点的切线方程. 下面把隐式微分与代数变形结合起来. 考虑标准椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 为求任意一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率, 对方程两边关于 x 隐式微分:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{d}{dx}(1)$$

知乎@余命数

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

由此解出切线斜率 $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

知乎@余命数

在点 $P(x_0,y_0)$ 处, 切线斜率为 $m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 由点斜式 $y-y_0=m(x-x_0)$, 得:

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

为把它化为更简洁对称的形式, 两边同乘 a^2y_0:

$$a^2y_0(y-y_0)=-b^2x_0(x-x_0)$$

知乎@余命数

$$a^2yy_0-a^2y_0^2=-b^2xx_0+b^2x_0^2$$

知乎@余命数

将含变量的项移到一边:

$$b^2xx_0+a^2yy_0=b^2x_0^2+a^2y_0^2$$

注意到点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆上, 故 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, 即 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$. 代入切线方程, 得:

$$b^2xx_0+a^2yy_0=a^2b^2$$

最后, 两边同除以 a^2b^2, 得到椭圆切线方程的标准形式:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \tag{3-15}$$

这个形式具有替换对称性, 把标准方程中的一个 x 与一个 y 分别换成切点坐标 x_0,y_0 就得到切线方程.

知乎@余命数

若切点由参数方程给出, $P(a\cos t,b\sin t)$, 将 $x_0=a\cos t,y_0=b\sin t$ 代入上式, 得切线方程的参数形式:

$$\frac{x(a\cos t)}{a^2}+\frac{y(b\sin t)}{b^2}=1$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$\frac{x\cos t}{a}+\frac{y\sin t}{b}=1 \tag{3-16}$$

例题 3.42　证明自椭圆的两焦点向其任意切线所作垂线段长的乘积为定值.

证明　下面用参数方程证明这个椭圆的几何性质. 考虑中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 其焦点为 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$. 利用参数方程, 椭圆上任意一点 P 可表示为 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$. 据此, 过此点的切线方程为:

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$$

为使用点到直线的距离公式, 把它写成一般形式:

$$\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)x+\left(\frac{\sin\theta}{b}\right)y-1=0$$

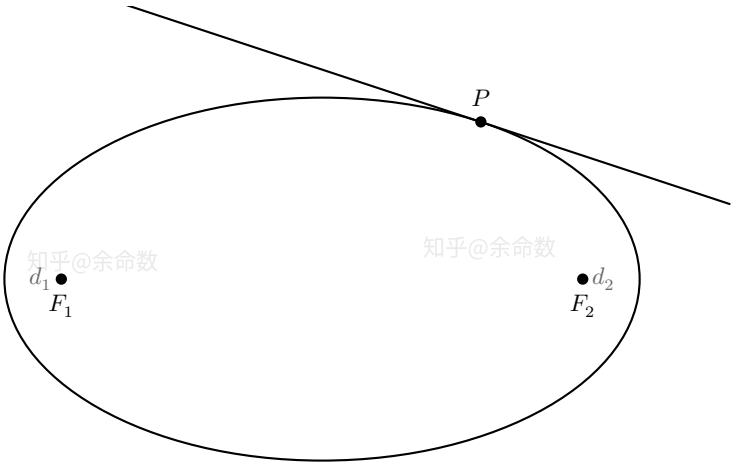


图 3.24　焦点到切线的垂线段

设两焦点到该切线的距离分别为 d_1 和 d_2. 由点到直线的距离公式:

$$d_1=\frac{\left|\frac{\cos\theta}{a}(-c)+\frac{\sin\theta}{b}(0)-1\right|}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}=\frac{\left|-\frac{c\cos\theta}{a}-1\right|}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

$$d_2=\frac{\left|\frac{\cos\theta}{a}(c)+\frac{\sin\theta}{b}(0)-1\right|}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}=\frac{\left|\frac{c\cos\theta}{a}-1\right|}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

下面计算乘积 d_1d_2, 分子分母分别相乘:

$$d_1d_2=\frac{\left|\left(-\frac{c\cos\theta}{a}-1\right)\left(\frac{c\cos\theta}{a}-1\right)\right|}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}=\frac{\left|1-\frac{c^2\cos^2\theta}{a^2}\right|}{\frac{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}$$

分别化简分子和分母. 对于分子:

$$\left|1-\frac{c^2\cos^2\theta}{a^2}\right|=\frac{|a^2-c^2\cos^2\theta|}{a^2}$$

对于分母:

$$\begin{aligned}b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta&=b^2\cos^2\theta+a^2(1-\cos^2\theta)\\&=b^2\cos^2\theta+a^2-a^2\cos^2\theta\\&=a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta\\&=a^2-c^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

把化简后的结果代回原式:

$$d_1d_2=\frac{\frac{|a^2-c^2\cos^2\theta|}{a^2}}{\frac{a^2-c^2\cos^2\theta}{a^2b^2}}=\frac{|a^2-c^2\cos^2\theta|}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}$$

由于 $a>c$ 且 $|\cos\theta|\le1$, 有 $a^2>c^2\ge c^2\cos^2\theta$, 因此 $a^2-c^2\cos^2\theta$ 恒正, 绝对值可以去掉.

$$d_1d_2=\frac{a^2-c^2\cos^2\theta}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=b^2$$

这个常数 b^2 不依赖切点位置, 即不依赖 θ. □

3.3.2.6 椭圆的光学与声学性质

我们来看椭圆在光学与声学中的一个重要反射性质.

定理 3.5 (椭圆的反射性质) 从椭圆一个焦点发出的射线(光线或声波), 经椭圆内壁一次反射后必汇聚于另一焦点.

证明 根据物理学中的反射定律, 入射角等于反射角. 在几何上, 这等价于证明: 在椭圆上任意一点 P 处的切线, 是两条焦半径 F_1P 和 F_2P 所构成的角的外角平分线. 一个更便于向量分析的等价命题是: **该点处的法线是 $\angle F_1PF_2$ 的内角平分线**.

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 焦点为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$. 取椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

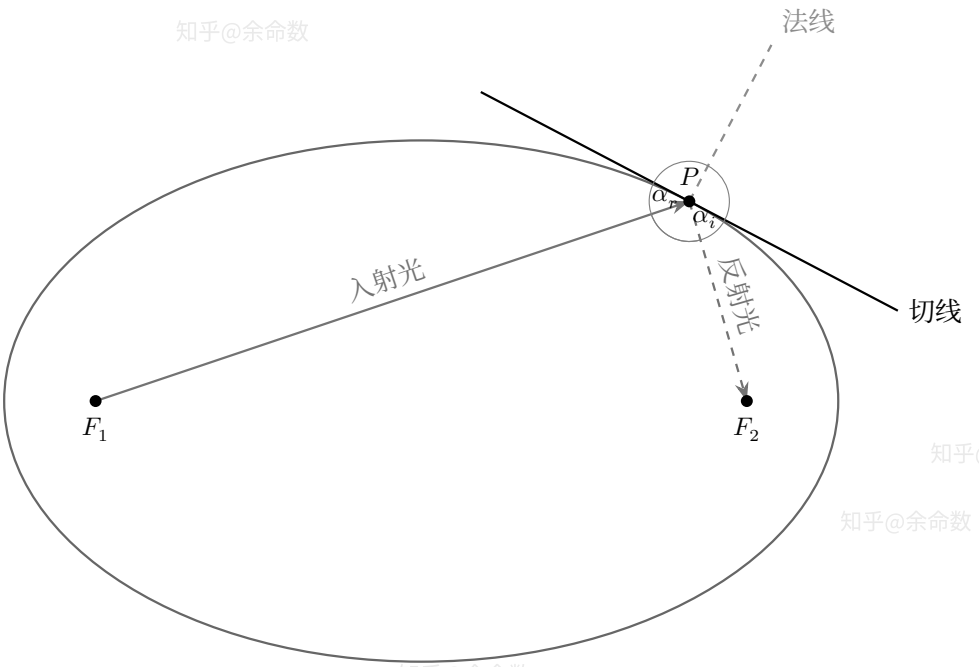


图 3.25　椭圆的反射性质: 入射角 α_i 等于反射角 α_r

要证明法线平分 $\angle F_1PF_2$, 我们用向量法证明法向量与 $\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}$ 的夹角相等. 过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$, 故其一个法向量为 $\vec{n} = (\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})$.

向量 $\overrightarrow{PF_1} = (-c - x_0, -y_0)$ 和 $\overrightarrow{PF_2} = (c - x_0, -y_0)$. 在计算夹角之前, 先证明一个引理.

引理 3.2 (焦半径公式) 对于椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$, 其到两焦点的距离为

$$|PF_1| = a + ex_0, \quad |PF_2| = a - ex_0$$

其中 $e = \frac{c}{a}$ 是离心率.

证明 直接计算 $|PF_2|^2$, 得

$$\begin{aligned}
|PF_2|^2 &= (x_0 - c)^2 + y_0^2 = x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) \\
&= x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2} \\
&= x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + (a^2 - c^2) - \frac{(a^2 - c^2)x_0^2}{a^2} \quad (\text{代入} b^2 = a^2 - c^2) \\
&= a^2 - 2cx_0 + x_0^2\frac{c^2}{a^2} = a^2 - 2a\left(\frac{c}{a}\right)x_0 + \left(\frac{c}{a}x_0\right)^2 \\
&= (a - ex_0)^2.
\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由于 P 在椭圆上, $|x_0| \le a$ 且 $0 < e < 1$, 故 $a - ex_0 > 0$, 因此 $|PF_2| = a - ex_0$. 由椭圆定义 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 得 $|PF_1| = 2a - (a - ex_0) = a + ex_0$. □

下面计算法向量 $\vec{n}$ 与焦半径向量 $\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF_2}$ 的夹角余弦.

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1 = \cos(\vec{n}, \overrightarrow{PF_1}) &= \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_1}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PF_1}|} = \frac{(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})\cdot(-c-x_0, -y_0)}{|\vec{n}||PF_1|} \\ &= \frac{-\frac{cx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}{|\vec{n}|(a+ex_0)} = \frac{-\frac{c}{a}\frac{x_0}{a} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)}{|\vec{n}|(a+ex_0)} \\ &= \frac{-e\frac{x_0}{a} - 1}{|\vec{n}|(a+ex_0)} = -\frac{1}{a|\vec{n}|}\frac{ex_0+a}{a+ex_0} = -\frac{1}{a|\vec{n}|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha_2 = \cos(\vec{n}, \overrightarrow{PF_2}) &= \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PF_2}|} = \frac{(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2})\cdot(c-x_0, -y_0)}{|\vec{n}||PF_2|} \\ &= \frac{\frac{cx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}{|\vec{n}|(a-ex_0)} = \frac{e\frac{x_0}{a} - 1}{|\vec{n}|(a-ex_0)} \\ &= \frac{1}{a|\vec{n}|}\frac{ex_0-a}{a-ex_0} = -\frac{1}{a|\vec{n}|}\end{aligned}$$

由 $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ 且两向量夹角都在 $[0, \pi]$, 得 $\alpha_1 = \alpha_2$. 故法线平分 $\angle F_1PF_2$. 由反射定律, 从 F_1 发出并经 P 反射的光线与 $\overrightarrow{PF_2}$ 共线, 即朝向另一焦点 F_2. □

证明 (平面几何法) 我们对椭圆上任意点 P, 证明两条焦半径 F_1P, F_2P 与切线所成角相等.

设 l 为椭圆在 P 处的切线. 由凸性, l 与椭圆只交于 P, 且整个椭圆位于 l 一侧. 延长 F_1P 至 G, 使 $|PG| = |PF_2|$.

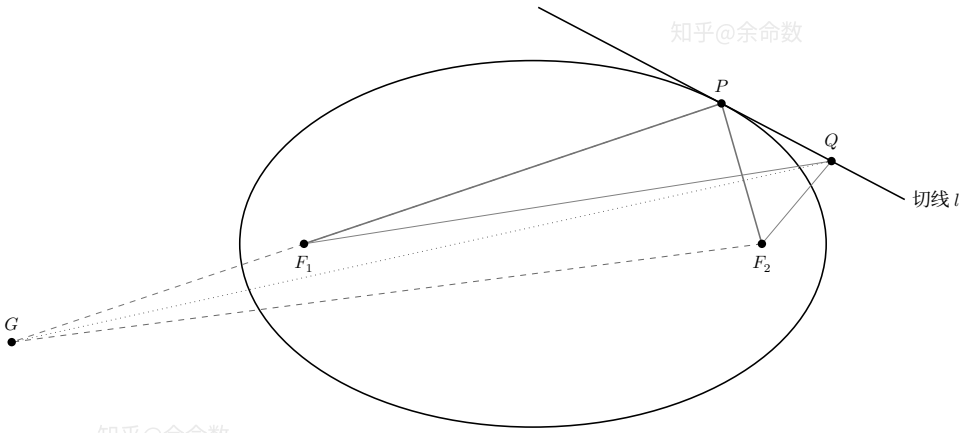


图 3.26 椭圆反射性质的几何证明

由椭圆定义, $|F_1P| + |PF_2| = 2a$. 结合构造得 $|F_1G| = |F_1P| + |PG| = 2a$, 故 G 落在以 F_1 为圆心、半径 $2a$ 的圆上.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

考察 $\triangle F_2PG$. 由于 $|PG|=|PF_2|$, 这是以 P 为顶点的等腰三角形.

下面证明切线 l 平分外角 $\angle F_2PG$. 在等腰三角形 $\triangle F_2PG$ 中, 顶点角 $\angle F_2PG$ 的平分线必是底边 F_2G 的垂直平分线. 因此, 任务转化为证明: **切线 l 是线段 F_2G 的垂直平分线**.

用反证法. 假设切线 l 不是 F_2G 的垂直平分线. 设 l' 是 F_2G 的垂直平分线. 由于 $\triangle F_2PG$ 是等腰三角形, l' 必过顶点 P.

取 l' 上异于 P 的任意一点 Q. 由于 l' 是 F_2G 的中垂线, 有 $|QF_2|=|QG|$. 计算点 Q 的焦半径之和, 得

$$|QF_1|+|QF_2|=|QF_1|+|QG|$$

在 $\triangle QF_1G$ 中, 由三角形两边之和大于第三边, 有

$$|QF_1|+|QG|>|F_1G|$$

而已知 $|F_1G|=2a$, 故

$$|QF_1|+|QF_2|>2a$$

这个不等式表明, 直线 l' 上除 P 外的任一点 Q 都在椭圆外部. 根据切线定义, l' 就是椭圆在点 P 处的切线. 因此, $l'=l$.

已证明椭圆在点 P 处的切线 l 就是 F_2G 的垂直平分线. l 是 F_2G 的中垂线, 其上任意一点到 F_2,G 的距离相等, 故 $\angle F_2Pl=\angle GPl$. 由于 $\angle GPl$ 与 $\angle F_1Pl'$, 其中 l' 是 l 的反向延长线是对顶角, 它们相等. 因此 $\angle F_2Pl=\angle F_1Pl'$, 即入射光线 F_1P 的延长线与反射光线 PF_2 关于法线对称. 故从 F_1 出发的光线经反射后必经过 F_2. □

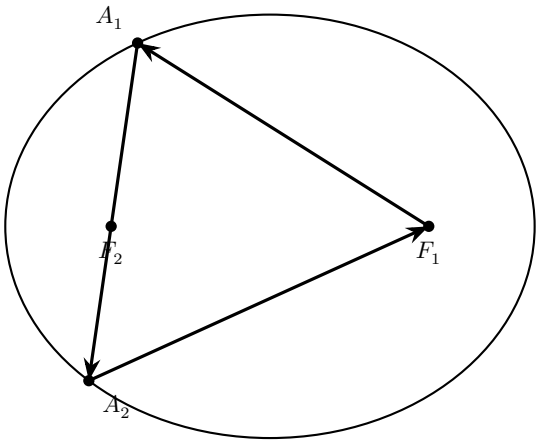
例题 3.43 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 中的两焦点 $F_1(3,0),F_2(-3,0)$, 由点 F_1 射出一光线至椭圆上一点 A_1, 经反射后经过另一焦点 F_2 后至椭圆上另一点 A_2, 再反射回到焦点 F_1, 则所经过的路径长度为何?

解 由椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 读出 $a^2=25,b^2=16$, 故 $a=5$(焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$, 与题设焦点一致). 光线路径分为三段: $F_1\to A_1$, 反射后经 F_2 到 A_2, 再反射回 F_1. 椭圆反射性质保证 A_1 处反射线过 F_2, 因而 A_1,F_2,A_2 共线, $|A_1A_2|=|A_1F_2|+|F_2A_2|$.

总路径长

$$L=|F_1A_1|+|A_1A_2|+|A_2F_1|=|F_1A_1|+(|A_1F_2|+|F_2A_2|)+|A_2F_1|=(|F_1A_1|+|A_1F_2|)+(|F_2A_2|+|A_2F_1|).$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

图 3.27 光线在椭圆内的反射路径

由椭圆定义, 椭圆上任一点到两焦点距离之和为 $2a$, 故

$$|F_1A_1|+|A_1F_2|=2a,\qquad |F_2A_2|+|A_2F_1|=2a,$$

从而 $L=4a$. 代入 $a=5$ 得 $L=20$, 与反射点具体位置无关.

3.3.2.7 椭圆的导演圆

椭圆反射性质说明了焦点与单一切线的联系. 从同一点出发的两条切线具有确定的几何关系, 它由蒙日研究后得到的一个轨迹刻画, 称为**导演圆**(或**蒙日圆**).

定理 3.6 (椭圆的导演圆) 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相切的两条互相垂直的切线交点的轨迹是一个与椭圆同中心的圆, 方程为

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

证明 下面用关于切线斜率的二次方程和韦达定理来证明.

设 $P(x_0,y_0)$ 是轨迹上任意一点. 从 P 可引两条椭圆的切线, 其中一条设为

$$y-y_0=m(x-x_0)\quad 即\quad y=mx+(y_0-mx_0)$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

先建立直线 $y=mx+k$ 与椭圆相切的条件. 将直线方程代入椭圆方程并整理成关于 x 的二次方程:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+k)^2}{b^2}=1 \implies (b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mkx+a^2(k^2-b^2)=0$$

直线与椭圆相切, 即此二次方程有唯一解, 亦即其判别式为零:

$$(2a^2mk)^2-4(b^2+a^2m^2)a^2(k^2-b^2)=0$$

化简得 $a^2m^2k^2-(b^2+a^2m^2)(k^2-b^2)=0$, 最终得到切线条件:

$$k^2=a^2m^2+b^2$$

对过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线 $y=mx+(y_0-mx_0)$, 截距 $k=y_0-mx_0$, 代入切线条件:

知乎@余命数

$$(y_0-mx_0)^2=a^2m^2+b^2$$

展开并整理为关于斜率 m 的二次方程:

$$y_0^2-2mx_0y_0+m^2x_0^2=a^2m^2+b^2$$

$$(x_0^2-a^2)m^2-(2x_0y_0)m+(y_0^2-b^2)=0$$

当 $x_0^2\neq a^2$ 时, 该方程的两个根 m_1,m_2 正是从 P 引出的两条非竖直切线的斜率.

若两条切线互相垂直, 则 $m_1m_2=-1$. 由韦达定理,

$$m_1m_2=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}.$$

因此

$$\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}=-1$$

$$y_0^2-b^2=-(x_0^2-a^2)=-x_0^2+a^2$$

整理得到

$$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2.$$

反过来, 若 $P(x_0,y_0)$ 满足 $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$ 且 $x_0^2\neq a^2$, 则该二次方程的两根满足

$$m_1m_2=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2-a^2}=-1,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故对应的两条切线互相垂直. 同时, 该点在椭圆外部, 从一点到椭圆可作两条实切线, 因而这两个斜率给出所需切线.

最后考虑竖直切线的特殊情形. 椭圆的竖直切线为 $x = \pm a$, 水平切线为 $y = \pm b$, 它们互相垂直, 交点为 $(\pm a, \pm b)$, 也满足 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. 反之, 圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 上若 $x_0^2 = a^2$, 则必有 $y_0^2 = b^2$, 正是这些特殊交点.

因此所求交点的轨迹恰为以原点为中心、半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的圆. □

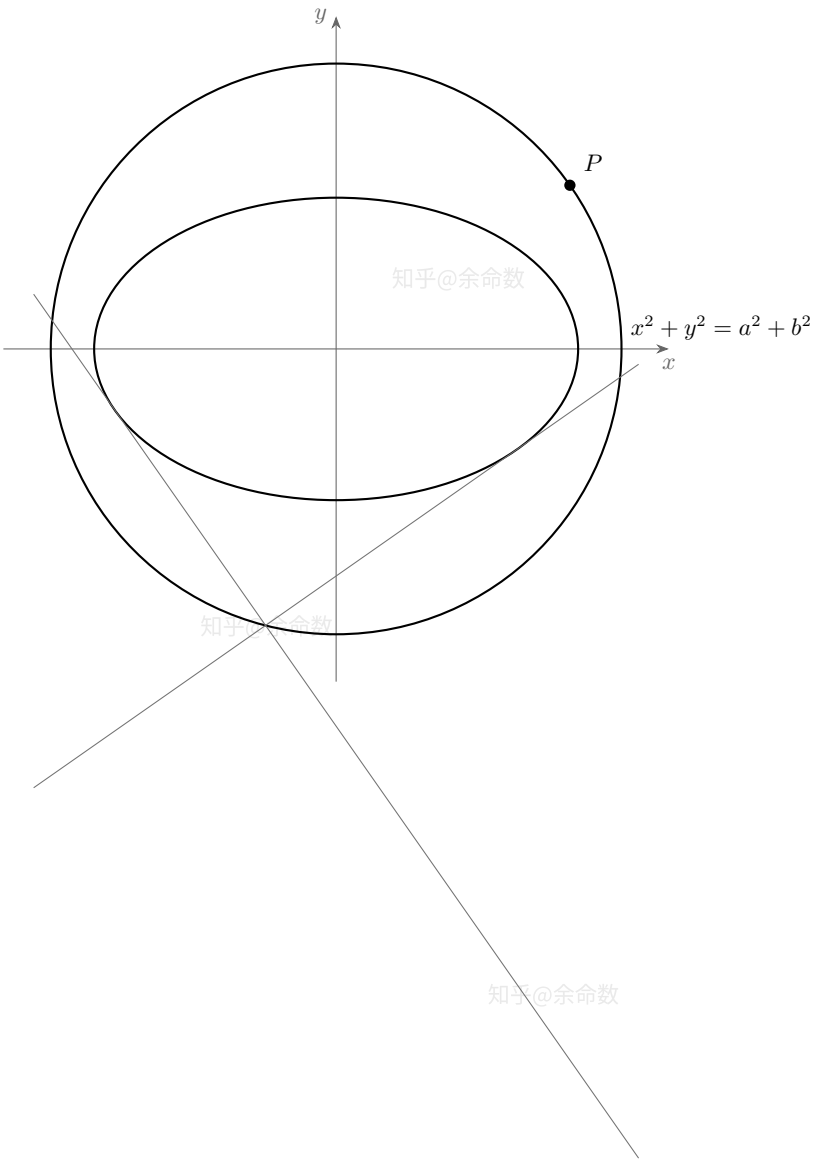


图 3.28 椭圆及其导演圆

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.3.2.8 离心率

椭圆的三个基本几何量为 a, b, c. 椭圆可以接近圆形, 也可以极为扁长, 这提示有一个量在决定它的形状. 我们需要一个与尺寸无关、只描述形状的参数.

椭圆由焦点间距 $2c$ 与距离之和 $2a$ 决定; b 只是由 $b^2 = a^2 - c^2$ 派生. 因此, 椭圆形状蕴含在 a 与 c 的相对关系中. 一个消除尺寸影响的自然度量就是比值 c/a, 这就是离心率.

定义 3.6 (离心率) 椭圆的半焦距 c 与半长轴长 a 的比值称为椭圆的**离心率**, 记作 e.

$$e = \frac{c}{a}$$

离心率字面含义是偏离中心. 这个比值量化了焦点偏离中心的程度, 且相对于椭圆整体尺寸 a.

下面用极限情况说明其几何含义:

- **当 $e \to 0$ 时**: 即 $c \to 0$. 从几何上看, 两个焦点 F_1, F_2 不断靠近, 最终在中心 O 处重合. 此时, 椭圆的定义 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 就退化为 $|PO| + |PO| = 2a$, 即 $|PO| = a$. 这正是半径为 a 的圆的定义. 在代数上, $c \to 0$ 意味着 $b^2 = a^2 - c^2 \to a^2$, 即 $b \to a$, 椭圆的长短轴相等. 因此, **圆可视为离心率为 0 的特殊椭圆**.
- **当 $e \to 1$ 时**: 即 $c \to a$. 此时 $b^2 = a^2 - c^2 \to 0$, 即 $b \to 0$. 椭圆的短轴长度趋近于零, 整个图形在竖直方向上被压扁, 极限情况下退化为连接两个焦点(此时也与顶点重合)的**线段**. 离心率越接近 1, 椭圆就越扁长.

因此, 离心率 e ($0 \le e < 1$) 度量了椭圆从圆 ($e = 0$) 到线段 ($e \to 1$) 的形态变化.

离心率还有更统一的表述.

定理 3.7 (圆锥曲线的统一焦点-准线定义) 平面内到一个定点 F 的距离与到一条定直线 l 的距离之比为正常数 e 的点的轨迹是一条圆锥曲线, F 称为焦点, l 称为准线(F 不在 l 上), 这个常数 e 就是离心率.

- 当 $0 < e < 1$ 时, 轨迹是**椭圆**.
- 当 $e = 1$ 时, 轨迹是**抛物线**.
- 当 $e > 1$ 时, 轨迹是**双曲线**.

证明 通过平移和旋转坐标轴, 不妨设焦点为 $F(0, 0)$, 准线为 $x = d$ ($d > 0$). 对任意点 $P(x, y)$, 到焦点距离为 $\sqrt{x^2 + y^2}$, 到准线距离为 $|x - d|$. 条件 $|PF| = e\,\mathrm{dist}(P, l)$ 等价于

$$x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

展开得

$$(1-e^2)x^2+y^2+2e^2dx-e^2d^2=0. \tag{*}$$

当 $0<e<1$ 时, 配方得

$$\frac{\left(x+\frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{1-e^2}}=1,$$

这是椭圆的标准形式. 当 $e=1$ 时, 式 (*) 化为

$$y^2=-2d\left(x-\frac{d}{2}\right),$$

这是抛物线的标准形式. 当 $e>1$ 时, 配方得

$$\frac{\left(x-\frac{e^2d}{e^2-1}\right)^2}{\frac{e^2d^2}{(e^2-1)^2}}-\frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{e^2-1}}=1,$$

这是双曲线的标准形式. 因此, 焦点-准线距离比为正常数 e 的轨迹按 e 的取值分别为椭圆、抛物线和双曲线. □

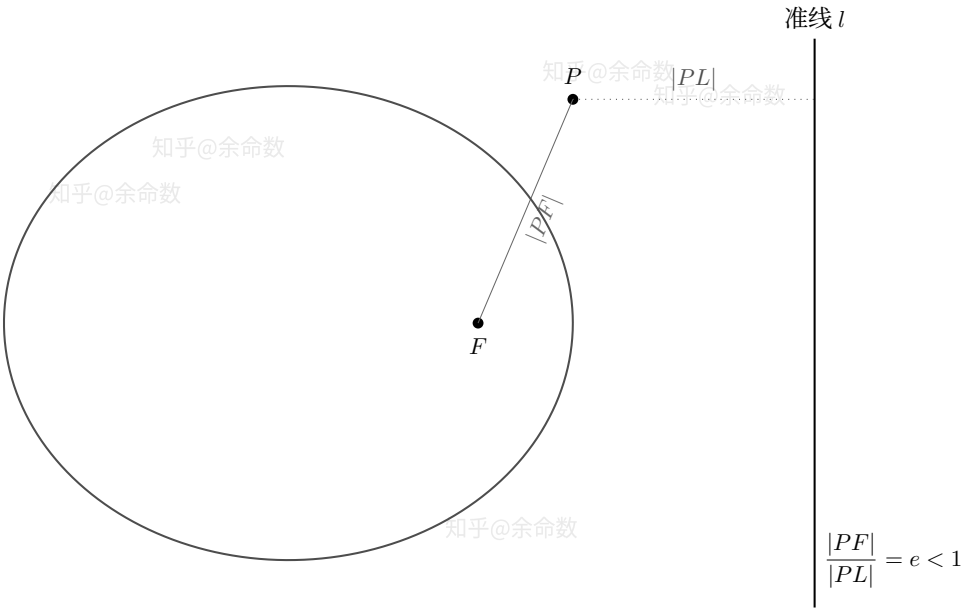


图 3.29 椭圆的焦点-准线定义

可以证明, 对椭圆, 统一定义中的常数 e 与前面定义的 $\frac{c}{a}$ 相同. 准线位置为 $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{a}{e}$. 统一定义表明, 椭圆、抛物线和双曲线是同一个几何法则 $|PF|=e|PL|$ 在参数 e 取不同值时的表现.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.44　求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的离心率.

解 先给定方程化为标准形式. 将方程 $16x^2+25y^2=400$ 两边同除以 400, 得到

$$\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=1$$

化简得

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

这是焦点在 x 轴上的椭圆标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 比较系数得 $a^2=25, b^2=16$, 故 $a=5, b=4$.

离心率 $e=\frac{c}{a}$, 其中 c 为半焦距.a,b,c 满足 $a^2=b^2+c^2$. 因此

$$c^2=a^2-b^2=25-16=9 \implies c=3$$

于是离心率为

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$$

例题 3.45　已知椭圆的两个焦点与短轴的一个顶点构成一个顶角为 120° 的等腰三角形, 求该椭圆的离心率.

解 我们把角度条件转化为关于 a,b,c 的代数关系. 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 其焦点为 $F_1(-c,0), F_2(c,0)$, 短轴顶点为 $B(0,b)$.

由题意, $\triangle F_1BF_2$ 是以 B 为顶点的等腰三角形, 顶角 $\angle F_1BF_2=120^\circ$. y 轴, 即直线 OB 是该等腰三角形的对称轴, 故平分顶角.

$$\angle F_2BO=\frac{1}{2}\angle F_1BF_2=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$$

考察直角三角形 $\triangle F_2OB$, 有

$$\tan(\angle F_2BO)=\frac{|OF_2|}{|OB|}=\frac{c}{b}$$

代入角度值, 得 b,c 的关系:

$$\tan(60^\circ)=\frac{c}{b} \implies \sqrt{3}=\frac{c}{b} \implies c=\sqrt{3}b$$

为求离心率 $e=\frac{c}{a}$, 引入 a. 由 $a^2=b^2+c^2$ 得

$$a^2=b^2+(\sqrt{3}b)^2=b^2+3b^2=4b^2$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由此可得 $a=2b$. 又把 $b=c/\sqrt{3}$ 代入 $a=2b$, 得 $a=2c/\sqrt{3}$. 整理得 c 与 a 的比值:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此, 该椭圆的离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例题 3.46 设 P 为椭圆上任意一点, F_1,F_2 为其两焦点. 若角 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 90°, 求该椭圆的离心率.

解 我们需先确定 $\angle F_1PF_2$ 取最大值的条件, 再由此建立方程.

对椭圆上任意点 P, 焦半径 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 固定, 底边 $|F_1F_2|=2c$ 也固定. 设 $r_1=|PF_1|, r_2=|PF_2|, \angle F_1PF_2=\theta$. 由余弦定理,

$$(2c)^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=(r_1+r_2)^2-2r_1r_2(1+\cos\theta).$$

又 $r_1+r_2=2a$, 故

$$\cos\theta=\frac{2b^2}{r_1r_2}-1.$$

要使 θ 最大, 即使 $\cos\theta$ 最小, 需使 r_1r_2 最大. 在 $r_1+r_2=2a$ 固定时, 由均值不等式 $r_1r_2\le a^2$, 等号当且仅当 $r_1=r_2=a$, 即 P 为短轴顶点.

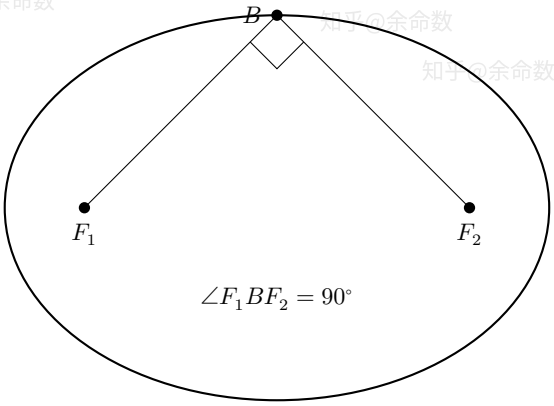


图 3.30 角 $\angle F_1PF_2$ 在短轴顶点处取得最大值

当 P 位于短轴顶点, 例如 $B(0,b)$ 时, $\triangle F_1BF_2$ 是等腰三角形. 由题意, 该角最大值为 90°, 即 $P=B(0,b)$ 时 $\triangle F_1BF_2$ 为等腰直角三角形.

该三角形腰长 $|BF_1|=|BF_2|=a$ (由对称性及 $a^2=b^2+c^2$ 可得). 斜边 $|F_1F_2|=2c$.

由勾股定理,

$$|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将 a 和 c 代入, 得

$$a^2 + a^2 = (2c)^2$$

$$2a^2 = 4c^2$$

整理得离心率 e:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

因此, 离心率 $e = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例题 3.47　一根长度为 L 的刚性细杆 AB, 其两端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动. 点 P 是杆上的一点, 满足 $|PA| = l_2$ 且 $|PB| = l_1$, 其中 $l_1 + l_2 = L$. 求点 P 的轨迹方程, 并确定该轨迹的离心率.

解　我们用参数方程描述这个轨迹的生成过程.

建立坐标系. 设杆 AB 与 x 轴正向夹角为 θ, 则端点 A 在 x 轴上, B 在 y 轴上.

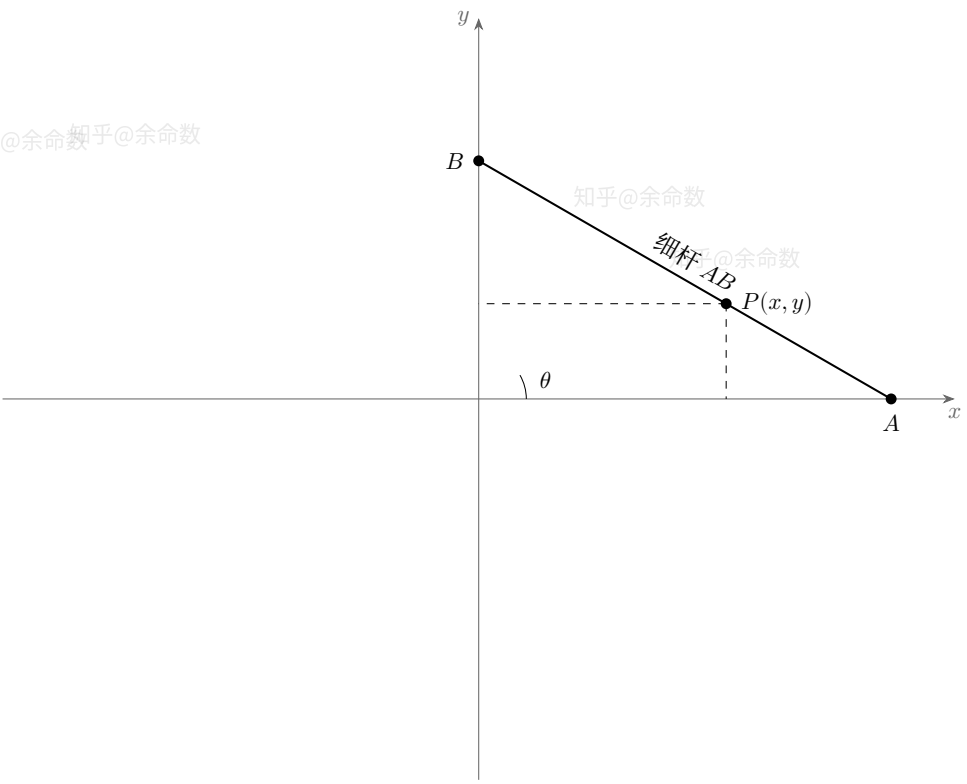


图 3.31　细杆滑动构造椭圆

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

过 P 作 x 轴的垂线,垂足为 M;作 y 轴的垂线,垂足为 N. 在直角三角形 APM 中,$\angle PAM=\theta$,故

$$y=|PM|=|PA|\sin\theta=l_2\sin\theta$$

在直角三角形 BPN 中,$\angle PBN=\angle OAB=\theta$,故

$$x=|PN|=|PB|\cos\theta=l_1\cos\theta$$

得点 P 轨迹的参数方程:

$$\begin{cases}x=l_1\cos\theta\\ y=l_2\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\text{为参数})$$

这是椭圆参数方程. 为得到笛卡尔方程,消去 θ.

$$\frac{x}{l_1}=\cos\theta,\quad \frac{y}{l_2}=\sin\theta$$

由 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,得

$$\left(\frac{x}{l_1}\right)^2+\left(\frac{y}{l_2}\right)^2=1$$

$$\frac{x^2}{l_1^2}+\frac{y^2}{l_2^2}=1$$

此即点 P 的轨迹方程,是中心在原点的椭圆.

其离心率取决于 l_1 和 l_2 的相对大小,分两种情况.

- **若** $l_1>l_2$:此时半长轴 $a=l_1$,半短轴 $b=l_2$. 半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{l_1^2-l_2^2}$. 离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{l_1^2-l_2^2}}{l_1}$.
- **若** $l_2>l_1$:此时半长轴 $a=l_2$(在 y 轴上),半短轴 $b=l_1$. 半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{l_2^2-l_1^2}$. 离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{l_2^2-l_1^2}}{l_2}$.
- **若** $l_1=l_2$:轨迹退化为圆 $\frac{x^2+y^2}{l_1^2}=1$,可视作离心率 $e=0$ 的特殊椭圆.

因此,离心率取决于点 P 在杆上的相对位置.

例题 3.48 设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴辅助圆为 $C:x^2+y^2=a^2$. 过椭圆上满足横坐标非零的上半部点 P 作其切线 l_P. 过 P 点的竖直线与辅助圆 C 交于点 Q(设 Q 在 x 轴上方). 过 Q 作圆 C 的切线 l_Q.

1. 证明:两条切线 l_P 和 l_Q 相交于 x 轴上同一点.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

2. 若由两条切线 l_P, l_Q 以及 y 轴所围成的三角形面积的**最小值**等于 ab, 求椭圆 E 的离心率 e.

解 (1) 我们用参数方程描述点的位置, 以简化切线方程. 设椭圆上点 P 的离心角为 $t \in (0, \pi)$, 则 $P(a\cos t, b\sin t)$. 当 $\cos t = 0$ 时, 两条切线均平行于 x 轴, 不与 x 轴相交; 下面先讨论 $\cos t \neq 0$ 的一般情形. 由离心角的几何意义, 辅助圆上对应点 Q 的坐标为 $Q(a\cos t, a\sin t)$.

过点 P 的椭圆切线 l_P 方程为

$$\frac{x\cos t}{a} + \frac{y\sin t}{b} = 1$$

过点 Q 的圆 C 的切线 l_Q 方程为(用圆的切线公式 $xx_0 + yy_0 = R^2$):

$$x(a\cos t) + y(a\sin t) = a^2 \implies x\cos t + y\sin t = a$$

为找两切线的交点, 令 $y = 0$, 分别求它们在 x 轴上的截距. 对于 l_P: $\frac{x\cos t}{a} = 1 \implies x = \frac{a}{\cos t}$. 对于 l_Q: $x\cos t = a \implies x = \frac{a}{\cos t}$. 由于两条切线在 x 轴上的截距完全相同, 它们必然相交于 x 轴上的同一点, 记为 $T(\frac{a}{\cos t}, 0)$. 若 $\cos t = 0$, 则两条切线分别为 $y = b$ 与 $y = a$, 它们互相平行, 不构成有限三角形; 因此第 (2) 问的面积最值只需在 $\cos t \neq 0$ 时讨论.

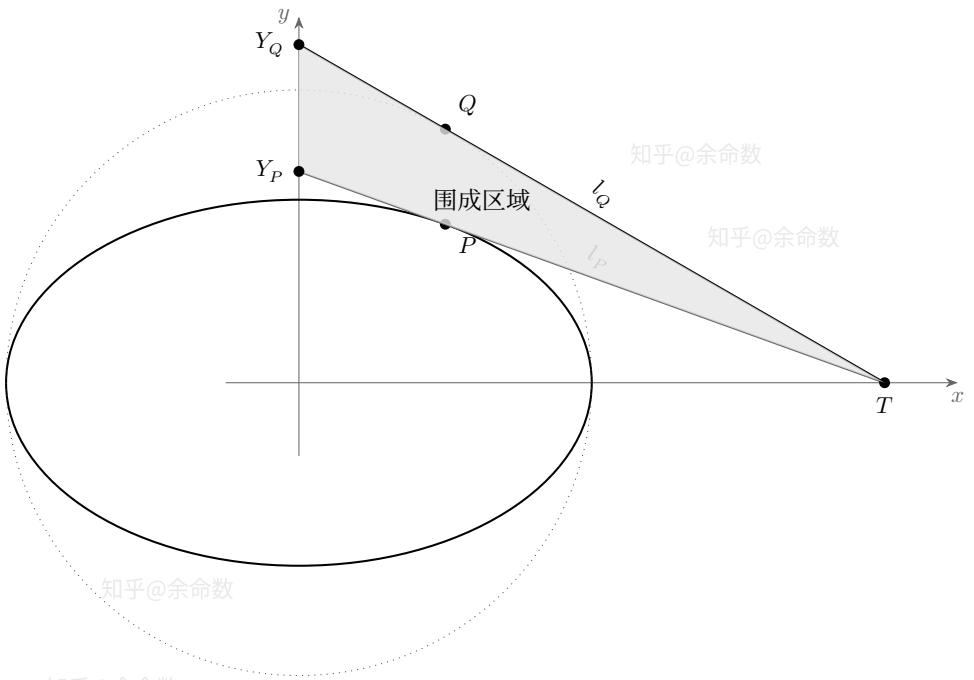


图 3.32　两切线与 y 轴围成的三角形

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(2) 所述三角形由两条切线与 y 轴围成, 其三个顶点为两条切线在 y 轴上的截距点及 x 轴上的公共交点 T. 先求两条切线在 y 轴上的截距. 对于 l_P, 令 $x=0$, 得 $\frac{y\sin t}{b}=1 \implies y=\frac{b}{\sin t}$. 对于 l_Q, 令 $x=0$, 得 $y\sin t=a \implies y=\frac{a}{\sin t}$.

该区域是以 y 轴上一段线段为底、顶点为 T 的三角形. 其底边长为 $\left|\frac{a}{\sin t}-\frac{b}{\sin t}\right|=\frac{a-b}{\sin t}$ (由 $t\in(0,\pi)$ 知 $\sin t>0$, 且 $a>b$). 其高为点 T 到 y 轴的距离, 即 T 点横坐标的绝对值 $|\frac{a}{\cos t}|$.

三角形面积 $S(t)$ 为

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2}\cdot \text{底}\cdot \text{高} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{\sin t}\cdot\left|\frac{a}{\cos t}\right| \\ &= \frac{a(a-b)}{|2\sin t\cos t|} \\ &= \frac{a(a-b)}{|\sin(2t)|}. \end{aligned}$$

下面求 $S(t)$ 的最小值. 分母 $|\sin(2t)|$ 的最大值为 1, 在 $2t=\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 即 $t=\pi/4$ 或 $3\pi/4$ 时取得, 此时 $S(t)$ 取最小值.

$$S_{\min}=\frac{a(a-b)}{1}=a(a-b)$$

由题设, 该最小值等于 ab.

$$a(a-b)=ab$$

由于 $a\neq 0$, 两边同除以 a, 得

$$a-b=b \implies a=2b$$

这个关系确定了椭圆的形状. 接着计算离心率:

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{(2b)^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

故椭圆 E 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例题 3.49 以正方形 $ABCD$ 的相对顶点 A,C 为焦点的椭圆, 恰过正方形四边的中点, 则椭圆的离心率为(　).

解 我们用正方形的几何对称性与椭圆焦点定义来建立坐标系.

以正方形中心为原点, 焦点所在对角线 AC 为 x 轴建立平面直角坐标系. 设椭圆的半焦距为 c, 则焦点坐标为 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$. 这两个焦点也即是正方形

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

的顶点 A 和 C. AC 是正方形的对角线, 长度为 $2c$, 中心在原点, 故另两顶点 B, D 的坐标为 $(0, c), (0, -c)$.

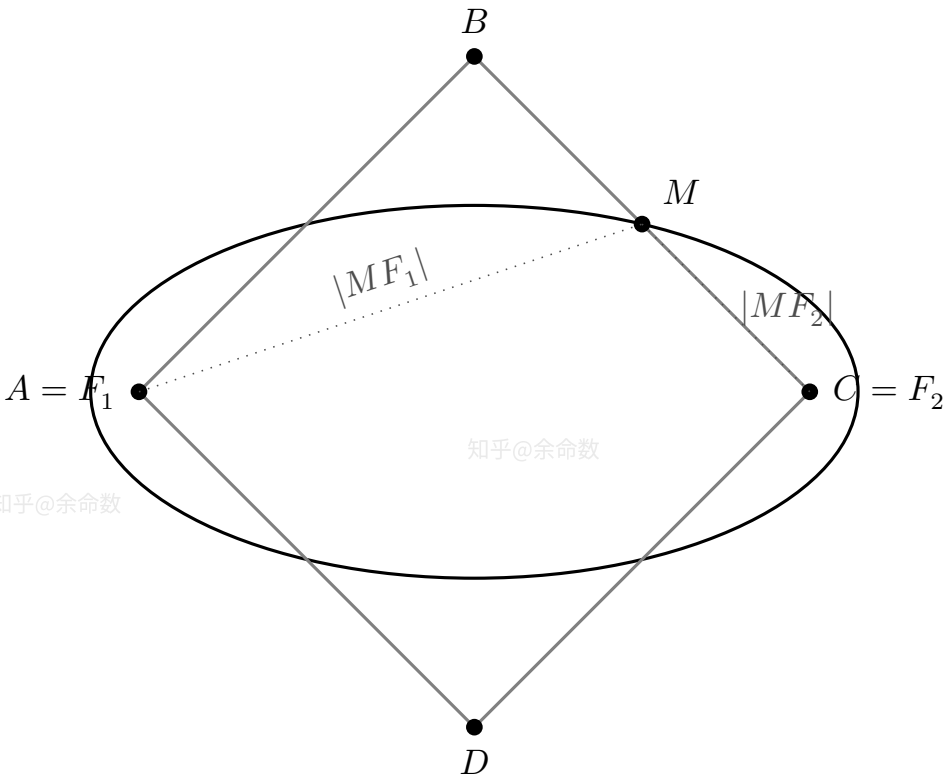


图 3.33　椭圆与内切正方形

椭圆经过正方形四边的中点. 取边 BC 的中点 M 来分析. 其坐标为 $M\left(\frac{c+0}{2}, \frac{0+c}{2}\right) = \left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

由椭圆定义, 点 M 到两焦点的距离之和等于 $2a$:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

分别计算这两个焦半径, 得

$$\begin{aligned} |MF_1| &= \sqrt{\left(\frac{c}{2} - (-c)\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9c^2}{4} + \frac{c^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{10}c}{2}. \end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$\begin{aligned}|MF_2| &= \sqrt{\left(\frac{c}{2}-c\right)^2+\left(\frac{c}{2}-0\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{2}c}{2}.\end{aligned}$$

将这些距离代入定义式:

$$\begin{aligned}2a &= \frac{\sqrt{10}c}{2}+\frac{\sqrt{2}c}{2}\\ &= \frac{c(\sqrt{10}+\sqrt{2})}{2}.\end{aligned}$$

由此得离心率 e:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{c(\sqrt{10}+\sqrt{2})/4}=\frac{4}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}.$$

为化简,对分母有理化:

$$\begin{aligned}e &= \frac{4(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{(\sqrt{10}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-\sqrt{2})}\\ &= \frac{4(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{10-2}\\ &= \frac{4(\sqrt{10}-\sqrt{2})}{8}\\ &= \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

3.3.3 双曲线

3.3.3.1 双曲线的几何定义

定义 3.7 (双曲线) 平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值等于一个常数(该常数必须小于 $|F_1F_2|$ 且为正)的所有点 P 的轨迹,称为**双曲线**. 定点 F_1, F_2 称为双曲线的**焦点**.

记 $|F_1F_2|=2c\ (c>0)$,距离差的绝对值为 $2a\ (a>0)$,且 $2a<2c$ 即 $a<c$. 令 $b^2=c^2-a^2\ (b>0)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.3.3.2 双曲线的标准方程

取焦点 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, 中心为原点. 由定义 $||PF_1|-|PF_2||=2a$, 经两次平方消根(与椭圆推导平行, 符号在差上), 得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3-17}$$

此为**焦点在 x 轴**的标准方程; 焦点在 y 轴时为 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$.

- **顶点**: $(\pm a,0)$; 实轴长 $2a$, 虚轴长 $2b$.
- **渐近线**: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$(由 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 因式分解).
- **离心率**: $e=\dfrac{c}{a}>1$.
- **准线**: $x=\pm\dfrac{a}{e}=\pm\dfrac{a^2}{c}$; 统一定义 $|PF|=e\cdot$(到准线距离) 对双曲线同样成立.

3.3.3.3 双曲线的参数与切线

右支常用参数: $x=a\sec\theta$, $y=b\tan\theta$; 或双曲函数 $x=a\cosh t$, $y=b\sinh t$. 过点 $P_0(x_0,y_0)$ 在双曲线 (3-17) 上的切线, 由替换法则:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

(与椭圆切线仅差一个符号.)

例题 3.50 (双曲线基本量) 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$. 求 a,b,c,e 与渐近线方程.

解 $a=3$、$b=4$、$c=5$、$e=\dfrac{5}{3}$; 渐近线 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

例题 3.51 (双曲线弦的中点) 直线 $y=x+m$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 交于两点, 若弦中点横坐标为 3, 求 m.

解 联立 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(x+m)^2}{2}=1$, 整理得

$$x^2+4mx+2m^2+4=0.$$

由韦达 $x_1+x_2=-4m$, 故 $x_M=-2m$. 令 $x_M=3$ 得 $m=-\dfrac{3}{2}$. 此时 $\Delta=16m^2-4(2m^2+4)=8m^2-16=8\cdot\dfrac{9}{4}-16=2>0$, 实交点存在.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

注 3.2 (与椭圆的对照)
椭圆 $a^2=b^2+c^2, e<1$; 双曲线 $c^2=a^2+b^2, e>1$. 点差法中椭圆为 $\frac{x_M}{a^2}+k\frac{y_M}{b^2}=0$, 双曲线为 $\frac{x_M}{a^2}-k\frac{y_M}{b^2}=0$. 设点/设线的操作框架对二者通用.

知乎@余命数

3.3.4 抛物线

3.3.4.1 抛物线的几何定义

定义 3.8 (抛物线) 平面内到一个定点 F 的距离等于到一条定直线 l 的距离的所有点 P 的轨迹, 称为**抛物线**, F 称为焦点, l 称为准线(F 不在 l 上).

知乎@余命数

这一定义恰是圆锥曲线统一定义中 $e=1$ 的情形.

3.3.4.2 抛物线的标准方程

取焦点 $F(\frac{p}{2},0)$ $(p>0)$, 准线 $x=-\frac{p}{2}$, 顶点在原点, 得

$$y^2=2px \quad (\text{亦常写 } y^2=4ax, \text{此时焦参数 } 2a=p). \tag{3-18}$$

开口向上为 $x^2=2py$; 开口向左/下则 p 取负或改写坐标.

- **焦点**: $(\frac{p}{2},0)$; **准线**: $x=-\frac{p}{2}$.
- **通径**: 过焦点且垂直于轴的弦, 长为 $2p$.
- **焦半径**: 对 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线上, $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$.
- **离心率**: $e=1$.

知乎@余命数

3.3.4.3 参数方程与切线

常用参数: $y^2=2px$ 上点 $(\frac{p}{2}t^2,\ pt)$; 或 $y^2=4ax$ 上 $(at^2,2at)$. 过 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线: $yy_0=p(x+x_0)$(对 $y^2=2px$).

例题 3.52 (抛物线焦点弦) 抛物线 $y^2=4x$, 即 $p=2$ 过焦点的弦 AB 斜率为 k $(k\neq 0)$. 求弦长 $|AB|$ 关于 k 的表达式.

解 焦点 $F(1,0)$, 直线 $y=k(x-1)$. 联立 $y^2=4x$:

$$k^2(x-1)^2=4x.$$

展开 $(k^2)x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$. 设根 x_1,x_2,

$$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2},\quad x_1x_2=1.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

弦长

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{|k^2|},$$

知乎@余命数

其中 $\Delta = (2k^2+4)^2 - 4k^2\cdot k^2 = 16k^2+16 = 16(k^2+1)$, 故

知乎@余命数

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{k^2+1}}{k^2} = \frac{4(1+k^2)}{k^2}.$$

例题 3.53 (抛物线平行弦中点) 求抛物线 $y^2 = 2px$ 上一族斜率为 k ($k \neq 0$) 的平行弦的中点轨迹.

解 由点差法, 中点满足 $y_M = \dfrac{p}{k}$ 且 $x_M > \dfrac{p}{2k^2}$, 即水平射线. 椭圆与双曲线的平行弦中点落在共轭直径方向上; 抛物线无中心, 其平行弦中点轨迹是平行于轴的射线.

知乎@余命数

注 3.3 (三类曲线对照)

	椭圆	抛物线	双曲线
e	$0 \le e < 1$	$e = 1$	$e > 1$
定义	$\lvert PF_1\rvert + \lvert PF_2\rvert = 2a$	$\lvert PF\rvert = \operatorname{dist}(P, l)$	$\big\lvert\lvert PF_1\rvert - \lvert PF_2\rvert\big\rvert = 2a$
标准形	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y^2 = 2px$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

统一定义 $|PF| = e\cdot$(到准线距离) 把三者串在同一参数 e 上(椭圆段已述).

3.3.5 圆锥曲线的代数方法

3.3.5.1 从直线与圆锥曲线的位置关系谈起

前面几节已经建立了椭圆、双曲线和抛物线的标准方程与基本性质. 下面用代数工具研究直线与圆锥曲线的关系, 把相交、相切、弦长、中点等几何概念翻译成代数语言.

研究直线与圆锥曲线的位置关系, 第一步是求解由它们方程组成的方程组.

设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$, 圆锥曲线 $\mathcal{C}$ 的方程为 $f(x,y)=0$. 联立方程组.

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

知乎@余命数

通过消元, 例如把 $y=kx+m$ 代入 $f(x,y)=0$, 通常得到一个关于 x 或 y 的一元二次方程.

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这个一元二次方程联系了几何与代数, 其性质直接反映直线与曲线的几何关系.

3.3.5.1.1 判别式与交点个数 一元二次方程实数根的个数决定直线与圆锥曲线的交点个数. 判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的符号直接给出位置关系.

- $\Delta > 0 \iff$ 方程有两个不等实根 $\iff$ 直线与曲线**相交**于两点.
- $\Delta = 0 \iff$ 方程有两个相等实根 $\iff$ 直线与曲线**相切**于一点.
- $\Delta < 0 \iff$ 方程无实根 $\iff$ 直线与曲线**相离**, 无公共点.

当直线平行于双曲线的渐近线或抛物线的对称轴时, 联立消元后得到一个一次方程, 此时直线与曲线只有一个交点, 属相交于一点的特殊情形. 因此 $\Delta = 0$ 是相切的充分条件, 但运用时要保证二次项系数不为零.

这个结论展示了解析几何的要旨, 把几何概念转化为可计算的代数结构. 几何图形的相交与代数方程判别式之间的一一对应, 依赖如下逻辑链条:

在笛卡尔坐标系中, 任何几何图形, 如直线、椭圆都是满足某一代数方程的点的集合. 一个**交点**同时位于直线上和圆锥曲线上, 因此其坐标 (x, y) 同时满足直线方程和圆锥曲线方程.

在代数中, 寻找同时满足多个方程的解称为**解方程组**. 因此, 寻找几何交点的问题转化为求解代数方程组的问题; 方程组实数解的组数等于几何图形的交点个数.

为解这个方程组, 通常用**消元法**, 从线性方程表出 $y = kx + m$ 或 $x = my + n$, 代入二次曲线方程. 这个代入过程把二维平面上寻找点 (x, y) 的问题降维为一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的问题, 即寻找满足条件的横坐标 x.

一元二次方程的每个实数根对应一个交点的横坐标. 若方程有两个不等实根 x_1, x_2, 则对应两个不同交点; 若有两个相等实根 x_0, 则对应一个交点; 若没有实根, 则没有交点. 因此, 一元二次方程实数根的个数与几何图形的交点个数一一对应.

于是问题归结为判断一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 实数根的个数, 这正是**判别式** $\Delta = b^2 - 4ac$ 的作用. 由求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 知, Δ 的符号决定 $\sqrt{\Delta}$ 是实数还是虚数, 从而决定实数根的个数.

以上建立了从几何到代数的逻辑通路.

$$\begin{aligned} \text{几何交点个数} &\xrightarrow{\text{坐标化}} \text{方程组实数解的组数} \\ &\xrightarrow{\text{消元}} \text{一元二次方程实数根的个数} \\ &\xrightarrow{\text{判别式}} \Delta \text{ 的符号} \end{aligned}$$

3.3.5.1.2 韦达定理 当 $\Delta \geq 0$ 时, 交点存在. 自然想到直接解出 x_1, x_2 再进行后续计算, 但这条路通常非常繁琐.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

回顾求根公式:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

除非 Δ 为完全平方数, 否则 x_1,x_2 一般是含无理数的复杂表达式, 直接代入后续计算会很繁重.

但这些计算中蕴含规律. 例如计算弦中点横坐标 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 时:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2b}{2a}\right)=-\frac{b}{2a}$$

注意到最棘手的无理部分 $\sqrt{\Delta}$ 在求和过程中抵消了, 结果 $-\frac{b}{2a}$ 只与方程系数 a,b 有关. 这提示我们, 可能不必解出根的具体值, 只需根的整体性质, 如和或积.

韦达定理给出了这个工具,一元二次方程两根的和与积可直接由系数确定,无需开方.

定理 3.8 (韦达定理) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的两根为 x_1,x_2, 则它们满足以下关系.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

证明 因为 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根, 所以二次多项式可分解为

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

展开右式得

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2).$$

比较 x 的系数与常数项, 得

$$b=-a(x_1+x_2),\qquad c=ax_1x_2.$$

由于 $a\neq0$, 两式同除以 a, 即得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

□

韦达定理催生了解析几何中“设而不求”的思想,即设交点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$, 但不求出它们, 而把所有需要的几何量用对称式 x_1+x_2,x_1x_2 表示.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在解析几何中,一元二次方程的系数 a,b,c 由直线参数 k 与曲线参数 a^2,b^2 组合而成,韦达定理串起如下逻辑链:

$$\text{几何要素参数} \xrightarrow{\text{联立}} \text{二次方程系数} \xrightarrow{\text{韦达定理}} \text{交点坐标的整体性质}$$

3.3.5.2 基本几何量的计算

当直线与圆锥曲线交于两点 P_1,P_2 时,线段 P_1P_2 称为弦. 其长度 $|P_1P_2|$ 可用韦达定理计算.

设直线方程为 $y=kx+m$. 由两点间距离公式,

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$$

知乎@余命数

而 $|x_1-x_2|$ 可由韦达定理表示,不必求解根:

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{\Delta}{a^2}$$

因此,$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

定理 3.9 (弦长公式) 若直线 $y=kx+m$ 与圆锥曲线交于两点,且联立消元后得到的关于 x 的一元二次方程为 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0,\Delta>0)$,则弦长为

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \tag{3-19}$$

若直线方程为 $x=my+n$,联立消元后得到关于 y 的方程为 $ay^2+by+c=0$ $(a\neq 0,\Delta>0)$,则弦长为

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+m^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \tag{3-20}$$

证明 先证 $y=kx+m$ 的情形. 设两个交点为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$. 因为两点都在直线 $y=kx+m$ 上,所以

$$y_1-y_2=k(x_1-x_2).$$

由两点间距离公式,

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|.$$

知乎@余命数

另一方面,x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根. 由韦达定理,

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{\Delta}{a^2}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因 $\Delta>0$, 得 $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$, 从而

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

对直线 $x=my+n$ 的情形, 改以 y_1,y_2 为两个实根并重复同样推导, 即得

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+m^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

□

此公式把弦长用联立方程的代数系数表达, 全程不必解出交点坐标.

例题 3.54　求直线 $y=x-1$ 被抛物线 $y^2=4x$ 截得的弦长.

知乎@余命数

解　直线 $y=x-1$ 代入抛物线方程 $y^2=4x$, 消去 y 后整理为关于 x 的一元二次方程

知乎@余命数

$$(x-1)^2=4x,$$

知乎@余命数

$$x^2-6x+1=0,$$

其系数为 $a=1,b=-6,c=1$, 直线斜率 $k=1$. 判别式 $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4=32>0$ 表明直线与抛物线有两个不同的交点. 代入弦长公式得

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{32}}{1}=\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}=8.$$

知乎@余命数

例题 3.55　求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的过右焦点 F 且斜率为 k 的弦的长度.

解　对于椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 有 $a^2=4,b^2=1$, 故半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$, 右焦点为 $F(\sqrt{3},0)$. 过 F 且斜率为 k 的直线 $y=k(x-\sqrt{3})$ 代入椭圆方程, 整理得

$$\frac{x^2}{4}+k^2(x-\sqrt{3})^2=1,$$

$$(1+4k^2)x^2-8\sqrt{3}k^2x+(12k^2-4)=0.$$

其判别式

知乎@余命数

$$\begin{aligned}\Delta&=(-8\sqrt{3}k^2)^2-4(1+4k^2)(12k^2-4)\\&=192k^4-16(12k^4-k^2-1)=16(k^2+1),\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代入弦长公式得

$$|P_1P_2| = \sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{16(k^2+1)}}{1+4k^2} = \frac{4(1+k^2)}{1+4k^2}.$$

3.3.5.3 弦中点问题

3.3.5.3.1 韦达定理 设弦 P_1P_2 的中点为 $M(x_M, y_M)$，联立直线与曲线方程得 $ax^2+bx+c=0$. 由中点坐标公式和韦达定理, 中点横坐标为

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

中点纵坐标 y_M 代入直线方程 $y_M = kx_M + m$ 即得. 这是处理中点问题的常用做法.

3.3.5.3.2 点差法 韦达定理法普适, 但在某些情况下运算较繁. 点差法为弦中点与弦斜率问题提供了一条更简洁的代数路径. 设弦端点为 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$, 中点为 $M(x_M,y_M)$. 以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例. P_1, P_2 都在椭圆上, 故其坐标满足方程.

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad ① \qquad 和 \qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad ②$$

两式相减(此即点差), 并用平方差公式:

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$$

代入中点坐标 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$ 与斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$:

$$\frac{(x_1-x_2)(2x_M)}{a^2}+\frac{k(x_1-x_2)(2y_M)}{b^2}=0$$

当 $x_1 \neq x_2$ 时, 约去 $2(x_1-x_2)$, 整理得

$$\frac{x_M}{a^2}+k\frac{y_M}{b^2}=0$$

此式建立了弦中点 (x_M, y_M) 与弦斜率 k 之间的关系, 不必涉及直线截距.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

定理 3.10 (弦中点斜率关系) 对于中心在原点的椭圆与双曲线, 其一条非竖直弦的斜率为 k, 中点坐标为 (x_M, y_M), 则满足

- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: $\frac{x_M}{a^2}+k\frac{y_M}{b^2}=0$. 当 $x_M\neq 0$ 时, 可写为 $k\cdot\frac{y_M}{x_M}=-\frac{b^2}{a^2}$, 即 $k\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$.
- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: $\frac{x_M}{a^2}-k\frac{y_M}{b^2}=0$. 当 $x_M\neq 0$ 时, 可写为 $k\cdot\frac{y_M}{x_M}=\frac{b^2}{a^2}$, 即 $k\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}$.

证明 设弦的两个端点为 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$. 因弦非竖直, $x_1\neq x_2$, 且

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},\qquad x_M=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y_M=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

对椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 将 P_1, P_2 的方程相减, 得

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0.$$

用平方差公式并代入中点和斜率, 有

$$\frac{(x_1-x_2)(2x_M)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(2y_M)}{b^2}=0\quad\Longrightarrow\quad\frac{x_M}{a^2}+k\frac{y_M}{b^2}=0.$$

若 $x_M\neq 0$, 两边同乘 $\frac{b^2}{x_M}$, 得 $k\frac{y_M}{x_M}=-\frac{b^2}{a^2}$.

对双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 同样将两端点的方程相减, 得

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0.$$

代入中点和斜率后得到

$$\frac{x_M}{a^2}-k\frac{y_M}{b^2}=0.$$

若 $x_M\neq 0$, 即得 $k\frac{y_M}{x_M}=\frac{b^2}{a^2}$. □

例题 3.56 已知直线 $y=x+m$ 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 交于两点, 若两交点所构成弦的中点的横坐标为 3, 求实数 m 的值.

解 将 $y=x+m$ 代入双曲线方程, 整理得

$$\frac{x^2}{4}-\frac{(x+m)^2}{2}=1,$$

$$x^2+4mx+2m^2+4=0.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设两交点为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$，弦中点为 $M(x_M,y_M)$. 由韦达定理 $x_1+x_2=-4m$，故中点横坐标 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-2m$. 题设 $x_M=3$，即 $-2m=3$，解得 $m=-\dfrac{3}{2}$.

例题 3.57 求椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 中，被点 $M(1,1)$ 平分的弦所在的直线方程.

解 本题直接应用点差法得到的弦中点斜率关系. 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，弦的斜率 k 与弦中点 $M(x_M,y_M)$ 满足 $k\cdot\dfrac{y_M}{x_M}=-\dfrac{b^2}{a^2}$. 此处 $a^2=9,b^2=4$，中点 $M(1,1)$，代入得 $k=-\dfrac{4}{9}$. 所求直线过 $M(1,1)$ 且斜率为 $-\dfrac{4}{9}$，由点斜式 $y-1=-\dfrac{4}{9}(x-1)$，整理得 $4x+9y-13=0$.

例题 3.58 求抛物线 $y^2=2px\,(p>0)$ 的一组斜率为 $k\,(k\neq0)$ 的平行弦的中点轨迹方程.

解 设一条斜率为 k 的弦的端点为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$. 两点在抛物线上，故 $y_1^2=2px_1,y_2^2=2px_2$. 将两式相减并利用平方差公式，得

$$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2).$$

弦的斜率存在且不为零，故 $x_1\neq x_2$，上式可写为 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(y_1+y_2)=2p$. 设中点为 $M(x_M,y_M)$，则 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，$y_1+y_2=2y_M$，代入得 $k\cdot2y_M=2p$，即 $y_M=\dfrac{p}{k}$. 此关系对所有斜率为 k 的弦的中点成立，故中点轨迹位于平行于 x 轴的直线 $y=\dfrac{p}{k}$ 上. 还需保证过中点且斜率为 k 的直线能截得实弦，设中点为 $(x_M,\dfrac{p}{k})$，弦端点可写作 $(x_M\pm u,\dfrac{p}{k}\pm ku)$，代入抛物线方程得 $k^2u^2=2p(x_M-\dfrac{p}{2k^2})$，故须 $x_M>\dfrac{p}{2k^2}$. 因而完整轨迹为射线

$$y=\frac{p}{k},\quad x>\frac{p}{2k^2}.$$

3.3.5.3.3 点差法的原理与思想 点差法是处理圆锥曲线弦中点问题的一种方法，把两个满足曲线方程的点的坐标代入方程，再相减.

以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为例，设弦 P_1P_2 的端点为 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$. 由于这两点都在椭圆上，坐标满足椭圆方程：

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\quad\text{(I)}$$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad \text{(II)}$$

单独看每个方程只得到一个点的信息; 但解析几何研究点与点之间的关系, 点差法作 I-II 正是为了建立这种关系.

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{a^2}\right)+\left(\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{y_2^2}{b^2}\right)=0$$

作差消去了等式右侧的常数项 1, 使等式变为齐次形式, 便于因式分解. 利用平方差公式, 上式可分解为:

知乎@余命数

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$$

知乎@余命数 知乎@余命数

代数变形完成后, 下面赋予这些表达式以几何意义. 观察式中四个关键组合项:

- x_1-x_2 与 y_1-y_2: 这两项是坐标的差值, 它们的比值 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 正是弦 P_1P_2 的斜率 k, 这里要求 $x_1\neq x_2$.
- x_1+x_2 与 y_1+y_2: 这两项是坐标的和, 它们的一半 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 和 $\frac{y_1+y_2}{2}$ 恰好是弦 P_1P_2 的中点 M 的坐标 (x_M,y_M).

引入弦斜率 k 与中点坐标 (x_M,y_M), 可把上述代数等式转化为几何方程:

$$\frac{(x_1-x_2)\cdot(2x_M)}{a^2}+\frac{k(x_1-x_2)\cdot(2y_M)}{b^2}=0$$

知乎@余命数

约去公因子 $2(x_1-x_2)$(弦不垂直于 x 轴), 得到仅联系弦中点与斜率的关系式:

知乎@余命数

$$\frac{x_M}{a^2}+k\frac{y_M}{b^2}=0$$

点差法分代数与几何两个层面.

1. **代数层面**. 通过作差消去常数项, 利用因式分解将二次关系转化为关于坐标和与坐标差的乘积形式.
2. **几何层面**. 将代数中的和与差分别诠释为几何中的中点与斜率.

它绕开了韦达定理法中联立方程的繁琐, 直接给出圆锥曲线自身关于平行弦中点轨迹的几何属性. 这种从点的方程到弦的性质的推演, 正是解析几何处理问题的方式.

联立、韦达、弦长、点差等工具已经齐备. 面对具体问题, 还须在两类参量中作出选择. 一类是**以曲线上动点的坐标为参量**, 另一类是**以直线方程中的参数为参量**. 前者称为**设点法**, 也叫点参法; 后者称为**设线法**, 也叫线参法或联立法.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.3.6 设点法与设线法预告

- **设点法**. 设 $P(x_0,y_0)$ 或弦端 A,B 在曲线上, 把距离、垂直、定比等条件写成关于坐标的等式, 再用曲线方程整体代换. 基本技术、参量选择与典型应用见 第3.4节 至 第3.6节.
- **设线法**. 设直线 $y=kx+m$(或截距式、横截式), 与曲线联立得一元二次方程, 由判别式与韦达读出交点个数、中点、弦长等对称量. 联立步骤、直线形式选择与后处理见 第3.7节 至 第3.9节.

知乎@余命数

二者可以并用, 点对点约束, 如 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=0$ 常先设点再借韦达; 弦长、中点轨迹等则多以设线开局. 何时取舍见 第3.16节.

知乎@余命数

3.3.7 曲线系方程 *

处理一族具有共同性质的曲线, 例如过共同交点时, 逐一分析每条曲线方程不经济. 曲线系方程的思想是用一个含参数的方程统一表示这一族曲线, 把寻找特定曲线的问题转化为确定参数值的问题.

其理论基础如下:

定理 3.11 (曲线系原理) 设曲线 C_1,C_2 的方程分别为 $f(x,y)=0$ 和 $g(x,y)=0$. 对任意实数 λ, 方程

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0 \tag{3-21}$$

的解集, 当左端不恒为零时可看作一条曲线包含 C_1 和 C_2 的所有公共点.

证明 设 $P(x_0,y_0)$ 是 C_1 和 C_2 的任意公共点. 根据定义, P 的坐标必然同时满足 C_1 和 C_2 的方程, 即

$$f(x_0,y_0)=0 \quad 且 \quad g(x_0,y_0)=0$$

现在, 将点 $P(x_0,y_0)$ 的坐标代入曲线系方程 $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$ 的左侧:

$$f(x_0,y_0)+\lambda g(x_0,y_0)=0+\lambda\cdot 0=0$$

知乎@余命数

故等式恒成立. 因此点 $P(x_0,y_0)$ 位于方程 $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$ 表示的曲线上. 此结论对所有公共点成立, 故该曲线经过 C_1 和 C_2 的所有公共点. □

知乎@余命数

这个原理的优势在于, 处理过交点问题时可以避免求解交点坐标, 直接在代数结构层面解决.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.3.7.1 共点直线系

最简单且最基础的曲线系是共点直线系. 若两直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交, 则过其交点的所有直线(除去 l_2)可由直线系方程表示:

$$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \tag{3-22}$$

知乎@余命数

此方程是曲线系原理在 f,g 均为一次多项式时的直接应用. 对任意 λ, 该方程都是关于 x,y 的一次方程, 表示一条过 l_1,l_2 交点的直线.

下面看几个例子.

例题 3.59 求经过两直线 $l_1: 2x-y-1=0$ 和 $l_2: x+y-5=0$ 的交点, 且与点 $P(1,-2)$ 的距离为 $\sqrt{5}$ 的直线方程.

解 所求直线属于过 l_1,l_2 交点的直线系, 其方程设为 $(2x-y-1)+\lambda(x+y-5)=0$, 整理为一般式

$$(2+\lambda)x+(\lambda-1)y-(1+5\lambda)=0.$$

点 $P(1,-2)$ 到该直线的距离为 $\sqrt{5}$, 由距离公式

$$d=\frac{|(2+\lambda)(1)+(\lambda-1)(-2)-(1+5\lambda)|}{\sqrt{(2+\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}=\sqrt{5}.$$

知乎@余命数

分子 $|2+\lambda-2\lambda+2-1-5\lambda|=|-6\lambda+3|$, 分母根号内 $(2+\lambda)^2+(\lambda-1)^2=2\lambda^2+2\lambda+5$. 两边平方得

$$\frac{(-6\lambda+3)^2}{2\lambda^2+2\lambda+5}=5,$$

$$26\lambda^2-46\lambda-16=0 \quad\Longrightarrow\quad 13\lambda^2-23\lambda-8=0,$$

解得 $\lambda=\dfrac{23\pm3\sqrt{105}}{26}$. 代回直线系方程, 得所求两条直线为

$$\left(2+\frac{23+3\sqrt{105}}{26}\right)x+\left(\frac{23+3\sqrt{105}}{26}-1\right)y-\left(1+5\cdot\frac{23+3\sqrt{105}}{26}\right)=0,$$

$$\left(2+\frac{23-3\sqrt{105}}{26}\right)x+\left(\frac{23-3\sqrt{105}}{26}-1\right)y-\left(1+5\cdot\frac{23-3\sqrt{105}}{26}\right)=0.$$

等价地, 两边同乘以 26 后可写为

$$(75+3\sqrt{105})x+(-3+3\sqrt{105})y-(141+15\sqrt{105})=0,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$(75-3\sqrt{105})x+(-3-3\sqrt{105})y-(141-15\sqrt{105})=0.$$

3.3.7.2 过圆锥曲线交点的曲线系

设 $C_1:f(x,y)=0$ 和 $C_2:g(x,y)=0$ 是两条圆锥曲线, 则 $C_1+\lambda C_2=0$ 表示经过它们所有交点的圆锥曲线系.

知乎@余命数

例题 3.60 已知两圆 $C_1:x^2+y^2-2x-4y-4=0$ 和 $C_2:x^2+y^2+2x-6y=0$.

1. 求经过 C_1,C_2 交点的直线的方程.
2. 求经过 C_1,C_2 交点, 且过点 $P(3,1)$ 的圆的方程.

知乎@余命数

解 (1) 设经过两圆交点的曲线系方程为

$$(x^2+y^2-2x-4y-4)+\lambda(x^2+y^2+2x-6y)=0.$$

知乎@余命数

该方程表示一条直线, 当且仅当 x^2,y^2 的系数 $1+\lambda$ 同时为零, 即 $\lambda=-1$. 此时

$$(x^2+y^2-2x-4y-4)-(x^2+y^2+2x-6y)=-4x+2y-4=0,$$

化简得 $2x-y+2=0$, 此直线即两圆的**根轴**.

(2) 所求圆是过 C_1,C_2 交点的曲线系中的一员. 将点 $P(3,1)$ 代入以确定 λ, 其中 C_1 部分为 $3^2+1^2-2\cdot3-4\cdot1-4=-4$, C_2 部分为 $3^2+1^2+2\cdot3-6\cdot1=10$, 故 $-4+10\lambda=0$, 解得 $\lambda=\dfrac{2}{5}$. 代回曲线系方程并两边乘以 5,

$$5(x^2+y^2-2x-4y-4)+2(x^2+y^2+2x-6y)=0,$$

$$7x^2+7y^2-6x-32y-20=0,$$

即所求圆的方程.

例题 3.61 求经过椭圆 $C:x^2+4y^2=4$ 与两条直线 $l_1:x-y=0$ 及 $l_2:x+y=0$ 的所有四个交点, 并且经过点 $P(2,1)$ 的圆锥曲线的方程.

解 此题若直接求解四个交点坐标再用待定系数法求曲线方程, 计算极为繁琐, 曲线系方法提供了简捷的解法. 将两条直线 l_1,l_2 视为一条退化的二次曲线, 其方程为 $(x-y)(x+y)=x^2-y^2=0$, 图形即直线 $y=x$ 与 $y=-x$ 的并集. 问题转化为求经过椭圆 $C:x^2+4y^2-4=0$ 与退化二次曲线 $L:x^2-y^2=0$ 交点的曲线. 依曲线系原理设其方程为

$$(x^2+4y^2-4)+\lambda(x^2-y^2)=0,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此曲线族自动经过所有四个交点. 将点 $P(2,1)$ 代入以确定 λ:$(4+4-4)+\lambda(4-1)=0$, 即 $4+3\lambda=0$, 解得 $\lambda=-\dfrac{4}{3}$. 代回曲线系方程并两边乘以 3,

$$3(x^2+4y^2-4)-4(x^2-y^2)=0,$$
$$-x^2+16y^2-12=0 \quad\Longrightarrow\quad x^2-16y^2+12=0,$$

这是一条双曲线.

3.3.7.3 直线系与圆系

3.3.7.3.1 直线系方程 直线系是具有某种共同几何属性的一族直线的集合. 根据属性的不同, 其方程有几种标准形式.

- **共点直线系**
  经过两已知相交直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 交点的直线系方程为

  $$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

  此方程族不包含 l_2 本身; 若要包含 l_2, 可用对称形式 $\mu(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$.
  更基本的形式是过定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线系, 方程可设为

  $$y-y_0=k(x-x_0)$$

  其中斜率 k 为参数. 此形式不能表示垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$. 解题时通常需单独讨论斜率不存在的情况.
- **平行直线系**
  与已知直线 $Ax+By+C=0$ 平行的一族直线方程为

  $$Ax+By+\lambda=0 \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

  从几何上看, 该族直线具有相同法向量 (A,B), 因此斜率相等. 参数 λ 控制直线与原点的距离.

例题 3.62 求与直线 $3x-4y+1=0$ 平行, 且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线方程.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 所求直线属于与 $3x-4y+1=0$ 平行的直线系, 其方程设为 $3x-4y+\lambda=0$. 直线与圆 $x^2+y^2=4$ 相切, 等价于圆心 $O(0,0)$ 到该直线的距离等于半径 $R=2$. 圆心到直线的距离

$$d=\frac{|3(0)-4(0)+\lambda|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|\lambda|}{5}.$$

令 $d=R$, 即 $\dfrac{|\lambda|}{5}=2$, 解得 $|\lambda|=10$, $\lambda=\pm10$. 故所求切线有两条: $3x-4y+10=0$ 与 $3x-4y-10=0$.

3.3.7.3.2 圆系方程 与直线系类似, 圆系方程是解决两圆交点、切点等问题的实用工具.

- **过两圆交点的圆系**
  设两圆 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 和 $C_2: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 相交, 则经过其交点的圆系方程为

  $$(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0 \quad (\lambda\neq-1)$$

  特别地, 当 $\lambda=-1$ 时, 方程中的二次项 x^2, y^2 被消去, 得到一个一次方程, 它表示过两圆公共弦所在的直线, 即两圆的**根轴**.
- **过圆与直线交点的圆系**
  这是上述情形的一个重要特例. 可把直线 $l: Ax+By+C=0$ 视为半径无限大的退化圆. 经过圆 $C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与直线 l 交点的圆系方程为

  $$(x^2+y^2+Dx+Ey+F)+\lambda(Ax+By+C)=0$$
- **相切圆系**
  与已知直线 $l: Ax+By+C=0$ 相切于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的圆系方程, 可看成过直线 l 与半径为零的点圆 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ 交点的圆系. 其方程为

  $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(Ax+By+C)=0$$

例题 3.63 求经过圆 $C: x^2+y^2-4x=0$ 与直线 $l: x-2y-2=0$ 的交点, 且面积最小的圆的方程.

解 所求圆属于过圆 C 与直线 l 交点的圆系, 其方程设为

$$(x^2+y^2-4x)+\lambda(x-2y-2)=0,$$

知乎@余命数 知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

整理为 $x^2+y^2+(\lambda-4)x-2\lambda y-2\lambda=0$, 配方得

$$\left(x+\frac{\lambda-4}{2}\right)^2+(y-\lambda)^2=\left(\frac{\lambda-4}{2}\right)^2+\lambda^2+2\lambda.$$

面积 $S=\pi R^2$ 最小等价于半径平方 R^2 最小. 令 $f(\lambda)=R^2=\dfrac{\lambda^2-8\lambda+16}{4}+\lambda^2+2\lambda=\dfrac{5}{4}\lambda^2+4$, 在 $\lambda=0$ 时取最小值 4. 此时圆即原始圆 $C:x^2+y^2-4x=0$.

此结果的几何意义是, 过圆与直线两交点的所有圆中, 以公共弦为直径的圆面积最小. 圆心 $C(2,0)$, 直线 l 斜率 $\dfrac{1}{2}$. 以公共弦为直径的圆, 其圆心必在直线 l 上. 圆系方程的圆心坐标为 $(-\dfrac{\lambda-4}{2},\ \lambda)$, 代入 l 的方程 $x-2y-2=0$ 得

$$-\frac{\lambda-4}{2}-2\lambda-2=0\implies -5\lambda=0\implies \lambda=0,$$

与求最值的结果一致. 故面积最小的圆是 $x^2+y^2-4x=0$.

例题 3.64　求与直线 $y=2x$ 相切于点 $P(1,2)$, 且过点 $Q(3,4)$ 的圆的方程.

解　这是相切圆系的经典应用. 切线方程 $2x-y=0$, 切点 $P(1,2)$. 所求圆属于与直线 $2x-y=0$ 相切于点 $(1,2)$ 的圆系, 其方程设为

$$(x-1)^2+(y-2)^2+\lambda(2x-y)=0.$$

该圆过点 $Q(3,4)$, 将 Q 代入确定 λ: $(3-1)^2+(4-2)^2+\lambda(2\cdot3-4)=0$, 即 $8+2\lambda=0$, 解得 $\lambda=-4$. 代回圆系方程, 展开整理

$$\begin{aligned}(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-8x+4y&=0,\\ x^2+y^2-10x+5&=0,\end{aligned}$$

即所求圆的方程.

3.3.7.4　二次曲线系

下面把曲线系原理从直线和圆推广到一般二次曲线. 基本形式 $C_1+\lambda C_2=0$ 描述经过 C_1,C_2 所有(至多四个)交点的一族二次曲线.

其最有力的应用策略是将其中一条二次曲线退化为两条直线.

3.3.7.4.1　退化的二次曲线　二次方程 $f(x,y)=0$ 所代表的图形并不总是椭圆、双曲线或抛物线. 当 $f(x,y)$ 可分解为两个一次多项式乘积时, 其图形是两条直线的

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

并集. 例如, 两条直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的并集可由一个二次方程描述:

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

这个方程的解集正是满足 $l_1=0$ 或 $l_2=0$ 的点的集合. 这样的图形称为**退化的二次曲线**. 它是理解和构造二次曲线系的基础.

3.3.7.4.2 过四点的二次曲线系 现在考虑一个常用场景, 求经过一条已知二次曲线 C 与两条已知直线 l_1, l_2 的四个交点的曲线. 设 $C=0, l_1=0, l_2=0$ 分别是它们的方程. 可构造退化二次曲线 $l_1l_2=0$. 根据曲线系原理, 方程

$$C+\lambda(l_1l_2)=0 \tag{3-23}$$

表示经过这四个交点的一族二次曲线.

例题 3.65 求经过椭圆 $C_1: x^2+2y^2=3$ 与圆 $C_2: x^2+y^2=2$ 的四个交点, 且过原点的二次曲线方程.

解 所求二次曲线属于过 C_1, C_2 交点的曲线系, 其方程设为

$$(x^2+2y^2-3)+\lambda(x^2+y^2-2)=0,$$

此曲线族自动经过 C_1, C_2 的所有交点. 该曲线经过原点, 将 $(0,0)$ 代入得 $-3-2\lambda=0$, 解得 $\lambda=-\dfrac{3}{2}$. 代回曲线系方程, 两边乘以 2,

$$\begin{aligned}2(x^2+2y^2-3)-3(x^2+y^2-2)&=0,\\ -x^2+y^2=0 \quad &\Longrightarrow \quad y^2=x^2,\end{aligned}$$

分解为 $(y-x)(y+x)=0$, 图形是直线 $y=x$ 与 $y=-x$ 的并集, 即退化的双曲线.

3.3.7.4.3 从相交到相切 曲线系除处理离散交点外, 也能处理相切这种重合交点的极限情形. 几何上, 切线是割线当两个交点无限逼近并重合时的极限. 代数上, 解方程组所得二次方程的判别式 $\Delta\to 0$, 两个不等实根合并为一个重根.

基于此思想可推广曲线系处理相切问题. 当 l_1, l_2 重合为 l 时, 退化二次曲线 $l_1l_2=0$ 演变成 $l^2=0$. $l^2=0$ 的几何意义是一条双重直线. 由此得到处理相切问题的实用曲线系:

$$C+\lambda l^2=0 \tag{3-24}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此方程描述一族与二次曲线 C 在它与直线 l 的两个交点处有二重接触的曲线. 若 l 与 C 交于两点, 则该曲线系中所有曲线都在这两点与 C 相切. 若 l 与 C 相切, 则该曲线系中所有曲线都在该切点处与 C 有更高阶的接触.

3.3.7.4.4　单点切触的曲线系　构造一族与某条直线 l 在某点 P_0 相切的曲线时, 可用一个特例. 与已知直线 $l: Ax+By+C=0$ 相切于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的圆系, 可由 P_0 处的半径为零的点圆与直线 l 线性组合而成. 点圆方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$. 圆系方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(Ax+By+C)=0 \tag{3-25}$$

例题 3.66　求与抛物线 $C: y^2=4x$ 在顶点 $(0,0)$ 处相切, 且经过点 $P(1,2)$ 的圆的方程.

知乎@余命数

解　把曲线与曲线相切转化为代数构造, 即两条曲线在某点相切, 当且仅当在该点有公共切线. 抛物线 $y^2=4x$ 在顶点 $(0,0)$ 处的切线为 y 轴 $x=0$, 故原问题等价于求一个过点 $P(1,2)$ 且与直线 $l: x=0$ 相切于点 $O(0,0)$ 的圆. 依相切圆系构造, 切点 $O(0,0)$ 对应点圆 $x^2+y^2=0$, 切线 $l: x=0$, 故所有满足相切条件的圆的方程为

$$(x^2+y^2)+\lambda x=0.$$

该圆又须过 $P(1,2)$, 代入得 $5+\lambda=0$, 解得 $\lambda=-5$. 代回圆系方程, 即得所求圆 $x^2+y^2-5x=0$. 这一构造把相切的几何约束提炼为相切圆系的代数结构, 再以一次代入定参, 计算量随之减少.

知乎@余命数

3.3.8　仿射变换 *

在处理椭圆几何问题时, 常见的困难是基本原理(联立方程、韦达定理)清晰, 但直接计算往往十分繁重.

根本原因在于椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中两个坐标变量的不对等. 相比之下, 圆 $x^2+y^2=R^2$ 具有高度对称性, 其几何性质, 如半径处处相等、垂径定理也更简洁.

由此提出一个根本问题, 即能否找到一种几何变换, 把椭圆化归为圆, 从而将复杂的椭圆问题转化到熟悉的圆的领域中去解决; 若存在这样的变换, 它需要满足什么条件, 又该如何利用.

3.3.8.1　构造伸缩变换

知乎@余命数

寻找一个坐标映射 $T:(x,y)\mapsto(x',y')$, 把椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 (x,y) 映成圆 C' 上的点 (x',y').

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

为使变换尽可能简单, 我们保持坐标系的基本结构不变. 一个自然的想法是对坐标轴进行独立伸缩. 观察椭圆方程, 可将其改写为

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

我们希望新坐标 (x',y') 满足圆的方程, 例如 $x'^2+y'^2=R^2$. 比较上述两个方程的形式, 一个非常自然的对应关系是

$$\frac{x'}{R}=\frac{x}{a}\quad\text{且}\quad\frac{y'}{R}=\frac{y}{b}$$

为进一步简化, 选择一个特定的目标圆. 例如, 令变换不改变 x 轴尺度, 即 $x'=x$. 此时, 为使方程匹配, 取目标圆半径 $R=a$. 由 $\frac{x'}{a}=\frac{x}{a}$ 得 $x'=x$. 由 $\frac{y'}{a}=\frac{y}{b}$ 得 $y'=\frac{a}{b}y$.

至此, 我们构造出满足需求的坐标变换

$$T:\begin{cases}x'=x\\ y'=\frac{a}{b}y\end{cases}\tag{3-26}$$

这个变换在几何上相当于把平面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{a}{b}$ 倍, $a>b$ 时伸长, $a<b$ 时压缩, 而 x 轴方向不变. 通过这个变换, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 被映到圆 $x'^2+y'^2=a^2$.

3.3.8.2 伸缩变换后对几何性质的影响

我们已找到把椭圆化为圆的变换, 但要真正应用它, 还须考察其他几何对象和几何关系在变换下的表现.

定理 3.12 (共线性保持) 在伸缩变换 $T:(x,y)\mapsto(x,\frac{a}{b}y)$ 下, 直线映为直线.

证明 设原平面内直线方程为 $Ax+By+C=0$. 变换的逆关系为 $x=x',y=\frac{b}{a}y'$. 将其代入直线方程, 得到新坐标系下的方程,

$$A(x')+B\left(\frac{b}{a}y'\right)+C=0\implies Ax'+\frac{Bb}{a}y'+C=0$$

由于 A,B 不全为零, 故 $A,\frac{Bb}{a}$ 也不全为零. 此方程是关于 x',y' 的一次方程, 故其像仍为一条直线. □

定理 3.13 (平行性保持) 在伸缩变换 T 下, 两条互不重合的平行直线映为两条仍互不重合且平行的直线.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 设原平面内两条平行直线为 $l_1: Ax+By+C_1=0$ 和 $l_2: Ax+By+C_2=0$. 由定理 1 的证明, 它们的像分别为 $l_1': Ax'+\frac{Bb}{a}y'+C_1=0$ 和 $l_2': Ax'+\frac{Bb}{a}y'+C_2=0$. 由于 x', y' 的系数对应相等, 仅常数项不同, 故 $l_1' \parallel l_2'$. □

定理 3.14 (定比分点保持) 在伸缩变换 T 下, 非退化线段的有限定比分点(包括中点)映为像线段的对应定比分点.

证明 设非退化线段 P_1P_2 的端点为 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$. 设 M 为 P_1P_2 的有限定比分点, 满足 $\overrightarrow{P_1M}=\lambda\overrightarrow{MP_2}$ $(\lambda\neq -1)$.

其坐标为 $M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.

各点经变换后的像为 $P_1'(x_1, \frac{a}{b}y_1), P_2'(x_2, \frac{a}{b}y_2), M'\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{a}{b}\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$. 计算像线段 $P_1'P_2'$ 上满足 $\overrightarrow{P_1'M''}=\lambda\overrightarrow{M''P_2'}$ 的点 M'':

$$x_{M''}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_{M''}=\frac{\frac{a}{b}y_1+\lambda\frac{a}{b}y_2}{1+\lambda}=\frac{a}{b}\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

可见 M'' 的坐标与 M' 完全相同. 当 $\lambda=1$ 时, 此结论对中点成立. □

定理 3.15 (相切性保持) 在伸缩变换 T 下, 若一条直线与一条二次曲线相切, 则它们的像也相切.

证明 相切的代数定义是, 直线与二次曲线的方程联立后, 在切点处得到二重交点. 伸缩变换 T 是可逆仿射变换, 其逆变换也存在且唯一. 将像直线与像二次曲线用逆变换代回原坐标, 等价于原直线与原二次曲线的方程组, 因而交点及其重数一一对应. 因此, 原来的二重交点在变换后仍对应二重交点, 相切关系得以保持. □

该变换**不保持**长度和角度. 例如, 点 $(0,b)$ 变换为 $(0,a)$, 其到原点的距离从 b 变为 a. 两条垂直的直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 变换为 $y'=\frac{a}{b}x'$ 和 $y'=-\frac{a}{b}x'$, 它们不再垂直(除非 $a=b$). 因此, 所有依赖长度、距离、垂直关系的计算, 必须在逆变换后回到原坐标系中进行.

定理 3.16 (多边形面积变换) 在伸缩变换 T 下, 面积为 S 的简单多边形映为面积为 S' 的简单多边形, 且 $S'=\frac{a}{b}S$.

证明 先证明此结论对任意三角形成立. 设原平面内三角形顶点为 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$. 其面积 $S_\triangle$ 可由坐标面积公式(鞋带公式)给出,

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

经变换 T 后, 像三角形顶点为 $P_1'(x_1, \frac{a}{b}y_1), P_2'(x_2, \frac{a}{b}y_2), P_3'(x_3, \frac{a}{b}y_3)$. 其面积 $S_{\triangle}'$ 为

$$\begin{aligned} S_{\triangle}' &= \frac{1}{2}\left|x_1\left(\frac{a}{b}y_2 - \frac{a}{b}y_3\right) + x_2\left(\frac{a}{b}y_3 - \frac{a}{b}y_1\right) + x_3\left(\frac{a}{b}y_1 - \frac{a}{b}y_2\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{a}{b}\left(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right)\right| \end{aligned}$$

由于 a, b 均为正数, 可将因子 $\frac{a}{b}$ 提出绝对值符号,

$$S_{\triangle}' = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = \frac{a}{b}S_{\triangle}$$

对于任意一个多边形, 如四边形, 总可将其剖分为有限个不重叠的三角形. 设一个多边形被剖分为 n 个三角形 $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$. 其总面积 $S = \sum_{i=1}^{n} S_{\triangle_i}$. 经变换后, 该多边形的像由 n 个像三角形 $\triangle_1', \triangle_2', \ldots, \triangle_n'$ 组成. 其总面积 $S' = \sum_{i=1}^{n} S_{\triangle_i}'$. 根据已证的三角形面积变换关系, $S_{\triangle_i}' = \frac{a}{b}S_{\triangle_i}$ 对所有 i 成立. 因此

$$S' = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{b}S_{\triangle_i}\right) = \frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n} S_{\triangle_i} = \frac{a}{b}S$$

此结论对任意多边形均成立. □

基于上述理论, 我们形成清楚的解题流程:

1. **变换**. 识别问题中的椭圆, 施加伸缩变换, 将其转化为圆. 同时, 把问题中相关的点与线一起做同步变换.
2. **求解**. 在变换后的圆中, 利用圆的简洁几何性质, 如对称性与垂径定理, 来解决问题. 这一步通常在代数上或几何上都更为简单.
3. **逆变**. 将圆中得到的结论, 依据变换的几何不变性, 如平行、中点、相切, 或按确定的规律换算面积, 翻译回原始的椭圆.

例题 3.67 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的三角形的最大面积.

解 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内接 $\triangle PQR$. 施行仿射变换 $T: (x, y) \mapsto (x', y') = (x, \frac{a}{b}y)$, 椭圆 C 变为圆 $C': x'^2 + y'^2 = a^2$, 内接 $\triangle PQR$ 变为圆 C' 的内接 $\triangle P'Q'R'$. 问题转化为求圆 $x'^2 + y'^2 = a^2$ 内接三角形的最大面积. 圆内接三角形以等边三角形面积为最大, 半径 $R = a$ 的圆内接等边三角形面积为 $S'_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 依面积变换规律 $S' = \frac{a}{b}S$, 即 $S = \frac{b}{a}S'$, 故椭圆内接三角形的最大面积为

$$S_{\max} = \frac{b}{a}S'_{\max} = \frac{b}{a} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab.$$

此方法将椭圆最值问题经一个线性变换化归为圆的初等最值问题.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.68　设直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 交于 A,B 两点，M 为弦 AB 的中点. 若直线 OM（O 为坐标原点）与椭圆交于点 P. 证明，椭圆在点 P 处的切线与直线 l 平行.

解　这是椭圆共轭直径的基本性质，直接代数证明较为繁琐，仿射变换则直观且基本. 对整个图形施行伸缩变换 $T:(x,y)\mapsto(x',y')=(x,\frac{a}{b}y)$. 在变换后的平面中，椭圆变为圆 $C':x'^2+y'^2=a^2$，直线 l 变为 l'，交点 A,B 变为 A',B'. 由变换的中点保持性质，弦 AB 的中点 M 变为弦 $A'B'$ 的中点 M'；原点 O 不变，直线 OM 变为 OM'，交点 P 变为 P'. 由相切保持性质，椭圆在 P 处的切线 l_P 变为圆在 P' 处的切线 $l'_{P'}$.

转入圆的平面分析：$A'B'$ 为弦，M' 为其中点，O 为圆心. 由垂径定理，$OM'\perp l'$. 又 P' 在 OM' 上，故 OP' 为半径，圆在 P' 处的切线 $l'_{P'}\perp OP'$. 于是 $l'\perp OM'$ 且 $l'_{P'}\perp OM'$，同垂直于 OM' 的两直线平行，故 $l'_{P'}\parallel l'$.

仿射变换保持平行性，故原像直线 l_P 与 l 亦平行，即椭圆在点 P 处的切线与直线 l 平行.

3.3.9　离心率例题

离心率是圆锥曲线的一个主要参数，求离心率的途径十分多样，可以从定义出发建立 a,c 的方程，也可以利用焦点三角形，借助正余弦定理，数形结合，基本不等式等.

例题 3.69 (建立关于 a 和 c 的一次或二次方程与不等式)　如图，设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，上顶点为 A，右顶点为 B，且 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，则 C 的离心率为 __.

解　答案：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 由椭圆方程可知，$F(-c,0)$、$A(0,b)$、$B(a,0)$，则 $\overrightarrow{FA}=(c,b)$，$\overrightarrow{AB}=(a,-b)$. 由 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 得 $ac-b^2=0$，即 $ac=b^2=a^2-c^2$，整理得 $c^2+ac-a^2=0$，即 $e^2+e-1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（负值舍去）.

例题 3.70 (圆锥曲线第一定义)　已知 P 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，F_1、F_2 分别为其左、右焦点，O 为坐标原点，$|PO|=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{3}{4}a^2$，则 C 的离心率为（　）

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.71 (圆锥曲线第二定义) 古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中描述了圆锥曲线的共性，并给出了圆锥曲线的统一定义，他指出，平面内到定点的距离与到定直线的距离的比是常数 e 的点的轨迹叫做圆锥曲线；当 $0<e<1$ 时，轨迹为椭圆；当 $e=1$ 时，轨迹为抛物线；当 $e>1$ 时，轨迹为双曲线. 则方程 $\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{|25-4x|}=\frac{1}{5}$ 表示的圆锥曲线的离心率 e 等于(　)

A. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{4}{5}$　　D. 5

解 答案:B. 因为 $\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{|25-4x|}=\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{4|x-\frac{25}{4}|}=\frac{1}{5}$,

例题 3.72 (圆锥曲线第三定义 (斜率之积)) 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $y=kx$ 相交于 A, B 两点，点 P 为双曲线 E 上的一个动点，记直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2，若 $k_1k_2=\frac{1}{4}$，且双曲线 E 的右焦点到其一条渐近线的距离为 1，则双曲线 E 的离心率为__.

解 答案:$\frac{\sqrt{5}}{2}$. 设点 $A(x_1,y_1)$、$B(-x_1,-y_1)$、$P(x_0,y_0)$,则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ 且 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$,两式相减,得 $\frac{x_1^2-x_0^2}{a^2}=\frac{y_1^2-y_0^2}{b^2}$,所以 $\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}$,因为 $k_{PA}\cdot k_{PB}=k_1k_2=\frac{(y_0-y_1)(y_0+y_1)}{(x_0-x_1)(x_0+x_1)}=\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, 所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$, 即 $x\pm2y=0$, 因为焦点 $F_2(c,0)$ 到渐近线 $x-2y=0$ 的距离为 1, 所以 $\frac{c}{\sqrt{5}}=1$, 可得 $c=\sqrt{5}$, 又因为 $c^2=a^2+b^2$, 所以 $a=2,b=1$, 所以双曲线的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故答案为:$\frac{\sqrt{5}}{2}$

例题 3.73 (利用数形结合求解) 如图 1 所示，双曲线具有光学性质，从双曲线右焦点发出的光线经过双曲线镜面反射，其反射光线的反向延长线经过双曲线的左焦点. 若双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，从 F_2 发出的光线经过图 2 中的 A,B 两点反射后，分别经过点 C 和 D，且 $\tan\angle CAB=-\frac{12}{5}$, $|\overrightarrow{BD}|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$, 则双曲线 E 的离心率为(　)

A. $\frac{6}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

B. $\frac{\sqrt{37}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

解 答案:B. 如图,由 $|\overrightarrow{BD}|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$,有 $\overrightarrow{BD}^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$,可得 $\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA})=0$, 可得 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}=0$, 有 $BD\perp AB$. 在 $Rt\triangle ABD$ 中, 由 $\tan\angle F_1AB=\frac{12}{5}$, 不妨设 $|\overrightarrow{BF_1}|=12m(m>0)$, 则 $|\overrightarrow{AB}|=5m$, 由勾股定理得 $|\overrightarrow{AF_1}|=13m$, 又由双曲线的定义可得 $|\overrightarrow{AF_2}|=13m-2a$, $|\overrightarrow{BF_2}|=12m-2a$, 根据 $|\overrightarrow{BF_1}|+|\overrightarrow{BF_2}|=|\overrightarrow{AB}|$ 可得 $(13m-2a)+(12m-2a)=5m$, 解得 $a=5m$, 所以 $|\overrightarrow{BF_2}|=2m$, 在 $Rt\triangle F_1BF_2$ 中,

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$2c=|\overrightarrow{F_1F_2}|=\sqrt{144m^2+4m^2}=2\sqrt{37}m$, 可得 $c=\sqrt{37}m$, 故双曲线 E 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{37}m}{5m}=\frac{\sqrt{37}}{5}$. 故选:B.

例题 3.74 (利用正弦定理) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点, M 为 C 左支上一点. 设 $\angle MF_1F_2=\alpha$, $\angle MF_2F_1=\beta$, 且 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, 则 C 的离心率为(　)

例题 3.75 (利用余弦定理) (2024·河北衡水·模拟预测) 已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F, 过点 F 作直线 l 与渐近线 $bx-ay=0$ 直, 垂足为点 P, 延长 PF 交 E 于点 Q. 若 $\overrightarrow{FQ}=3\overrightarrow{PF}$, 则 E 的离心率为(　)

A. $\frac{6}{5}$　　C. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{4}$　　D. $\sqrt{2}$

解 答案:B. 设 $F(c,0)$, O 为坐标原点, 则 $|PF|=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=b$, 从而 $\cos\angle OFP=\frac{b}{c}$. 设 E 的左焦点为 F', $|QF|=t$, 连接 QF', 由双曲线的定义, 得 $|QF'|=t+2a$. 在 $\triangle QF'F$ 中, 由余弦定理, 得 $(t+2a)^2=t^2+(2c)^2-2t\times 2c\times\left(-\frac{b}{c}\right)$, 解得 $t=\frac{b^2}{a-b}$. 由 $\overrightarrow{FQ}=3\overrightarrow{PF}$, 得 $\frac{b^2}{a-b}=3b$, 解得 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$,

例题 3.76 (内切圆问题) (2024·高三·广东广州·期中) 已知点 P 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上一点, F_1、F_2 分别为双曲线 C 的左、右焦点, $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴相切于点 N, 若 $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PF_1}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PF_2}$, 则双曲线 C 的离心率为__.

解 答案: 2. 直线 PF_1,PF_2 分别与内切圆的切点为 M,Q, 如图所示. 由切线的性质可得 $\begin{cases}|PM|=|PQ|\\|F_1M|=|F_1N|\\|F_2Q|=|F_2N|\end{cases}$ 由双曲线的定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$, 即 $|PM|+|F_1M|-(|PQ|+|F_2Q|)=2a$, 所以 $|F_1M|-|F_2Q|=2a$, 即 $|F_1N|-|F_2N|=2a$, 又 $|F_1N|+|F_2N|=2c$, 因此 $|F_1N|=c+a$. 设 $\overrightarrow{PN}=t\overrightarrow{PF_1}$, 则 $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{F_1N}=\overrightarrow{PF_1}+t\overrightarrow{F_1F_2}=\overrightarrow{PF_1}+t(\overrightarrow{PF_2}-\overrightarrow{PF_1})=(1-t)\overrightarrow{PF_1}+t\overrightarrow{PF_2}$, 又 $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PF_1}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PF_2}$, 因此 $t=\frac{3}{4}$, 于是 $\overrightarrow{F_1N}=\frac{3}{4}\overrightarrow{F_1F_2}$, 即 $|F_1N|=\frac{3}{2}c$,

知乎@余命数

例题 3.77 (圆与双曲线共焦点) （2024·四川成都·模拟预测）已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$ 与双曲线 $C_2:\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=$

例题 3.78 (利用最大顶角) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b\geqslant 0)$, 点 A,B 是长轴的两个端点, 若椭圆上存在点 P, 使得 $\angle APB=120^\circ$, 则该圆的离心率的取值范围是(　)

A. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

B. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$　　D. $\left(0,\frac{3}{4}\right]$

解 答案: A. 如图. 当 P 在上顶点时, $\angle APB$ 最大, 此时 $\angle APB\geqslant 120^\circ$, 则 $\angle APO\geqslant 60^\circ$, 所以 $\tan\angle APO\geqslant\tan 60^\circ=\sqrt{3}$, 即 $\frac{a}{b}\geqslant\sqrt{3}$、$a^2\geqslant 3b^2$、$a^2\geqslant 3(a^2-c^2)$ 所以 $2a^2\leqslant 3c^2$, 则 $\frac{c}{a}\geqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$ 所以椭圆的离心率的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$, 故选: A

例题 3.79 (基本不等式) 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的右焦点为 F, 椭圆 C 上的两点 A,B 关于原点对称, 且满足 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$, $|FB|\leqslant|FA|\leqslant\sqrt{3}|FB|$, 则椭圆 C 的离心率的取值范围为(　)

A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　C. $\left[\sqrt{3}-1,1\right)$

B. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

解 答案: B. 如图所示. 设椭圆的左焦点 F', 由椭圆的对称性可知, 四边形 $AFBF'$ 为平行四边形, 又 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$, 即 $FA\perp FB$, 所以四边形 $AFBF'$ 为矩形, $\therefore|AB|=|FF'|=2c$, 设 $|AF'|=n$, $|AF|=m$, 在直角 $\triangle ABF'$ 中, $m+n=2a$, $m^2+n^2=4c^2$, 得 $mn=2b^2$, 所以 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{2c^2}{b^2}$, 令 $\frac{m}{n}=t$, 得 $t+\frac{1}{t}=\frac{2c^2}{b^2}$, 又 $|FB|\leqslant|FA|\leqslant\sqrt{3}|FB|$, 得 $\frac{m}{n}=t\in[1,\sqrt{3}]$, 所以 $t+\frac{1}{t}=\frac{2c^2}{b^2}\in\left[2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$, 所以 $\frac{c^2}{b^2}\in\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, 即 $\frac{b^2}{a^2}\in\left[2\sqrt{3}-3,\frac{1}{2}\right]$, 所以 $e^2\in\left[\frac{1}{2},4-2\sqrt{3}\right]$ 所以椭圆 C 的离心率的取值范围为 $e\in\left[\frac{c}{a}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]\right]$, 故选: B

例题 3.80 (十二·已知 $\overrightarrow{PF_1},\overrightarrow{PF_2}$ 范围) （2024·四川省南充市白塔中学高三开学考试）已知 F_1、F_2 分别为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点, A 为右顶点, B 为上顶点, 若在线段 AB 的内部存在不同的两点 $P_i(i=1,2)$, 使得 $\overrightarrow{P_iF_1}\cdot\overrightarrow{P_iF_2}$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.81 ($|PF_1|=\lambda|PF_2|$) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，若椭圆 C 上存在一点 P，使得 $\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{a}$，则椭圆 C 的离心率的取值范围为（　）

A. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　C. $(\sqrt{2}-1,1)$

B. $(0,\sqrt{2}-1)$　　D. $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

解 答案：C. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由正弦定理可得 $\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{|PF_1|}{\sin\angle PF_2F_1}$，又由 $\frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{c}{a}$，得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{c}{a}$. 设点 $P(x_0,y_0)$，可得 $|PF_1|=a+ex_0,|PF_2|=a-ex_0$，则 $a(a+ex_0)=c(a-ex_0)$，解得 $x_0=\frac{a(e-1)}{e(e+1)}$. 由椭圆的几何性质可得 $x_0>-a$，即 $\frac{a(e-1)}{e(e+1)}>-a$，整理得 $e^2+2e-1>0$，解得 $e<-\sqrt{2}-1$ 或 $e>\sqrt{2}-1$. 又由 $e\in(0,1)$，所以椭圆的离心率的取值范围是 $(\sqrt{2}-1,1)$，故选：C.

知乎@余命数

例题 3.82 (中点弦问题) （2024·陕西西安·西安市大明宫中学校考模拟预测）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2c$，左焦点为 F，直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，点 P 是线段 AB 的中点，P 的横坐标为 $\frac{1}{3}c$. 若直线 l 与直线 PF 的斜率之积等于 $-\frac{3}{16}$，则 C 的离心率为__.

解 答案：$\frac{1}{2}$. $F(-c,0)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$. 因为点 P 是线段 AB 的中点，P 的横坐标为 $\frac{1}{3}c$，所以 $x_1+x_2=\frac{2c}{3}$，$P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{c}{3},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，则 $k_{PF}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}+c}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{4c}{3}}=\frac{3(y_1+y_2)}{8c}$.

由直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，得 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，两式相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，即 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$，所以 $\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\frac{b^2}{a^2}$，即 $k_l\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$.

所以 $k_l=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{2c}{3(y_1+y_2)}$.

则 $k_l\cdot k_{PF}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{2c}{3(y_1+y_2)}\cdot\frac{3(y_1+y_2)}{8c}=-\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{3}{16}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，故 $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，得 $e=\frac{1}{2}$.

例题 3.83 (已知焦点三角形两底角) 已知 F_1,F_2 分别是圆 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右两个焦点，若在 D 上存在点 P 使 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，且满足 $2\angle PF_1F_2=\angle PF_2F_1$，则椭圆的离心率为（　）

A. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\sqrt{3}-1$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 答案：B. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，且满足 $2\angle PF_1F_2=\angle PF_2F_1$，所以 $\angle PF_1F_1=60^\circ$，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，所以 $|PF_1|=|F_1F_2|\sin 30^\circ=c,|PF_1|=|F_1F_2|\cos 30^\circ=\sqrt{3}c$，所以 $|PF_1|+|PF_1|=\sqrt{3}c+c=2a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$；故选：$B$

例题 3.84 (利用渐近线的斜率) （2024·山东淄博二模）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，则离心率 e 为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

解 答案：B. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，则 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. 离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选：B.

知乎@余命数

例题 3.85 (坐标法) （2024·全国·模拟预测）已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的上、下焦点，过点 F_2 且与 y 轴垂直的直线与 C 的一条渐近线相交于点 P，且 P 在第四象限，四边形 PF_1QF_2 为平行四边形. 若直线 QF_2 的倾斜角 $\alpha\in[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}]$，则 C 的离心率的取值范围是__.

知乎@余

解 答案：$[\frac{\sqrt{21}}{3},\sqrt{5}]$. 如图所示，由双曲线的对称性可知 Q 也在双曲线的渐近线上，且 Q 在第二象限，由 $PF_2\perp y$ 轴可知 $QF_1\perp y$ 轴，设 $Q(x_0,c)$，又 Q 在渐近线 $y=-\frac{a}{b}x$ 上，所以 $Q\left(-\frac{bc}{a},c\right)$，则 $\tan\alpha=k_{QF_2}=-\frac{2a}{b}$，因为 $\alpha\in[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}]$，所以 $\tan\alpha\in[-\sqrt{3},-1]$

知乎@余命数

例题 3.86 (利用焦半径的取值范围) 已知双曲线 $M:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2,|F_1F_2|=2c$. 若双曲线 M 的右支上存在点 P，使 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{3c}{\sin\angle PF_2F_1}$，则双曲线 M 的离心率的取值范围为__.

解 答案：$(1,\frac{2+\sqrt{7}}{3})$. 依题意，点 P 在双曲线的右支，P 不与双曲线顶点重合，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由正弦定理得：$\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{|PF_1|}{\sin\angle PF_2F_1}$，因 $\frac{a}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{3c}{\sin\angle PF_2F_1}$，于是得 $\frac{|PF_2|}{a}=\frac{|PF_1|}{3c}$，而点 P 在双曲线 M 的右支上，即 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，从而有 $|PF_2|=\frac{2a^2}{3c-a}$，点 P 在双曲线 M 的右支上运动，并且异于顶点，于是有 $|PF_2|>c-a$，因此 $\frac{2a^2}{3c-a}>c-a$，而 $c>a>0$，整理得 $3c^2-4ac-a^2<0$，即 $3e^2-4e-1<0$，解得 $\frac{2-\sqrt{7}}{3}<e<\frac{2+\sqrt{7}}{3}$，又 $e>1$，故有 $1<e<\frac{2+\sqrt{7}}{3}$. 所以双曲线 M 的离心率的取值范围为 $(1,\frac{2+\sqrt{7}}{3})$. 故答案为：$(1,\frac{2+\sqrt{7}}{3})$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.87 (十九·四心问题) (2024·湖北·模拟预测) 斜率为 1 的直线与双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 交于两点 A,B, 点 C 是 E 上的一点, 满足 $AC\perp BC,\triangle OAC,\triangle OBC$ 的重心分别为 $P,Q,\triangle ABC$ 的外心为 R. 记直线 OP,OQ,OR 的斜率为 k_1,k_2,k_3. 若 $k_1k_2k_3=-27$, 则双曲线 E 的离心率为__.

解 答案: 2. 不妨取 AC,BC 的中点 M,N. 因为 $\triangle OAC$ 的重心为 P, 且 P 在中线 OM 上, 所以 $k_1=k_{OP}=k_{OM},k_2=k_{OQ}=k_{ON}$. 由中点弦结论知, $k_{OM}k_{AC}=k_{OM}k_{BC}=\frac{b^2}{a^2}$、$\therefore k_1k_{AC}=k_2k_{BC}=\frac{b^2}{a^2}$、$\therefore k_1k_{AC}k_2k_{BC}=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2$, 因为 $AC\perp BC$, 所以 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$, $\therefore k_1k_2=-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2$, 又由 $AC\perp BC$, 可得 $\triangle ABC$ 的外心 R 为 AB 的中点, 于是由中点弦结论知 $k_{OR}\cdot k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$, 又 $k_{AB}=1$, 所以 $k_{OR}=\frac{b^2}{a^2}$, 即 $k_3=\frac{b^2}{a^2}$. 由 $k_1k_2k_3=-27$ 得, $-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^3=-27$, 解得 $\frac{b^2}{a^2}=3$, 所以双曲线 E 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$.

知乎@余命数

例题 3.88 (平面截圆锥 (丹林球) 问题) "用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥, 当圆锥的轴与截面所成的角不同时, 可以得到不同的截口曲线", 利用这个原理, 小强在家里用两个射灯在墙上投影出两个相同的椭圆 (图 1), 射灯射出的光锥视为圆锥且一条母线恰好与墙面垂直. 图 2 是一个射灯投影的直观图, 圆锥 PO 的轴截面 APB 是等边三角形, 椭圆 O_1 所在平面为 α, $PB\perp\alpha$, 则椭圆 O_1 的离心率为__.

解 答案: $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 设 $AB=2r$, 由于 $PB\perp\alpha$, 所以 $PB\perp AM$, 在等边三角形 PAB 中, 点 M 为 PB 的中点, 于是 $AM=\sqrt{3}r$, 在平面 α 中, 由椭圆的对称性可知, $AO_1=MO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}r$, 连接 OO_1, PO_1, 延长 PO_1 与 AB 交于点 Q, ……

知乎@余命数

3.4 设点法的技术基础

已在 第3.3节 中建立过联立、韦达定理与切线公式. 从本节起, 我们把注意力转向另一种参量选择, 即设点法.

设点法把曲线上动点的坐标直接设为参数, 以曲线方程为约束, 把几何条件写成关于这些坐标的等式. 它的动机在于减少变量, 让动点始终骑在曲线上, 并把曲线方程当作全局代换式反复使用. 这一视角对应 第四卷第 19 章中的满足式条件, 即把题设条件理解为对自由度的命名, 参见 第四卷第 19.4 节的条件分类与 第四卷第 19.7 节的参数翻译策略.

设线法先引一条截线 $y=kx+m$, 通过联立与韦达定理读出端点对称量; 设点法直接给动点命名, 以曲线方程作整体代换, 把计算留在坐标层面. 选择标

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

准是题面先给点还是先给线: 条件用端点坐标对称式表达, 如中点、定比、垂直 $x_1x_2+y_1y_2=0$ 或斜率积, 选设点法; 条件用直线参数表达, 如截距、斜率、弦长, 或需要整体韦达和积, 选设线法. 这一区分在 第3.5节 中进一步展开.

做法可作如下概括. 设曲线上动点 (x_0,y_0), 以曲线方程为约束, 将几何条件写成关于 x_0,y_0 的代数式并作整体代换. 本节整理其中常用的技术, 供 第3.5节 与 第3.6节 选用.

3.4.1 两点式直线方程的直写与变形

已在 第3.1节 中了解过了直线方程的各形式. 这里换一个角度, 即见点写方程, 再看这些形式的关系, 这一视角在设点法中尤为常用.

设有两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$. 当 $x_1\neq x_2$ 且 $y_1\neq y_2$ 时, 两点式

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

知乎@余命数

可对称地理解为, 直线上任一点 $P(x,y)$ 的坐标, 都可用 P_1,P_2 的坐标线性插值而得. 引入参数 λ 令

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\lambda,\qquad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\lambda,$$

即得直线的参数式

$$\begin{cases}x=x_1+\lambda(x_2-x_1)\\ y=y_1+\lambda(y_2-y_1)\end{cases}\qquad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

这里 $\lambda=0$ 对应 P_1, $\lambda=1$ 对应 P_2, $\lambda=\frac{1}{2}$ 对应中点.

> **注 3.4 (线性插值)**
> 线性插值是由两个已知端点的值按比例还原中间值的方法. 当 λ 从 0 变到 1 时, $x_1+\lambda(x_2-x_1)$ 从 x_1 匀速变到 x_2, y 坐标同理; 横, 纵坐标共用同一个 λ 同步过渡, 点 $P(x,y)$ 便从 P_1 沿线段匀速移动到 P_2. $\lambda<0$ 或 $\lambda>1$ 时, P 落在 P_1P_2 的延长线上. 两点式中两个比值相等, 说的正是横, 纵坐标同步插值这一事实.

3.4.1.0.1 分母为零的退化情形 当 $x_1=x_2$ 时, 直线竖直, 方程直写为 $x=x_1$; 当 $y_1=y_2$ 时, 直线水平, 方程直写为 $y=y_1$. 实战中先判断两端点是否共竖/共横, 再决定是否套用标准两点式, 可避免分母为零的形式错误.

知乎@余命数

3.4.1.0.2 行列式形式与共线判定 两点式可改写为齐次形式

$$(y-y_1)(x_2-x_1)-(x-x_1)(y_2-y_1)=0,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

它与“P, P_1, P_2 三点共线”的行列式判据, 见 第3.4.5小节是同一代数条件, 只是把第三点取为动点 P.

3.4.1.0.3　与点斜式, 斜截式, 截距式的互化　当 $x_2 \neq x_1$ 时, 斜率 $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 两点式化为点斜式 $y - y_1 = m(x - x_1)$; 进一步若直线过 y 轴上点 $(0, b)$, 则化为斜截式 $y = mx + b$. 与截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 的互化, 只需取 $P_1 = (a, 0), P_2 = (0, b)$ 代入两点式即可.

三式之间的灵活切换, 在设点法中常常决定计算量, 凡涉及弦端点坐标, 优先用两点式或其参数式; 凡涉及斜率, 退回点斜式; 凡涉及截距, 直接截距式.

例题 3.89　已知直线过 $P_1(2, 1)$ 与 $P_2(4, 5)$, 分别用两点式, 点斜式, 截距式写出它的方程, 并求其在 x 轴, y 轴上的截距.

解　两点式: $\frac{y-1}{5-1} = \frac{x-2}{4-2}$, 即 $\frac{y-1}{4} = \frac{x-2}{2}$.

斜率 $m = \frac{5-1}{4-2} = 2$, 故点斜式 $y - 1 = 2(x - 2)$, 化为斜截式 $y = 2x - 3$.

令 $y = 0$ 得 $x = \frac{3}{2}$; 令 $x = 0$ 得 $y = -3$. 故 x 截距 $a = \frac{3}{2}$, y 截距 $b = -3$, 截距式 $\frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1$, 即 $\frac{2x}{3} - \frac{y}{3} = 1$.

三式互化验证: 两点式 $\frac{y-1}{4} = \frac{x-2}{2} \Rightarrow y - 1 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 3$, 与点斜式, 斜截式一致.

3.4.2　圆锥曲线方程的结构认识

标准方程(椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 抛物线 $y^2 = 2px$)的推导见第3.3节. 这里把它们当作曲线上点必须满足的约束, 在设点时作整体代换, 而不再逐项展开.

三类标准方程的代数骨架可对照如下:

- **椭圆**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 和为一, 两项同号, 界定有界闭曲线, $|x| \leq a, |y| \leq b$;
- **双曲线**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 差为一, 两项异号, 界定两支无界曲线, $|x| \geq a$(以 x 轴焦点型为例);
- **抛物线**: $y^2 = 2px$, 一平一次, 二次项与一次项平衡, 界定开口无界曲线.

统一二次型观点下, 它们都是 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 经旋转平移消交叉项与部分线性项后的标准形(判别式 $\Delta = B^2 - 4AC$ 的符号分类见 第3.3节).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

当动点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线上时，曲线方程成为可整体代换的恒等式. 例如椭圆上：

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \quad\Longrightarrow\quad b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2,\quad \frac{y_0^2}{b^2}=1-\frac{x_0^2}{a^2}.$$

这种方程作约束，整体代换的意识，是设点法区别于设线法的根本. 设线法联立直线 $y=kx+m$ 与曲线，通过韦达定理读出 x_1+x_2,x_1x_2 等对称量；而设点法让动点坐标 (x_0,y_0) 自始至终骑在曲线上，每当出现 x_0,y_0 的二次组合，就以曲线方程作一次整体约简.

知乎@余命数

例题 3.90 设 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上，求 $b^2x_0^2+a^2y_0^2$ 之值；又问 $4x_0^2-9y_0^2$ 是否为定值.

解 此处 $a^2=9,b^2=4$. 由 P 在椭圆上，$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$，两边乘 36 得 $4x_0^2+9y_0^2=36$.

第一式：$b^2x_0^2+a^2y_0^2=4x_0^2+9y_0^2=36$（整体代换，不必求 x_0,y_0）.

第二式：由 $\frac{y_0^2}{4}=1-\frac{x_0^2}{9}$ 得 $y_0^2=\frac{4}{9}(9-x_0^2)$. 故

$$4x_0^2-9y_0^2=4x_0^2-9\cdot\frac{4}{9}(9-x_0^2)=4x_0^2-4(9-x_0^2)=8x_0^2-36.$$

此值随 x_0 变化，不是定值；但若附加条件，如 x_0 给定便可定值. 此例说明，整体代换遇到差型组合时，往往需配合消元.

知乎@余命数

3.4.3 点差法的原理与公式推导

点差法是设点法处理弦中点问题的主要工具. 相关结论已经在 第3.3节 的二次曲线语境中见过；这里给出完整的两式相减、因式分解、代换中点推导，并明确适用条件与推广.

定理 3.17 (椭圆的弦中点斜率关系) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$，弦 P_1P_2 的中点为 $M(x_0,y_0)$，斜率

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

则

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\quad(y_0\neq0),$$

或等价地 $k\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$，其中 $k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$ $(x_0\neq0)$ 为中心 O 到中点 M 的斜率.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 因 P_1, P_2 在椭圆上,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

两式相减:

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0,$$

即

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0.$$

由中点公式 $x_1+x_2=2x_0, y_1+y_2=2y_0$, 且 $x_1\neq x_2$, 两边除以 x_1-x_2 得

$$\frac{2x_0}{a^2}+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{2y_0}{b^2}=0.$$

注意 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$, 故

$$\frac{x_0}{a^2}+k\cdot\frac{y_0}{b^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \quad (y_0\neq 0).$$

当 $x_0\neq 0$ 时, $k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$, 于是 $k\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}$. □

3.4.3.0.1 适用条件

- 推导中约去了 x_1-x_2, 故要求弦非竖直 ($x_1\neq x_2$). 当弦竖直时, k 不存在, 中点 $M=(x_1,0)$ (两端关于 x 轴对称), 应直接用几何结论, 不必强行套用斜率公式.
- 当 $y_0=0$ 时, 中点在 x 轴上, 由 $\frac{x_0}{a^2}+k\cdot\frac{y_0}{b^2}=0$ 得 $x_0=0$, 即弦的中点为原点; 实战中 $y_0=0$ 且 $x_0\neq 0$ 时弦必竖直 ($x_1=x_2$, 斜率不存在).
- 中点 M 必须落在椭圆内部 (否则过 M 给定斜率的直线截不到实弦), 即 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

3.4.3.0.2 对称差分写法 只关心中点时, 可对称地设 $M(x_0,y_0)$ 为中点, 两端点为 $P_1(x_0+u,y_0+v), P_2(x_0-u,y_0-v)$. 代入椭圆方程并相减, 平方差直接给出

$$\frac{x_0u}{a^2}+\frac{y_0v}{b^2}=0, \qquad \text{即} \qquad k=\frac{v}{u}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \quad (u\neq 0).$$

这一写法省去四个端点坐标, 中点显式可见, 在 第3.5节 的双动点设而不求中尤为顺手.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.4.3.0.3　双曲线与抛物线的推广　对双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 同样的相减推导给出

$$k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\quad(y_0\neq 0),\qquad \text{即}\qquad k\cdot k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}.$$

知乎@余命数

对抛物线 $y^2=2px$, 设弦两端 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$, 中点 $M(x_0,y_0)$, 两式相减得

知乎@余命数

$$y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)\quad\Longrightarrow\quad(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2).$$

当 $x_1\neq x_2$ 时, $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 满足 $k\cdot 2y_0=2p$, 即 $k=\frac{p}{y_0}$ $(y_0\neq 0)$. 这正是抛物线弦中点斜率公式.

知乎@余命数

例题 3.91　求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 中, 过点 $M(2,1)$ 且以 M 为中点的弦所在直线方程.

解　先检验 M 在椭圆内部: $\frac{4}{16}+\frac{1}{9}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36}<1$, 成立.

由弦中点斜率关系 ($a^2=16,b^2=9,x_0=2,y_0=1$):

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{9\cdot 2}{16\cdot 1}=-\frac{9}{8}.$$

故所求弦的方程为

知乎@余命数

$$y-1=-\frac{9}{8}(x-2),\quad\text{即}\quad 9x+8y-26=0.$$

知乎@余命数

知乎@余命数

复核: 联立 $y=-\frac{9}{8}(x-2)+1$ 与椭圆, 所得二次方程的两根之和为 4, 即 $2x_0$, 与中点横坐标一致, 从略.

注 3.5
点差法给出的是**中点** ($\lambda=\frac{1}{2}$) 情形. 若弦上一点分弦成定比 λ, 中点公式不再适用, 但两式相减、因式分解的代数骨架仍然成立. 这一推广(定比点差法)在 第3.5节 中系统展开.

3.4.4　面积的行列式表达与坐标运算

知乎@余命数

三角形的面积, 已在 第3.3节 中以鞋带公式简短见过. 这里用二维向量叉乘重新推导并推广, 因为叉乘观点是后续多边形面积与 第5.3节 中极点/极线讨论的共同入口.

知乎@余命数

设有向向量 $\vec{u}=(u_1,u_2),\vec{v}=(v_1,v_2)$. 定义二阶行列式

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{vmatrix}=u_1v_2-u_2v_1.$$

它是平面叉乘 $u_1v_2-u_2v_1$, 几何意义是 $|\det(\vec{u},\vec{v})|$ 等于 $\vec{u},\vec{v}$ 张成的平行四边形面积, 符号反映绕向(逆时针为正).

知乎@余命数

定理 3.18 (三角形面积的行列式公式) 设平面上三点 P_1,P_2,P_3 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3). 则 $\triangle P_1P_2P_3$ 的有向面积为

$$\begin{aligned} S_{\to} &= \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}) \\ &= \frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)], \end{aligned}$$

其通常(无向)面积为 $|S_{\to}|$. 等价地, 展开后得对称的**鞋带公式**

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|.$$

知乎@余命数

证明 以 P_1 为简化原点记 $\vec{p}=\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$,$\vec{q}=\overrightarrow{P_1P_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$. 两向量张成的平行四边形面积为 $|\vec{p}|\,|\vec{q}|\sin\theta$. 由平面叉乘的几何意义

$$\det(\vec{p},\vec{q})=|\vec{p}|\,|\vec{q}|\sin\theta,$$

故平行四边形面积为 $|\det(\vec{p},\vec{q})|$, 三角形为其一半:

$$S=\frac{1}{2}|\det(\vec{p},\vec{q})|=\frac{1}{2}|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)|.$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

去绝对值的代数符号取决于 P_1,P_2,P_3 的绕向(逆时针为正), 这正是 $S_{\to}$ 的定义.

为得鞋带公式, 展开行列式:

$$\begin{aligned} &(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1) \\ &=x_2y_3-x_2y_1-x_1y_3+x_1y_1-(y_2x_3-y_2x_1-y_1x_3+y_1x_1) \\ &=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2). \end{aligned}$$

取绝对值即得鞋带公式. □

3.4.4.0.1 原点特款 若三角形有一顶点在原点 O, 另两顶点为 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$, 则

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

知乎@余命数

这是设点法中原点与两动点三角形问题的标准入口, 见 第3.6节.

知乎@余命数

3.4.4.0.2 四边形分割 对四边形 $ABCD$, 可沿对角线 AC 分割为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$, 面积相加; 或直接用鞋带公式推广到 n 边形 (顶点逆时针排列 $P_1,\dots,P_n$, $P_{n+1}=P_1$):

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-y_ix_{i+1})\right|.$$

鞋带之名正来自交替相乘后求和, 如鞋带交叉穿引.

例题 3.92 设 $A(2,0)$、$B(0,1)$、$C(-2,0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的三点, 用行列式公式求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 由鞋带公式

$$S=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|.$$

代入 $A=(2,0),B=(0,1),C=(-2,0)$, 得

$$S=\frac{1}{2}|2\cdot(1-0)+0\cdot(0-0)+(-2)\cdot(0-1)|=\frac{1}{2}|2+0+2|=2.$$

有向行列式为正, 说明顺序 $A\to B\to C$ 为逆时针. 几何上视 AC 为底(长 4, 落在 x 轴上), B 到 x 轴高为 1, 直观面积 $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$, 与行列式法一致.

3.4.5 三点共线的坐标刻画

已在 第1.2节 中了解过三点共线的向量刻画与定比分点公式. 在坐标下它们有四种等价写法, 证明后可按条件选用.

定理 3.19 (三点共线的四种坐标刻画) 设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3)$ 互异, 则下列四条件等价:

1. **斜率相等**: 当 $x_2\neq x_1,x_3\neq x_1$ 时, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$;
2. **向量共线**: $\det(\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3})=0$, 即 $(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)=0$;
3. **行列式为零**: $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$;
4. **定比分点**: 存在 $\lambda\neq -1$ 使 P_2 分 P_1P_3 成定比 λ (即 $\overrightarrow{P_1P_2}=\lambda\overrightarrow{P_2P_3}$), 坐标满足 $x_2=\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda}$, $y_2=\frac{y_1+\lambda y_3}{1+\lambda}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 (1)⇔(2)：当 $x_2\neq x_1, x_3\neq x_1$ 时，斜率相等即 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$，交叉相乘恰为向量共线条件. 若某分母为零（竖直弦），则三横坐标相等，向量共线条件自动成立.

(2)⇔(3)：展开向量共线条件，与面积定理证明中的展开相同，得

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0,$$

这正是三阶行列式为零.

(2)⇔(4)：向量共线意味着存在实数 λ 使 $\overrightarrow{P_1P_2}=\lambda\overrightarrow{P_2P_3}$（当 P_2 不在 P_1P_3 的反向延长线上时 $\lambda\neq -1$ 可保证分点在直线上且公式有意义）. 写成分量即定比分点坐标公式. 反之，定比分点公式直接给出 $\overrightarrow{P_1P_2}=\lambda\overrightarrow{P_2P_3}$，故向量共线. □

已知斜率或易求斜率时用 (1)；涉及面积或叉乘时用 (2)，同时 $S=0$ 即共线；需要齐次或对称书写时用 (3)；题中显含分比 λ 或中点时用 (4).

定比分点公式的两个常用变形：$\lambda=1$ 即中点；给定 P 与 P_1 反解 P_2：$x_2=\frac{(1+\lambda)x_P-x_1}{\lambda}$. 后者是 第3.5节 定比点差法的入口.

例题 3.93　抛物线 $C: y^2=4x$，焦点 $F(1,0)$. 直线 l 过 F 与 C 交于 A,B，设 $|AB|=8$ 且 l 不垂直于 x 轴.

1. 求 l 的方程；
2. 设 P 在 AB 上满足 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $\triangle OAP$ 的面积，其中 O 为原点.

解 (1) 设 $l: y=k(x-1)$，与 $y^2=4x$ 联立消 y：

$$k^2(x-1)^2=4x\Longrightarrow k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0.$$

根 x_1,x_2 之和 $\frac{2k^2+4}{k^2}=2+\frac{4}{k^2}$，积 1. 由 第3.3节 弦长公式

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(2+\frac{4}{k^2}\right)^2-4}=\frac{4(1+k^2)}{k^2}.$$

令 $|AB|=8$：$\frac{4(1+k^2)}{k^2}=8\Rightarrow k^2=1$. 取 $k=1$，即 $l: y=x-1$（$k=-1$ 同理，见 (2) 末）.

(2) 此时 A,B 的横坐标满足 $x^2-6x+1=0$，解得 $x=3\pm2\sqrt{2}$，对应 $y=2\pm2\sqrt{2}$. 设

$$A(3-2\sqrt{2},\,2-2\sqrt{2}),\qquad B(3+2\sqrt{2},\,2+2\sqrt{2}).$$

由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$（定比 $\lambda=3$），

$$x_P=\frac{x_A+3x_B}{4},\qquad y_P=\frac{y_A+3y_B}{4}.$$

代入得 $x_P=3+\sqrt{2}$，$y_P=2+\sqrt{2}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对 $\triangle OAP$ 用原点特款 $S=\frac{1}{2}|x_Ay_P-x_Py_A|$:

$$x_Ay_P=(3-2\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=2-\sqrt{2},$$
$$x_Py_A=(3+\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})=2-4\sqrt{2},$$

故

$$S=\frac{1}{2}|(2-\sqrt{2})-(2-4\sqrt{2})|=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

若取 $k=-1$, 由关于 x 轴的对称性, 同样得 $S=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3.4.6 切线方程与切点弦方程

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在其上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程已在 第3.3节 中推导过. 把椭圆方程中的一个 x 和一个 y 替换为切点的 x_0,y_0. 我们称这一做法为**替换法则**.

$$\text{椭圆:}\quad \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$
$$\text{双曲线:}\quad \frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1,$$
$$\text{抛物线}y^2=2px:\quad y\,y_0=p(x+x_0).$$

抛物线情形将 y^2 替换为 $y\,y_0$, $2x$ 替换为 $x+x_0$(平方项变相乘, 一次项变平均), 与前两类曲线遵守同一法则.

定理 3.20 (切点弦方程) 设 $T(x_T,y_T)$ 为圆锥曲线 $\mathcal{C}$ 外一点, 自 T 作 $\mathcal{C}$ 的两条切线分别切于 P_1,P_2, 则这两切点的连线 P_1P_2, 称为 T 关于 $\mathcal{C}$ 的**切点弦**的方程仍取替换法则形式. 具体地, 对于

$$\text{椭圆}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1:\quad \frac{xx_T}{a^2}+\frac{yy_T}{b^2}=1;$$

$$\text{双曲线}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1:\quad \frac{xx_T}{a^2}-\frac{yy_T}{b^2}=1;$$

$$\text{抛物线}y^2=2px:\quad y\,y_T=p(x+x_T).$$

证明 以椭圆为例. 设 $P_1=(x_1,y_1),P_2=(x_2,y_2)$ 均在椭圆上. 由替换法则, 过 P_1 的切线为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$. 该切线过外点 T, 故

$$\frac{x_1x_T}{a^2}+\frac{y_1y_T}{b^2}=1.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

同理, 过 P_2 的切线亦过 T:

$$\frac{x_2x_T}{a^2}+\frac{y_2y_T}{b^2}=1.$$

这说明 P_1,P_2 都满足同一个一次方程

$$\frac{x_Tx}{a^2}+\frac{y_Ty}{b^2}=1.$$

此方程表示一条直线, 且经过 P_1 和 P_2, 故必为弦 P_1P_2 所在直线. 双曲线与抛物线情形的证明完全平行, 从略. □

注 3.6 (同构萌芽)
切点弦方程与切线方程*形式上完全相同*, 把曲线方程替换一遍代入 (x_T,y_T) 即可. 当 T 在曲线上时, 该方程退化为切线(单点弦); 当 T 在曲线外时, 表示切点弦. 这一同构性源于二次曲线方程的代数对称性. 当 T 在曲线内部时, 同一形式仍定义一条由 T 与曲线纯代数规定的直线, 称为 T 的**极线**. 极点与极线以及它们同切点弦、切线的统一, 见 第5.3节.

知乎@余命数

例题 3.94 椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 外一点 $T(0,2)$.

1. 用替换法则求 T 关于 C 的切点弦方程;
2. 验证切点弦两端点处的两条切线确实过 T.

解 (1) 由切点弦方程(椭圆), $a^2=4,b^2=1,T=(0,2)$:

$$\frac{0\cdot x}{4}+\frac{2\cdot y}{1}=1,\quad \text{即}\quad y=\frac{1}{2}.$$

故切点弦 $\ell:y=\frac{1}{2}$.

知乎@余命数

(2) 联立 ℓ 与 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}=1\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$. 切点为

$$P_1(\sqrt{3},\tfrac{1}{2}),\qquad P_2(-\sqrt{3},\tfrac{1}{2}).$$

过 P_1 的切线: $\frac{\sqrt{3}x}{4}+\frac{y}{2}=1$, 代入 $T(0,2)$: $0+1=1$, 通过. 过 P_2 的切线: $\frac{-\sqrt{3}x}{4}+\frac{y}{2}=1$, 代入 T: 亦过 T. 两切线均过 T, 与切点弦由 T 经替换法则唯一确定这一结论一致.

3.4.7 比例性质在坐标关系中的运用

知乎@余命数

合分比与等比是初等数学最基本的代数工具. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 则 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 称为合比, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 称为分比, $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ 称为反合比. 在坐标关系处理中, 这些性质常把韦达式的和差积比重组为新的可用形式.

3.4.7.0.1 合分比的小型化简 设直线 $y=kx+m$ 与圆锥曲线交于 A,B, 韦达定理 (第3.3节) 给出 x_1+x_2,x_1x_2. 但许多题型需要 x_1 与 x_2 的**比值**类信息, 如 $\frac{AF}{FB}$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

或 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ 中的 λ. 此时可设 $t=\frac{x_1}{x_2}$, 则 $x_1=t\,x_2$. 由和 $x_2(1+t)=-\frac{\beta}{\alpha}$, 由积 $t\,x_2^2=\frac{\gamma}{\alpha}$. 两式消去 x_2, 得

$$\frac{(1+t)^2}{t}=\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}.$$

这种把 x_1,x_2 比值约束嵌入韦达和积的写法, 是后韦达, 见 第3.9节的常用工艺.

3.4.7.0.2 等比的应用 等比性质 $\frac{a_1+\cdots+a_k}{b_1+\cdots+b_k}=r$(当各 $\frac{a_i}{b_i}=r$ 同号成立时)在涉及多个分式同结构时立刻化简. 例:若 k 个椭圆上的点 $P_i=(x_i,y_i)$ 均满足 $\frac{x_i}{a}+\frac{y_i}{b}=\frac{1}{2}$, 全部相加得 $\frac{\sum x_i}{a}+\frac{\sum y_i}{b}=\frac{k}{2}$, 一次即得整体坐标和的关系.

例题 3.95 直线 $y=x-1$ 截抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B, F 为焦点 $F(1,0)$. 求 $\frac{AF}{FB}$ (带符号的有向分比), 并用韦达 + 合分比复核对结果.

知乎@余命数

解 联立 $y=x-1$ 与 $y^2=4x$: $(x-1)^2=4x$, 即 $x^2-6x+1=0$.A,B 的横坐标 x_1,x_2 满足 $x_1x_2=1$ 且 $x_1+x_2=6$. 取 A 对应较小根 $x_1=3-2\sqrt{2}$, B 对应较大根 $x_2=3+2\sqrt{2}$. 因 $x_F=1\in(x_1,x_2)$, 有向分比

$$\frac{AF}{FB}=\frac{1-x_1}{x_2-1}=\frac{1-(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})-1}=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}$$

(最后一步分母有理化: $\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=3-2\sqrt{2}$).

$x_1x_2=1\Rightarrow x_2=\frac{1}{x_1}$. 故

$$\frac{1-x_1}{x_2-1}=\frac{1-x_1}{\frac{1}{x_1}-1}=\frac{(1-x_1)\,x_1}{1-x_1}=x_1=3-2\sqrt{2},$$

与直接代入法一致. 此处 $x_1x_2=1$ 这一韦达积关系, 把比值问题瞬间归于单根 x_1 的代换, 正是合分比性质嵌入韦达的结果.

3.4.8 本节习题

3.7. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上一点 P 满足 $x_P+y_P=2$, 求整体代换量 $4x_P^2+9y_P^2$ 之值.(提示:由曲线方程先得 $4x_P^2+9y_P^2=36$.)

3.8. 写出过 $P_1(-1,2)$ 与 $P_2(3,-1)$ 的直线的两点式, 点斜式与截距式三种方程, 并写出其参数式, 约定 $\lambda=0$ 在 P_1, $\lambda=1$ 在 P_2.

3.9. 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中, 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的弦的中点轨迹, 给出其方程与取值范围.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.10.　用行列式公式(鞋带公式)求三点 $(2,3),(-1,5),(4,-1)$ 所围三角形的面积, 并据有向面积符号判定三点绕向.

3.11.　椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 外一点 $T(4,0)$, 用替换法则求 T 关于 C 的切点弦方程, 并求切点弦与 C 的两公共点坐标.

3.12.　直线 $y=k(x-1)$ 截抛物线 $y^2=4x$ 于 A,B, $F(1,0)$ 为焦点. 已知 $x_1x_2=1$ (韦达积), 用合分比性质证明: $\frac{AF}{FB}=\frac{1-x_1}{x_2-1}$ 可仅由 x_1 表出, 即与 x_2 通过 $x_1x_2=1$ 联系, 并对 $k=1$ 给出具体数值.

3.13.　椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上过内点 $M(1,2)$ 且以 M 为中点的弦, 求该弦所在直线的斜率与方程.

3.14.　设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 为抛物线 $y^2=4x$ 上两点, O 为原点. 用原点特款面积公式写出 $S_{\triangle OAB}$ 关于 x_1,y_1,x_2,y_2 的表达式; 若 AB 中点为 $(3,1)$, 求 $S_{\triangle OAB}$ 是否可由此唯一确定, 并说明理由.

3.5 设点法的参量选择

参量选取直接决定后续计算繁简. 第3.4节 已介绍设点法的基本技术, 以曲线上动点坐标 (x_0,y_0) 为参数, 以曲线方程作整体约束, 把几何条件直译为关于这些坐标的代数等式. 本节讨论四种常见策略: 单动点参数法、双动点参数法、定比点差法、旋转设点法. 这四种选择都对应 第四卷第 19 章中的**满足式条件**, 即把题设条件理解为对自由度的命名, 用参数把约束直译成方程, 参见 第四卷第 19.4 节与第四卷第 19.7 节. 这些选择与具体题型的对应在 第3.6节 中展开.

判断标准只看题面条件. 只有一个自由动点时, 用单动点参数法; 两个独立动点, 如弦的两端时, 用双动点参数法, 即设而不求, 或改用设线法; 弦上一点分弦成定比 λ(含中点 $\lambda=1$)时, 用定比点差法; 显含旋转、等长垂直弦或定斜率积时, 用旋转设点法.

3.5.1 单动点参数法

凡题中只有一个自由动点, 其余对象由它与曲线的几何关系唯一决定, 一律设该点坐标为参量. 曲线方程消掉一个自由度, 所余问题往往是单变量函数的最值或定值.

3.5.1.0.1　动点在曲线上　设动点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线上并写出约束 $F(x_0,y_0)=0$; 把切线、距离、面积、夹角等条件写成关于 x_0,y_0 的代数式; 用曲线方程整体代换, 把二元目标化为一元函数 $f(t)$, 再求导、配方或用基本不等式. 若目标含斜率 $k=\frac{y_0}{x_0}$, 可令 $t=\frac{y_0}{x_0}$ 并配合齐次结构; 定义域须避开 $x_0=0$ 或 $y_0=0$ 等退化点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.96 (切线截距) 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0y_0\neq 0)$, 过 P 作椭圆的切线, 分别交 x 轴、y 轴于 A,B. 求 $|AB|$ 的最小值.

解

由 第3.3节 切线公式(替换法则), 切线为

$$\frac{x\,x_0}{4}+y\,y_0=1.$$

令 $y=0$ 得 $A=(\frac{4}{x_0},0)$; 令 $x=0$ 得 $B=(0,\frac{1}{y_0})$. 故

$$|AB|^2=\frac{16}{x_0^2}+\frac{1}{y_0^2}.$$

由 P 在椭圆上, $y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$. 令 $t=x_0^2\in(0,4)$, 则

$$f(t)=\frac{16}{t}+\frac{4}{4-t},\qquad t\in(0,4).$$

$f'(t)=-\frac{16}{t^2}+\frac{4}{(4-t)^2}$. 令 $f'(t)=0$ 得 $\frac{t}{4-t}=2$ (取正根), 即 $t=\frac{8}{3}$. 又 $f''(t)=\frac{32}{t^3}+\frac{8}{(4-t)^3}>0$, 故 $t=\frac{8}{3}$ 为唯一极小点, 且

$$f\left(\tfrac{8}{3}\right)=6+3=9.$$

因此 $|AB|_{\min}=3$. 取最小值时 $x_0^2=\frac{8}{3}$, $y_0^2=\frac{1}{3}$, 切点为 $(\pm\frac{2\sqrt{6}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3})$ 四点之一.

3.5.1.0.2 动点不在曲线上 有时唯一的自由动点并不在目标曲线上, 而是相对于曲线的位置已定, 如定点在圆内或椭圆外. 此时仍把真正变化的曲线上点 P 设为参量, 把定点到 P 的距离、夹角、面积等写成 P 的函数, 再用曲线方程消元. 几何上, 这相当于以定点为观测点, 考察曲线上点的参数化像.

例题 3.97 (圆内定点对动点的张角) 圆 $x^2+y^2=r^2$ 上动点 $P(x_0,y_0)$, 定点 $A(a,0)$ $(0<a<r)$. 设 $\angle OAP=\theta$, 其中 O 为原点. 用单动点参数表示 $\cos\theta$, 并指出 θ 的取值范围思路.

解 向量 $\overrightarrow{AO}=(-a,0)$, $\overrightarrow{AP}=(x_0-a,y_0)$. 由夹角公式

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AO}|\,|\overrightarrow{AP}|}=\frac{a-x_0}{\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

又 $x_0^2+y_0^2=r^2$, 故 $(x_0-a)^2+y_0^2=r^2-2ax_0+a^2$. 令 $t=x_0\in[-r,r]$, 则

$$\cos\theta=\frac{a-t}{\sqrt{r^2-2at+a^2}}.$$

这是 t 的单变量函数. 对 θ 的范围, 只需研究上式在 $[-r,r]$ 的最小值; θ 最大时 $\cos\theta$ 最小, 发生在 $t=r$ 或 $t=-r$ 处的端点. 关键一步是把夹角条件写成内积, 再用圆方程把角度问题化为一元函数.

知乎@余命数

3.5.1.0.3　单动点策略的边界　最佳适用面是一自由动点加切线、距离、面积、夹角条件. 若出现两个独立动点, 强行只设一个会丢失自由度, 应改用双动点或设线法; 若条件显含旋转对称, 应改用旋转设点法.

知乎@余命数

3.5.2 双动点参数法

题中出现两个独立动点(典型如弦 AB 的两端)时, 单点参量已不足. 双动点参数法同时给两个端点命名, 再**设而不求**, 即不分别求 x_1,y_1,x_2,y_2, 而是用相减、相加提取对称量 $x_1\pm x_2$、$y_1\pm y_2$、x_1x_2、y_1y_2. 其基本骨架在 第3.4节 中系统推导过; 本节强调对称差分的写法.

3.5.2.0.1　操作骨架

1. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 在曲线上, 写出 $F(x_1,y_1)=0, F(x_2,y_2)=0$;
2. **相减**, 得 $(x_1-x_2),(y_1-y_2)$ 的因式, 常引出斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 与中点关系;
3. **相加**, 得 x_1+x_2、y_1+y_2 等和式, 便于写中点或垂直条件 $x_1x_2+y_1y_2=0$;
4. 把几何条件写成对称式, 整体消元.

知乎@余命数

当 $M(x_0,y_0)$ 是弦 AB 的中点时, 最省的对称差分写法是

$$A=(x_0+u,\,y_0+v),\qquad B=(x_0-u,\,y_0-v).$$

弦长 $|AB|=2\sqrt{u^2+v^2}$, 斜率 $k=\frac{v}{u}$, 中点显式可见. 第3.4节 的点差法正是这种对称差分在 $\lambda=1$ 时的特例.

例题 3.98 (中点与斜率) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$. 用对称差分求弦 AB 的斜率 ($y_0\neq0$).

解 设

$$A=(x_0+u,\,y_0+v),\qquad B=(x_0-u,\,y_0-v),$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

其中 $u \neq 0$. 两端点都在椭圆上.

$$\frac{(x_0+u)^2}{a^2}+\frac{(y_0+v)^2}{b^2}=1, \qquad \frac{(x_0-u)^2}{a^2}+\frac{(y_0-v)^2}{b^2}=1.$$

两式相减,

$$\frac{4x_0u}{a^2}+\frac{4y_0v}{b^2}=0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x_0u}{a^2}+\frac{y_0v}{b^2}=0.$$

知乎@余命数

由 $k=\frac{v}{u}$ 得

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \qquad (y_0\neq 0).$$

这就是 第3.4节 中的弦中点斜率关系;对称差分把四个端点坐标压缩成 (x_0,y_0) 与 (u,v) 两组量.

知乎@余命数

例题 3.99 (垂直弦) 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 满足 $OA\perp OB$(O 为原点). 用双动点参数法推出关于 x_1,x_2,y_1,y_2 的对称关系, 并说明如何过渡到定值 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}$.

解 约束为

$$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1, \qquad \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1, \qquad x_1x_2+y_1y_2=0.$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

由 $OA\perp OB$ 得 $y_1y_2=-x_1x_2$. 相加视角给出

$$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2}{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}.$$

这只是双点参写出的对称式; 若还要具体求值, 可引入弦 AB 的直线方程 $y=kx+m$ 联立椭圆读韦达(设线法), 或改用参数角直接吃掉垂直条件, 见旋转设点法中的例. 双动点参数法在此类点式对称条件中指明该算什么, 而定值计算常需与设线法或参数法配合.

3.5.2.0.2 双点参 vs 设线法 双动点参数法适合用端点坐标对称式表达的条件, 如中点、垂直 $x_1x_2+y_1y_2=0$、定比. 设线法适合用直线参数表达的条件, 如截距、斜率、弦长. 中点 (x_0,y_0) 与斜率 k 由点差联系;韦达的 x_1+x_2,x_1x_2 即对称量的线参版本. 选择标准只看题面先给出的是点还是线.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.5.3 定比点差法

第3.4节 的点差法处理中点（$\lambda=1$ 的内分）. 若弦 AB 上一点 M 分 $\overrightarrow{AB}$ 成定比 $\lambda=\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}(\lambda\neq-1)$, 中点公式失效, 但两式相减、因式分解的代数骨架仍成立. 第5.3节 的调和分割把定比写成

知乎@余命数

$$P=\frac{A+\lambda B}{1+\lambda},\qquad Q=\frac{A-\lambda B}{1-\lambda},$$

其中 P,Q 是线段 AB 的一对调和共轭点. 该节的极点与极线定理进一步说明, 当割线绕定点 P 旋转时, 所有调和对点 Q 落在同一条直线上, 即 P 关于二次曲线的极线. 本节把这一推广写成独立的代数方法, 称为**定比点差法**.

知乎@余命数

定理 3.21 (定比点差关系) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 A, 点 $M(x_0,y_0)$ 分 $\overrightarrow{AB}$ 成定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$, 由此确定点 B, 斜率 $k=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x_A\neq x_B)$. 引入定比差分坐标

$$A=(x_0-\lambda u,\,y_0-\lambda v),\qquad B=(x_0+u,\,y_0+v),$$

其中 $k=\frac{v}{u}(u\neq0)$. 则 B 也在椭圆上当且仅当

$$\frac{-2x_0u+(\lambda-1)u^2}{a^2}+\frac{-2y_0v+(\lambda-1)v^2}{b^2}=0\quad\text{（已约去因子 }\lambda+1\text{）.}$$

特别地, 取中点 $\lambda=1$ 时退化为

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\qquad(y_0\neq0).$$

证明 由定比定义 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$, 上述 A,B 的坐标写法保证 M 恰为分点. 设 A 在椭圆上, 则 B 在椭圆上等价于

$$\frac{(x_0-\lambda u)^2}{a^2}+\frac{(y_0-\lambda v)^2}{b^2}=1,\qquad\frac{(x_0+u)^2}{a^2}+\frac{(y_0+v)^2}{b^2}=1.$$

两式相减, 第一项为

$$\frac{-2x_0u(\lambda+1)+u^2(\lambda^2-1)}{a^2}.$$

第二项同理. 因 $\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$ 且 $\lambda\neq-1$, 约去 $\lambda+1$ 即得结论. 当 $\lambda=1$ 时 u^2,v^2 项消失, 留下 $\frac{x_0u}{a^2}+\frac{y_0v}{b^2}=0$, 即 $k=\frac{v}{u}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. □

知乎@余命数

3.5.3.0.1 实用写法与相关点代入 考场上可固定 $M(x_0,y_0)$ 与斜率 k, 令

$$A=(x_0-\lambda t,\,y_0-\lambda kt),\qquad B=(x_0+t,\,y_0+kt),$$

代入椭圆两式相减, 得到关于 t 的方程; 再由弦真实存在($\Delta \geq 0$ 或 $t \neq 0$)定 k. 中点 $\lambda = 1$ 时一步回收点差公式.

若已知分点 M 而求一个端点的轨迹, 更直接的操作是**相关点代入**. 把 M 与已知端点的关系反解, 把未知端点用 M 的坐标表出, 再代回曲线方程. 它也适用于外分、中心对称等反射型映射.

例题 3.100 (中点 ($\lambda = 1$)) 求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 中, 以 $M(2,1)$ 为中点的弦所在直线方程.

解 先检验 M 在椭圆内部. $\frac{4}{16} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} < 1$. 由定比点差在 $\lambda = 1$ 时的结论,

$$k = -\frac{9 \cdot 2}{16 \cdot 1} = -\frac{9}{8}.$$

故弦方程 $y - 1 = -\frac{9}{8}(x - 2)$, 即 $9x + 8y - 26 = 0$.

例题 3.101 (一般定比 ($\lambda = 2$), 轨迹) 抛物线 $C : y^2 = 4x$ 上动点 $P_0(x_0, y_0)$, 定点 $A(4,0)$. 点 M 分 $\overrightarrow{AP_0}$ 成定比 $\lambda = 2$, 即 $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP_0}$. 求 M 的轨迹.

解 由定比分点公式

$$M = \frac{A + 2P_0}{3} = \Big(\frac{4 + 2x_0}{3}, \frac{2y_0}{3}\Big).$$

反解得 $x_0 = \frac{3x_M - 4}{2}$, $y_0 = \frac{3y_M}{2}$. 代回 $y_0^2 = 4x_0$.

$$\Big(\frac{3y_M}{2}\Big)^2 = 4 \cdot \frac{3x_M - 4}{2} \Longrightarrow y_M^2 = \frac{8}{3}\Big(x_M - \frac{4}{3}\Big).$$

轨迹是开口向右的抛物线, 顶点 $(\frac{4}{3}, 0)$, 焦参数 $p' = \frac{4}{3}$.

一般 λ 时, 同法得

$$v^2 = \frac{4\lambda}{1 + \lambda}\Big(u - \frac{4}{1 + \lambda}\Big),$$

顶点 $u_0 = \frac{4}{1+\lambda}$, 焦参数 $p' = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$. $\lambda = 2$ 时 $p' = \frac{4}{3}$, 与上一致; $\lambda \to +\infty$ 时 $p' \to 2$, 轨迹趋近原抛物线.

例题 3.102 (外分与相关点代入) 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上动点 $M(x_M, y_M)$, N 为 M 关于定点 $(1,0)$ 的对称点. 求 N 的轨迹方程.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 $(1,0)$ 为 MN 中点, 故 $N=(2-x_M,-y_M)$; 反解得 $M=(2-x_N,-y_N)$. 代回椭圆.

$$\frac{(2-x_N)^2}{4}+\frac{y_N^2}{3}=1\Longrightarrow\frac{(x_N-2)^2}{4}+\frac{y_N^2}{3}=1.$$

轨迹是原椭圆向右平移 2 个单位所得的合同椭圆. 这是相关点代入在 $\lambda=-1$ 反射情形的标准用法, 即反解 Φ^{-1} 代回曲线, 不必逐项展开联立.

3.5.3.0.2　定比点差法选用清单

- 已知中点求弦 $\Rightarrow\lambda=1$ 点差公式, 一步出斜率;
- 已知定比分点求轨迹 $\Rightarrow$ 反解曲线上点, 代回方程;
- 外分、中心对称 $\Rightarrow$ 反射型 $\Phi=\Phi^{-1}$, 轨迹为合同或平移曲线;
- $\lambda=-1$ 时分母 $1+\lambda=0$, 公式改写为中点公式, 不可硬套内分式.

知乎@余命数

3.5.4　旋转设点法

当几何条件涉及两线段垂直且等长, 或更一般地涉及向量的定角旋转时, 把一个动点写成另一个动点绕定点的旋转像, 通常比设两个独立点再配两条曲线约束更省参量.

知乎@余命数

3.5.4.0.1　等腰直角三角形的等长垂直条件 (旋转 90°)

设 $\overrightarrow{OP_2}$ 由 $\overrightarrow{OP_1}$ 绕原点逆时针旋转角 θ 得到, 则

知乎@余命数

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\tag{3-27}$$

即

$$(x_2,y_2)=(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta,\ x_1\sin\theta+y_1\cos\theta).$$

最常用的特例是 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 此时

$$(x_2,y_2)=(-y_1,x_1).$$

它把 $OP_1\perp OP_2$ 与 $|OP_1|=|OP_2|$ 两个条件压缩为一个代数关系. 若旋转中心为任意定点 $C(x_c,y_c)$, 先平移到 C 再旋转, 最后加回 C.

知乎@余命数

例题 3.103 (圆上旋转 90°) 圆 $x^2+y^2=r^2$ 上点 $A(x_1,y_1)$, 设 B 为 A 绕原点逆时针旋转 90° 的像. 证明 B 仍在圆上, 并求弦 AB 的中点轨迹.

解 由旋转公式 $B=(-y_1,x_1)$, 则

$$x_B^2+y_B^2=y_1^2+x_1^2=r^2,$$

故 B 在圆上. 中点

$$M=\Big(\frac{x_1-y_1}{2},\ \frac{y_1+x_1}{2}\Big),$$

因此

$$|OM|^2=\frac{(x_1-y_1)^2+(x_1+y_1)^2}{4}=\frac{2x_1^2+2y_1^2}{4}=\frac{r^2}{2}.$$

中点轨迹为 $x^2+y^2=\frac{r^2}{2}$(去掉使 A,B 重合的退化点).

3.5.4.0.2 直角三角形的仅垂直条件(斜率积 -1 或点乘为零) 若条件只要求垂直而不要求等长, 旋转矩阵会引入多余等长约束, 此时应回到点乘

$$OA\perp OB\iff x_1x_2+y_1y_2=0.$$

在抛物线这类可用参数 t 表示点的曲线上, 垂直条件常与参数积直接挂钩.

例题 3.104 (抛物线过定点的直角弦) 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上两点 A,B 满足 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. 证明直线 AB 恒过定点 $(2p,0)$.

证明 用参数设点. 令 $A(\frac{p}{2}t_1^2,\,pt_1)$, $B(\frac{p}{2}t_2^2,\,pt_2)$, 其中 $t_1\neq t_2$. 条件 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 即

$$\frac{p}{2}t_1^2\cdot\frac{p}{2}t_2^2+(pt_1)(pt_2)=0\implies\frac{p^2}{4}t_1^2t_2^2+p^2t_1t_2=0.$$

若 $t_1t_2=0$, 则 A 或 B 为顶点 O, 与弦 AB 的通常设定冲突, 故 $t_1t_2\neq0$. 两边除以 $p^2t_1t_2$ 得

$$\frac{1}{4}t_1t_2+1=0\implies t_1t_2=-4.$$

抛物线上两点弦的标准方程为

$$y(t_1+t_2)=2x+p\,t_1t_2.$$

将 $t_1t_2=-4$ 代入, 得

$$y(t_1+t_2)=2x-4p.$$

把点 $(2p,0)$ 代入. 右端为 $2\cdot(2p)-4p=0$, 左端为 $0\cdot(t_1+t_2)=0$, 恒成立. 当 $t_1+t_2=0$ 时弦方程退化为 $x=2p$, 仍过 $(2p,0)$.

因此所有满足条件的弦 AB 所在直线恒过定点 $(2p,0)$. □

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.5.4.0.3　一般斜率积 $k_{OA}\cdot k_{OB}=c$　垂直只是斜率积 $c=-1$ 的特例. 更一般地, 设 A,B 是从原点出发的两条射线与曲线的交点, 若斜率积

$$k_{OA}\cdot k_{OB}=c$$

为常数 ($c\neq 0$), 则点乘条件变为 $y_1y_2=c\,x_1x_2$. 在抛物线 $y^2=2px$ 上, 用参数 t 可把这个条件直接翻译成 t_1t_2 的常数.

例题 3.105 (定斜率积的抛物线弦) 抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 上两点 A,B 满足 $k_{OA}\cdot k_{OB}=c$ ($c\neq 0$). 求弦 AB 过的定点.

解 设 $A(\frac{p}{2}t_1^2,\,pt_1)$, $B(\frac{p}{2}t_2^2,\,pt_2)$. 由 $k_{OA}=\frac{2}{t_1}$, $k_{OB}=\frac{2}{t_2}$, 条件 $k_{OA}k_{OB}=c$ 给出

$$\frac{4}{t_1t_2}=c\Longrightarrow t_1t_2=\frac{4}{c}.$$

抛物线弦方程

$$y(t_1+t_2)=2x+p\,t_1t_2$$

代入 $t_1t_2=\frac{4}{c}$ 得

$$y(t_1+t_2)=2x+\frac{4p}{c}.$$

令 $y=0$, 则 $2x+\frac{4p}{c}=0$, 即 $x=-\frac{2p}{c}$. 所以弦 AB 恒过定点 $(-\frac{2p}{c},0)$. 当 $c=-1$ 时回到垂直情形的定点 $(2p,0)$.

3.5.4.0.4　三类旋转设点法的分工

- 等长且垂直 $\Rightarrow$ 旋转矩阵 (3-27), $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $(x,y)\mapsto(-y,x)$;
- 仅垂直 $\Rightarrow$ 点乘 $x_1x_2+y_1y_2=0$, 或抛物线参数下的 $t_1t_2=-4$;
- 定斜率积 $k_{OA}k_{OB}=c\Rightarrow$ 用参数把条件化为 $t_1t_2=\frac{4}{c}$ 等常数关系, 再读弦方程.

3.5.5 本节小结

四种策略的对照如下. 单动点参数法设一动点 (x_0,y_0), 分曲线上与曲线外两种情形, 经设点、直译、消元、求解处理切线截距、距离、夹角等问题. 双动点参数法用双点参把两端点同时命名, 强调设而不求. 相减得斜率或中点, 相加得和式; 中点情形可用对称差分 $A=(x_0+u,y_0+v)$, $B=(x_0-u,y_0-v)$, 与 第3.4节 的点差法一致. 定比点差法用 λ 推广中点点差, 覆盖中点、一般定比轨迹与外分/反射; 第5.3节 的极点极线定理说明调和对点的共线性. 旋转设点法处理等长垂直、仅垂

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

直、一般斜率积三类旋转条件, 用旋转矩阵、点乘或参数积把几何约束一次写成代数关系.

大题常把几种手法组合. 例如 A, B 在椭圆上且 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, P 为 AB 中点求轨迹时, 可用点乘处理垂直, 再以 $\lambda = 1$ 写中点并消去参量. 第3.6节 把这些选择与具体题型对应起来.

3.5.6 本节习题

3.15. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ $(x_0 y_0 \neq 0)$, 过 P 的切线交两坐标轴于 A, B. 求 $|AB|$ 的最小值. 提示: 切线 $\frac{x x_0}{4} + y y_0 = 1$, $|AB|^2 = \frac{16}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2}$, 令 $t = x_0^2$ 消元.

3.16. 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上动点 $P(x_0, y_0)$, 定点 $A(a, 0)$ $(0 < a < r)$. 用单动点参数法表示 $\cos \angle OAP$, 并说明 $\angle OAP$ 何时最大.

3.17. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上弦 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$. 设 $A = (x_0 + u, y_0 + v)$, $B = (x_0 - u, y_0 - v)$, 用双点参推导 $k_{AB} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ $(y_0 \neq 0)$.

3.18. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上 A, B 满足 $OA \perp OB$. 用双动点参数法写出关于 x_1, x_2, y_1, y_2 的对称关系, 并说明如何求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$.

3.19. 求椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 中, 以 $M(1, 2)$ 为中点的弦所在直线方程. 先检验 M 在椭圆内部, 再套 $\lambda = 1$ 定比点差.

3.20. 抛物线 $y^2 = 2px$ 上动点 P_0, 定点 $A(p, 0)$, M 分 $\overrightarrow{AP_0}$ 成定比 $\lambda = 1$(中点). 求 M 的轨迹; 再对一般 $\lambda > 0$ 写出轨迹焦参数随 λ 的变化.

3.21. 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上点 $A(x_1, y_1)$, B 为 A 绕原点逆时针旋转 90° 的像. 证明 B 在圆上, 并求弦 AB 中点轨迹.

3.22. 抛物线 $y^2 = 2px$ 上 A, B 满足 $k_{OA} \cdot k_{OB} = c$ $(c \neq 0)$. 用参数 t_1, t_2 证明 $t_1 t_2 = \frac{4}{c}$, 并由此证明弦 AB 恒过定点 $\left(-\frac{2p}{c}, 0\right)$. 取 $c = -1$ 验证即为直角情形.

3.23. 抛物线 $y^2 = 4x$ 上动点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $y = x + 4$ 的距离为 d. 用单动点参数法把 d^2 表示为 x_0 的函数, 并求最小值.

3.24. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上两点 A, B 关于原点 O 对称, P 为椭圆上异于 A, B 的任一点. 用双动点参数法证明 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{3}{4}$(提示: 用椭圆方程消去 $y_0^2 - y_1^2$).

3.25. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上动点 $A(x_0, y_0)$, 定点 $M(1, 0)$. 点 B 满足 $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$. 用相关点代入求 B 的轨迹方程.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.26.　圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上异于原点的一点 $A(x_1,y_1)$. 将 OA 绕原点逆时针旋转 90° 得到 OB, 用旋转设点法求 B 的轨迹方程(提示: 用旋转关系把 A 的坐标用 B 表示).

3.6 设点法的典型应用

我们已经看到设点法的基本技术与参量选择, 见 第3.4节 与 第3.5节. 本节用它们处理五类题型, 即向量轨迹、线段比例、定截距弦、斜率关系与原点三角形. 每类附代表性例题. 一般顺序是先选定参量, 再把几何条件写成坐标关系, 最后用曲线方程整体代换. 联立通法见 第3.7节.

3.6.1 向量条件求轨迹

我们先设轨迹点 $M=(X,Y)$ 与曲线上动点 $P=(x_0,y_0)$. 如果题面以向量给出定点、动点与 M 的关系, 我们把这些向量等式改写成 X,Y 与 x_0,y_0 的线性关系. 反解出 $x_0=x_0(X,Y)$, $y_0=y_0(X,Y)$, 再代入曲线方程 $F(x_0,y_0)=0$, 整理即得 M 的轨迹方程. 最后讨论使 P 仍在曲线上、或使分母非零的定义域.

例题 3.106 (中点轨迹) 椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上动点 P, 定点 $A(3,0)$, M 为线段 AP 的中点. 求 M 的轨迹方程.

解 设 $M=(X,Y)$, $P=(x_0,y_0)$. 由中点公式 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP})$, 得

$$X=\frac{3+x_0}{2},\quad Y=\frac{y_0}{2},$$

即 $x_0=2X-3$, $y_0=2Y$. 因 $P\in C$,

$$\frac{(2X-3)^2}{9}+\frac{(2Y)^2}{4}=1\implies\frac{(2X-3)^2}{9}+Y^2=1.$$

配方后得到 $\left(X-\frac{3}{2}\right)^2\Big/\frac{9}{4}+Y^2=1$. 故 M 的轨迹是以 $(\frac{3}{2},0)$ 为中心, 半轴长 $\frac{3}{2}$ 与 1 的椭圆(去掉使 P 越出 C 的边界点即可).

例题 3.107 (向量伸缩轨迹) 抛物线 $C:y^2=4x$ 上动点 P, 定点 $F(1,0)$(焦点). 设点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$. 求 M 的轨迹方程, 并说明轨迹类型.

解 设 $P=(x_0,y_0)$, $M=(X,Y)$. 由 $y_0^2=4x_0$ 及

$$(X,Y)=(1,0)+\frac{1}{2}(x_0,y_0)=\left(1+\frac{x_0}{2},\ \frac{y_0}{2}\right),$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

得 $x_0=2(X-1)$, $y_0=2Y$. 代入抛物线约束:

$$(2Y)^2=4\cdot 2(X-1)\implies 4Y^2=8(X-1)\implies Y^2=2(X-1).$$

故 M 的轨迹是抛物线 $y^2=2(x-1)$, 顶点 $(1,0)$, 开口向右, 焦参数为 1(由原抛物线 $y^2=4x$ 经半幅伸缩与平移合成).

3.6.1.0.1 位置关系的点式判断 轨迹题常附带点在曲线内外的讨论. 对 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ 型椭圆, 我们直接把点坐标代入 F 看符号, 不必先求交点. 标准椭圆上 $F=0$, 内部 $F<0$, 外部 $F>0$. 例如 $F(3,1)=\frac{9}{9}+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{4}>0$ 给出 $(3,1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 外; $F(1,1)=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-1<0$ 给出该点在内. 这是设点法不求交点即判位置的典型用法, 也常用于斜率/中点题中先验中点是否在曲线内部.

例题 3.108 (位置关系检验) 设 $F(x,y)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1$. 判断点 $M(3,1)$ 与 $N(1,1)$ 相对椭圆 $F=0$ 的位置, 并说明在轨迹题中的用途.

解 $F(3,1)=\frac{1}{4}>0$, 故 M 在椭圆外; $F(1,1)=\frac{13}{36}-1<0$, 故 N 在椭圆内. 这可用于求中点弦与轨迹范围. 求中点弦时, 先算 $F(x_M,y_M)<0$ 确认中点在内部, 弦才存在; 求轨迹范围时, 用 F 的符号截取参数区间.

3.6.2 线段比例问题

定比分点把比例条件翻译为线性关系. 设 P 分 $\overrightarrow{AB}$ 成定比 λ, 即 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, 则

$$P=\frac{A+\lambda B}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq -1),$$

坐标形式

$$x_P=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\qquad y_P=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}.$$

在曲线约束下, 常可反解端点, 或配合 第3.5节 的定比点差法写中点/定比弦方程.

3.6.2.0.1 操作骨架

1. 读出 λ(中点 $\lambda=1$; 外分 $\lambda<0$ 且 $\lambda\neq -1$);
2. 用定比公式表达端点之一, 或写差分 A,B 相对分点的坐标;
3. 把两端点代入曲线, 相减得 λ 型点差, 或直接消元求坐标;
4. 若需求弦方程, 已知两端点时优先用不除零的两点式整式形式.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.109 (定比 $\lambda=2$ 求端点) 抛物线 $y^2=8x$ 上两点 A,B, 点 $P(3,0)$ 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$. 求 A,B 的坐标.

解 由 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 得 $P=\frac{A+2B}{3}$, 故 $A=3P-2B=(9-2x_B,-2y_B)$. A 在抛物线上: $(-2y_B)^2=8(9-2x_B)$, 即 $4y_B^2=72-16x_B$. 又 $y_B^2=8x_B$, 故 $32x_B=72-16x_B$、$48x_B=72$、$x_B=\frac{3}{2}$. 从而 $y_B^2=12$, $y_B=\pm2\sqrt{3}$; $x_A=9-3=6$, $y_A=\mp4\sqrt{3}$. 两组解: $A=(6,-4\sqrt{3})$, $B=(\frac{3}{2},2\sqrt{3})$ 或 $A=(6,4\sqrt{3})$, $B=(\frac{3}{2},-2\sqrt{3})$. 二者对应同一类弦关于 x 轴的对称.

例题 3.110 (中点弦) 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 中, 以 $M(1,2)$ 为中点的弦所在直线方程(先检验 M 在椭圆内部).

解 先算 $F(1,2)=\frac{1}{25}+\frac{4}{16}-1=\frac{1}{25}+\frac{1}{4}-1=\frac{29}{100}-1<0$, 故 M 在内部, 中点弦存在. 由 第3.4节 弦中点斜率关系 ($a^2=25,b^2=16,\lambda=1$):

$$k=-\frac{b^2x_M}{a^2y_M}=-\frac{16\cdot1}{25\cdot2}=-\frac{8}{25}.$$

点斜式: $y-2=-\frac{8}{25}(x-1)$, 即 $8x+25y-58=0$. 此即所求弦方程.

3.6.2.0.2　由两端点直写弦方程

已知两端点时, 优先用不除零的两点式

$$(y-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x-x_1),$$

避开斜率分类. 当 $x_1=x_2$ 时直写 $x=x_1$; 当 $y_1=y_2$ 时直写 $y=y_1$. 整式形式在竖直弦时仍可用, 而斜率式 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 会失效.

例题 3.111 (两端点直写弦方程) 椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上两点 $A(0,2),B(3,0)$. 直接写出弦 AB 的方程.

解 由两点式整式形式得到

$$(y-2)(3-0)=(0-2)(x-0)\implies3(y-2)=-2x\implies2x+3y-6=0.$$

我们验证如下. 过 A 时 $0+6-6=0$; 过 B 时 $6+0-6=0$. 若误用斜率式 $m=-\frac{2}{3}$ 再写 $y-2=-\frac{2}{3}x$, 结果相同, 但当弦竖直时斜率式失效, 整式形式始终可用.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.6.3 定截距弦问题

截距式 $\frac{x}{a_0}+\frac{y}{b_0}=1$ 适合弦与两轴交点已知或参与条件的题型, 可避开斜率分类. 截距也可用端点坐标表达, 若弦交 x 轴于 $(a_0,0)$, 交 y 轴于 $(0,b_0)$, 则 a_0,b_0 即为截距.

3.6.3.0.1 操作骨架

1. 若截距已知, 直接写 $\frac{x}{a_0}+\frac{y}{b_0}=1$, 解出 y(或 x)代入曲线;
2. 整理为一元二次, 用韦达读 x_A+x_B, x_Ax_B(不必求根);
3. 若中点已知, 可用点参差分 $A=(x_M+u,y_M+v)$, $B=(x_M-u,y_M-v)$ 求弦长与面积;
4. 弦长 $|AB|=2\sqrt{u^2+v^2}$; 面积 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|x_Ay_B-x_By_A|$.

例题 3.112 (截距弦的韦达) 椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, 直线 $\ell:\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$ 与 C 交于 A,B. 求 x_A+x_B 与 x_Ax_B.

解 由 ℓ 得 $y=4-\frac{2}{3}x$. 代入椭圆:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{\left(4-\frac{2}{3}x\right)^2}{9}=1.$$

整理(两边乘 144):$9x^2+16\left(4-\frac{2}{3}x\right)^2=144$, 即

$$9x^2+16\left(16-\frac{16}{3}x+\frac{4}{9}x^2\right)=144,$$

$$9x^2+256-\frac{256}{3}x+\frac{64}{9}x^2=144.$$

再乘 9:$81x^2+2304-768x+64x^2=1296$, 即 $145x^2-768x+1008=0$. 由韦达定理(第3.3节):$x_A+x_B=\frac{768}{145}$, $x_Ax_B=\frac{1008}{145}$. 不必求根即可进入后续弦长或中点计算.

3.6.3.0.2 弦长与面积的坐标视角

中点已知时, 点参差分是联立法的对照路径, 设 $A=(x_M+u,y_M+v)$, $B=(x_M-u,y_M-v)$, 则斜率 $k=\frac{v}{u}$, 弦长 $|AB|=2\sqrt{u^2+v^2}$, 面积可由行列式直接展开. 设线、联立、韦达与弦长的系统讨论见 第3.7节.

例题 3.113 (弦长与 $\triangle OAB$ 面积) 椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的弦 AB 中点为 $M(1,\frac{1}{2})$. 求弦长 $|AB|$ 与 $\triangle OAB$ 的面积.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 由弦中点斜率关系 ($a^2=16, b^2=9$):

$$k=-\frac{b^2x_M}{a^2y_M}=-\frac{9\cdot 1}{16\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{9}{8}.$$

设

知乎@余命数

$$A=(1+u,\tfrac{1}{2}+v),\quad B=(1-u,\tfrac{1}{2}-v),$$

则 $k=\frac{v}{u}=-\frac{9}{8}$, 即 $v=-\frac{9}{8}u$. 代入 $A\in C$:

$$\frac{(1+u)^2}{16}+\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{8}u\right)^2}{9}=1.$$

整理 $\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{8}u\right)^2=\frac{(4-9u)^2}{64}$, 故

知乎@余命数

$$\frac{(1+u)^2}{16}+\frac{(4-9u)^2}{576}=1.$$

乘 576:

$$36(1+2u+u^2)+(4-9u)^2=576,$$

$$36+72u+36u^2+16-72u+81u^2=576,$$

$$117u^2+52=576\implies 117u^2=524\implies u^2=\frac{524}{117}.$$

知乎@余命数

$\gcd(524,117)=1$, 不可再约. 又 $F(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{16}+\frac{1}{36}-1=-\frac{131}{144}<0$, 确认 M 在椭圆内, 弦确实存在.

弦长: 由 $u^2+v^2=u^2(1+\frac{81}{64})=u^2\cdot\frac{145}{64}$,

$$|AB|=2\sqrt{u^2+v^2}=2|u|\cdot\frac{\sqrt{145}}{8}=\frac{\sqrt{145}}{4}\sqrt{\frac{524}{117}}.$$

面积: 直接展开 $x_Ay_B-x_By_A$,

$$x_Ay_B-x_By_A=(1+u)(\tfrac{1}{2}-v)-(1-u)(\tfrac{1}{2}+v)=u-2v=u-2\Big(-\frac{9}{8}u\Big)=\frac{13}{4}u,$$

知乎@余命数

故

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|x_Ay_B-x_By_A|=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4}|u|=\frac{13}{8}\sqrt{\frac{524}{117}}.$$

3.6.4 斜率关系问题

斜率条件 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$、$k_1k_2=c$、$k_1+k_2=s$ 可与曲线方程, 点差公式联立, 转化为对称式. 椭圆与双曲线的点差符号不同, 需分别处理.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.22 (原点弦的斜率积与垂直) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 且 $x_1x_2\neq 0$. 记 $k_1=\frac{y_1}{x_1},k_2=\frac{y_2}{x_2}$.

1. 若 $OA\perp OB$, 则 $k_1k_2=-1$;
2. 若弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)\ (y_0\neq 0)$, 则弦斜率

$$k_{AB}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

(点差公式, 见 第3.4节).

证明 (1) 由 $OA\perp OB$ 得 $x_1x_2+y_1y_2=0$, 即 $y_1y_2=-x_1x_2$. 故

$$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-1.$$

(2) 由 A,B 在椭圆上, 两式相减并因式分解(点差法):

$$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0.$$

除以 $x_1-x_2\ (x_1\neq x_2)$, 并以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2},y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$ 代入, 即得

$$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

□

3.6.4.0.1 操作骨架

1. 把斜率条件写成过原点的 $y_i=k_ix_i$, 或一般弦的 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$;
2. 用点差得中点斜率关系, 或用 k_1k_2,k_1+k_2 的对称式;
3. 椭圆上 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, 双曲线上 $k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$(符号相反, 见 第3.4节);
4. 消元得中点轨迹或参数关系, 并截取内部范围.

例题 3.114 (椭圆的定斜率弦中点轨迹) 椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的弦 AB 斜率为 1, 中点为 $M(x_0,y_0)$. 求 M 满足的关系式及轨迹范围.

解 由 第3.3节 弦中点斜率关系 ($a^2=9,b^2=5$):

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=-\frac{5x_0}{9y_0}.$$

知乎@余命数

令 $k=1$：$9y_0=-5x_0$，即 $y_0=-\frac{5}{9}x_0$. 中点须在椭圆内部：

$$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{5}<1 \implies \frac{x_0^2}{9}+\frac{25x_0^2}{81\cdot 5}<1 \implies \frac{x_0^2}{9}+\frac{5x_0^2}{81}<1,$$

$$\frac{9x_0^2+5x_0^2}{81}=\frac{14x_0^2}{81}<1 \implies x_0^2<\frac{81}{14}, \quad |x_0|<\frac{9}{\sqrt{14}}.$$

故中点轨迹为线段 $y=-\frac{5}{9}x$ 落在椭圆内部的部分.

例题 3.115 (双曲线的定斜率弦中点轨迹) 双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的弦 AB 斜率为 1，中点为 $M(x_0,y_0)$ $(y_0\neq 0)$. 求 M 满足的关系式，并说明与椭圆点差的符号差异.

解 由 第3.4节 双曲线弦中点斜率关系 $(a^2=4,b^2=3)$：

$$k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=\frac{3x_0}{4y_0}.$$

与椭圆 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ 相比，右侧符号相反，来自双曲线方程中 y^2 项的减号. 令 $k=1$，得

$$4y_0=3x_0 \implies y_0=\frac{3}{4}x_0.$$

中点须使弦确实存在，当 M 位于双曲线两支之间的空隙侧时需使 $\Delta>0$. 代入点差相容条件，粗判

$$\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{3}=\frac{x_0^2}{4}-\frac{9x_0^2}{48}=\frac{x_0^2}{4}-\frac{3x_0^2}{16}=\frac{x_0^2}{16}.$$

当 $x_0\neq 0$ 时此值 >0，与椭圆情形要求中点在曲线内部不同；双曲线中点弦的存在性需回到联立 $\Delta>0$ 检验（细节见 第3.7节）.

例题 3.116 (抛物线的定斜率积弦) 抛物线 $C:y^2=4x$ 上两点 A,B 满足 $k_{OA}\cdot k_{OB}=2$. 证明弦 AB 恒过定点，并求该定点坐标.

解 用旋转设点法中的定斜率积模式，见 第3.5.4小节. 设 $A=(t_1^2,2t_1)$，$B=(t_2^2,2t_2)$ $(t_1t_2\neq 0)$，则

$$k_{OA}=\frac{2}{t_1}, \qquad k_{OB}=\frac{2}{t_2}.$$

条件 $k_{OA}\cdot k_{OB}=2$ 给出

$$\frac{4}{t_1t_2}=2 \implies t_1t_2=2.$$

抛物线 $y^2=4x$ 的两点弦方程为

$$y(t_1+t_2)=2x+2t_1t_2.$$

代入 $t_1t_2=2$, 得

$$y(t_1+t_2)=2x+4.$$

令 $y=0$ 得 $x=-2$, 故弦 AB 恒过定点 $(-2,0)$, 与 t_1+t_2 的取值无关.

注 3.7
对抛物线, 若斜率积 $k_1k_2=c$ 为定值, 则弦 AB 恒过定点; 椭圆与双曲线没有这一结论, 斜率积为定值只约束弦的方向. 点参可写 $A=(x_1,k_1x_1)$ 等, 但展开常繁; 改设线 $y=kx+m$ 联立后用韦达读对称式往往更省. 后者将在 第3.7节 中处理, 习题中也保留一道双曲线斜率积过定点的对照题.

3.6.5 原点与两动点三角形问题

以 O,A,B 为顶点时, 面积

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,$$

垂直条件

$$OA\perp OB \iff x_1x_2+y_1y_2=0,$$

常与曲线约束联立得定值或最值.

3.6.5.0.1 操作骨架

1. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 在曲线上, 写出 $F(x_i,y_i)=0$;
2. 垂直则加 $x_1x_2+y_1y_2=0$; 面积则写 $\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$;
3. 引入方向角或参数方程, 见 第4章, 或设线联立读韦达;
4. 化简得定值 / 最值, 并讨论退化(A,B 共线于过原点的直线时面积为 0).

例题 3.117 (垂直定值) 椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上两点 A,B 满足 $OA\perp OB$. 证明

$$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{16}+\frac{1}{9}=\frac{25}{144}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

解 设 A 所在射线与 x 轴正半轴夹角为 α（此为方向角，非离心角；系统参数方程见 第4章）. 令 $|OA|=r_1$，则 $A=(r_1\cos\alpha, r_1\sin\alpha)$. 由 $A\in C$：

$$\frac{r_1^2\cos^2\alpha}{16}+\frac{r_1^2\sin^2\alpha}{9}=1 \implies \frac{1}{r_1^2}=\frac{\cos^2\alpha}{16}+\frac{\sin^2\alpha}{9}.$$

因 $OA\perp OB$，可取 B 的方向角为 $\alpha+\frac{\pi}{2}$，则

$$\frac{1}{r_2^2}=\frac{\sin^2\alpha}{16}+\frac{\cos^2\alpha}{9}.$$

两式相加：

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{16}+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{9}=\frac{1}{16}+\frac{1}{9}=\frac{25}{144}.$$

例题 3.118 (面积最值) 椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上两点 A,B 满足 $OA\perp OB$. 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

知乎@余命数

解 设 A 的方向角为 α、$|OA|=r_1$、$|OB|=r_2$，取

$$A=(r_1\cos\alpha, r_1\sin\alpha),\quad B=(-r_2\sin\alpha, r_2\cos\alpha)$$

（保证 $OA\perp OB$）. 则

$$x_1y_2-x_2y_1=r_1r_2 \implies S=\frac{1}{2}r_1r_2.$$

知乎@余命数

由 $A,B\in C$：

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{\cos^2\alpha}{9}+\frac{\sin^2\alpha}{4},\qquad \frac{1}{r_2^2}=\frac{\sin^2\alpha}{9}+\frac{\cos^2\alpha}{4}.$$

知乎@余命数

令 $t=\cos^2\alpha\in[0,1]$，$\sin^2\alpha=1-t$，则

$$\frac{1}{r_1^2r_2^2}=\frac{(9-5t)(4+5t)}{1296},$$

$$S=\frac{18}{\sqrt{g(t)}},$$

$$g(t)=(9-5t)(4+5t)=36+25t-25t^2.$$

知乎@余命数

$g'(t)=25-50t=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$；$g''=-50<0$，故 g 在 $t=\frac{1}{2}$ 取最大值

知乎@余命数

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{169}{4}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

端点：$g(0)=g(1)=36$. 因 S 与 $\sqrt{g}$ 反变，

$$S_{\max}=\frac{18}{\sqrt{36}}=3\quad(t=0\text{ 或}1),\qquad S_{\min}=\frac{18}{13/2}=\frac{36}{13}\quad(t=\tfrac{1}{2}).$$

故面积最大值为 3，取最大时 A 落在坐标轴方向（$\alpha=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 的等价配置）.

> **注 3.8**
> 上例展示了垂直与面积条件并存时的完整点参路径. 若只求最大值，也可用 $S=\frac{1}{2}|OA|\,|OB|$（因直角）与 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}$ 定值配合均值不等式；细节因题而异. 设线法对照见 第3.7节.

3.6.6 本节小结

我们回顾五类应用的路径. 对向量条件，先把向量等式写成 X,Y 与 x_0,y_0 的线性关系，反解动点，再用曲线约束消元，必要时由 F 的符号判断内外. 对线段比例，用定比 λ 与点差；已知两端点时可用整式两点式直写弦方程. 对定截距弦，用截距式联立读韦达；中点已知时则用差分求弦长与 $\triangle OAB$ 面积. 对斜率关系，把 k、k_1k_2、k_1+k_2 写成对称式，在椭圆与双曲线上分别消元（点差符号相反）. 对原点三角形，面积 $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$，垂直时 $x_1x_2+y_1y_2=0$，可用方向角或参数方程消元.

设点法适合单点或双点坐标条件、定比、中点、垂直与面积行列式. 当条件主要是直线与曲线两交点的对称式（弦长、焦点弦调和平均等），通常改用设线法更为直接. 下一节 第3.7节 从联立运算展开设线法.

3.6.7 本节习题

3.27. 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上动点 P，M 为 OP 中点，求 M 的轨迹方程，并说明范围.

3.28. 抛物线 $y^2=4x$ 上 A,B，点 $P(2,0)$ 满足 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$，求弦 AB 方程的可能形式.（可用定比 $\lambda=1$ 或中点点差；并尝试两端点整式两点式复核.）

3.29. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上 A,B 使 $OA\perp OB$，求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

3.30. 判断点 $(2,2)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的位置关系，并说明依据（F 符号法）.

3.31. 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，直线 $\frac{x}{8}+\frac{y}{3}=1$ 与椭圆交于 A,B. 求 x_A+x_B，x_Ax_B，并写出 $|AB|$ 的表达式（可用韦达 + 弦长公式，或对照中点差分）.

3.32. 抛物线 $y^2=4x$ 上异于原点的两点 A,B 满足 $k_{OA}k_{OB}=\lambda\,(\lambda\neq0)$. 证明弦 AB 过定点，并求该定点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.33.　椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上 A,B 满足 $OA\perp OB$. 证明 $\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

3.34.　已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的弦 AB 中点为 $M(1,1)$. 先用 F 检验 M 是否在内部, 再求 $|AB|$ 与 $S_{\triangle OAB}$.

3.7 联立运算的基础准备

我们在 第3.3节 已经看到联立法的三条基本公式. 韦达定理为 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, 弦长为 $|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$, 焦半径为 $|PF_2|=a-ex_0$. 设点法见 第3.4节 至 第3.6节. 本节在这些结论之上, 整理设线法的联立步骤、判别式化简、弦长与焦半径的选用, 以及面积与对称式的变形.

知乎@余命数

3.7.1 联立的做法

3.7.1.0.1　为什么联立　解析几何用方程刻画曲线, 点 $P(x_0,y_0)$ 落在曲线上当且仅当它的坐标满足该方程. 把这条对应推广到两条曲线, 交点的含义就清楚了. 交点同时落在两条曲线上, 它的坐标必须同时满足两个方程; 反过来, 同时满足两个方程的 (x,y) 也一定是交点. 因此, 求两条曲线的交点就是求联立方程组的公共解. 以椭圆与直线为例, 我们写出

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \\ y=kx+m, \end{cases}$$

方程组的每一组解对应一个交点, 解的组数就是交点的个数 (图 3.34).

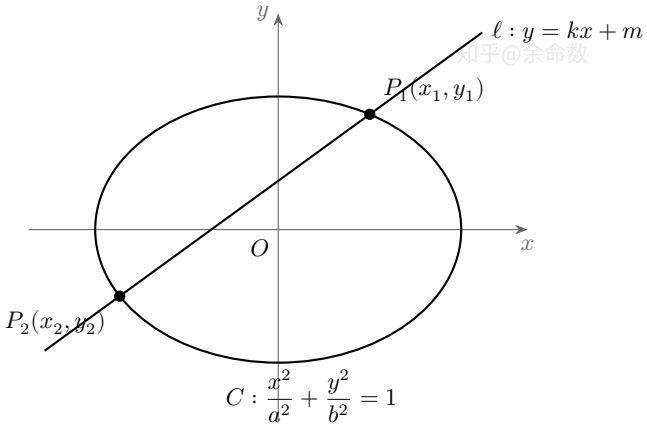


图 3.34　交点 P_1, P_2 的坐标同时满足直线方程与椭圆方程, 是联立方程组的全部解; 解的组数就是交点的个数.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

几何直观能判断大概相交, 但交点坐标、相切条件与弦长这类精确答案必须由代数给出. 第一步是消元. 把 $y=kx+m$ 代入椭圆方程, 方程组化为关于 x 的一元二次方程, 交点个数随之变成实根个数. 实根个数由判别式决定. 若 $\Delta>0$, 则有两个交点; 若 $\Delta<0$, 则没有交点. 中间情形 $\Delta=0$ 最为关键. 让直线从相交位置向外平移, 两个交点沿曲线连续靠近, 直到重合为一点, 直线恰好成为切线. 两个根相等这件事, 写在代数上正是 $\Delta=0$. 相切与重根是同一现象的几何与代数两面, 见 图 3.35.

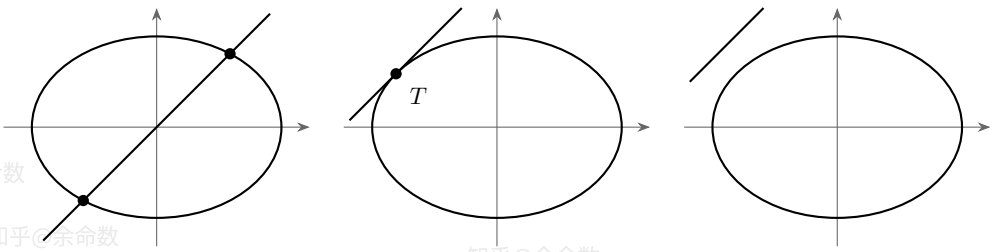


图 3.35 三种位置关系与判别式符号一一对应. 相切是相交的临界情形, 两个交点连续靠近并重合, 代数上对应二重根.

这也解释了为什么我们可以停在系数层面而不解根. 弦长只含 $|x_1-x_2|$, 中点只含 x_1+x_2, 面积只含这两者的组合, 它们都关于两根对称. 由韦达定理, 这些对称式都能用 x_1+x_2 与 x_1x_2 表出, 因此求根可以省去. 整条计算路径至此成形, 见图 3.36. 几何条件经设线联立变成方程组, 消元后变成一元二次方程, 再由系数读出 Δ、S、P, 最后经对称式还原为几何量. 联立是这条路径的起点.



图 3.36 联立的计算路径. 几何条件经设线、消元化为一元二次方程, 由系数读出判别式与韦达两式, 再经对称式还原为几何结论.

我们用设线法把几何条件化为代数二次方程, 再从系数读出位置关系与对称量, 通常不解根. 做法如下. 先依题面设直线 $y=kx+m$ 或 $x=ty+n$ (斜率不存在时优先后者, 见 第3.8节), 再把直线代入曲线方程消去一个变量, 整理成 $Ax^2+Bx+C=0$ 或关于 y 的同形. 整理时我们不再乘额外常数, 以免判别式与韦达分母失真, 见 第3.7.2小节. 随后计算 $\Delta=B^2-4AC$, 判定相交、相切或相离, 并由系数直接写出

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A},\qquad x_1x_2=\frac{C}{A}$$

此即 第3.3节 的设而不求. 弦长、中点、面积、距离、斜率等后处理, 一律化为 $S=x_1+x_2$, $P=x_1x_2$ 与已知参数的对称式.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.7.1.0.2　设线　联立的第一步是设直线方程. 标准形有两种, $y=kx+m$ 与 $x=ty+n$, 二者覆盖的直线几乎一样, 运算量却可能相差很大. 我们以过椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 右焦点 $F(c,0)$ 的弦为例说明原因. 把 $x=ty+c$ 代入椭圆方程, 得

$$b^2(ty+c)^2+a^2y^2=a^2b^2 \implies (a^2+b^2t^2)y^2+2b^2tc\,y+b^2(c^2-a^2)=0.$$

因为 $c^2-a^2=-b^2$, 常数项直接化简为 $-b^4$, 与参数 t 无关. 改用 $y=k(x-c)$ 代入, 常数项变成 $a^2(k^2c^2-b^2)$, 含两个 k^2 项, 此后的每次通分都要处理它们. 同一条弦, 仅因设线形式不同, 系数就相差一整项. 因此, 直线过 x 轴上的点 $(x_0,0)$ 时, 我们设 $x=ty+x_0$; 过 y 轴上的点 $(0,y_0)$ 或斜率已给定时, 我们设 $y=kx+m$. 第一种写法还把斜率不存在的情形自动收进 $t=0$, 不必另立讨论.

3.7.1.0.3　代入消元　设好直线, 接下来把它代入曲线方程, 消去一个变量. 以椭圆为例, 把 $y=kx+m$ 代入 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 得到

$$b^2x^2+a^2(kx+m)^2=a^2b^2 \implies b^2x^2+a^2k^2x^2+2a^2km\,x+a^2m^2-a^2b^2=0.$$

这一步唯一的难点在展开 $(kx+m)^2$, 中项 $2kmx$ 最容易在誊写中丢失, 而一旦丢掉, 后面的判别式与韦达全错, 错误还很隐蔽. 稳妥的做法是分两步走, 先写出骨架 $(kx+m)^2=k^2x^2+2kmx+m^2$, 确认三项齐全, 再把 a^2 整体乘进去.

3.7.1.0.4　整理成 $Ax^2+Bx+C=0$　展开之后, 合并同类项并把右端移为零, 得到标准二次形

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2km\,x+a^2(m^2-b^2)=0.$$

常数项 $a^2m^2-a^2b^2$ 我们直接因式为 $a^2(m^2-b^2)$, 与 定理 3.23 的形态对齐, 下一步计算 Δ 时 m^2-b^2 会作为一个整块出现. 整理后还要检查二次项系数是否为零. 椭圆情形 $A=b^2+a^2k^2>0$ 恒成立, 检查自动通过; 双曲线情形 $A=b^2-a^2k^2$ 可正可负可为零, 一旦 $A=0$, 方程退化为一次, 对应直线与渐近线平行, 判别式与韦达全都用不上, 见 注 3.9. 整理只允许移项与合并, 不同乘任何常数, 代价在下一段说明.

3.7.1.0.5　计算判别式　方程整理成 $Ax^2+Bx+C=0$ 后, 位置关系由判别式判定. 判别式来自求根公式 $x=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$, 根号下的 $\Delta=B^2-4AC$ 决定实根个数, 所以 $\Delta>0$ 时交于两点, $\Delta=0$ 时相切 (重根), $\Delta<0$ 时相离. 题面含参数时, 连展开 Δ 都可以省掉, 定理 3.23 已把椭圆情形整理成因子形式 $\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$, 符号直接由括号读出, 这是含参题最省的一步.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.7.1.0.6 读韦达与设而不求 确认交点存在之后,下一步由韦达定理给出两根的和与积. 设两根为 x_1, x_2,则

$$Ax^2+Bx+C=A(x-x_1)(x-x_2)=Ax^2-A(x_1+x_2)x+Ax_1x_2,$$

比较两边系数得 $B=-A(x_1+x_2)$, $C=Ax_1x_2$,于是

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A},\qquad x_1x_2=\frac{C}{A}.$$

有了和与积,根差也随之确定

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{B^2}{A^2}-\frac{4C}{A}=\frac{B^2-4AC}{A^2}=\frac{\Delta}{A^2},$$

因此 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|A|}$,弦长公式 $|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$ 所需的根差由此读出,全程不解根. 但在使用韦达定理之前,我们必须确认 $\Delta\geq 0$. 若 $\Delta<0$,韦达两式在复数范围仍成立,和与积形式上存在,但几何上没有交点,由它们推出的弦长与中点皆无意义. 为自检,也可取 k 或 m 的特殊值代回,用真根核对 S, P 的符号与数量级.

整理时为什么不同乘常数,原因如下. 设把整理好的方程两边同乘 $\lambda\neq 0$,系数同步放缩为 λA、λB、λC,此时

$$\Delta'=(\lambda B)^2-4(\lambda A)(\lambda C)=\lambda^2\Delta,\qquad -\frac{\lambda B}{\lambda A}=-\frac{B}{A},\qquad \frac{\lambda C}{\lambda A}=\frac{C}{A}.$$

根与韦达两式不变,判别式却放缩了 λ^2 倍. 单看方程本身,放缩无害;问题出在与现成公式对照的时候.定理 3.23 的 $\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$ 与联立面积公式 (3-29) 都按未放缩的 A,B,C 推导,方程一旦被乘过 λ,直接代入就差出 λ^2 或 λ 的因子,检验也要带校正系数. 为免去这类校正,本节统一采用自然标准化的做法,即把 $y=kx+m$ 代入 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 后直接展开为 $(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2km\,x+a^2(m^2-b^2)=0$. 有分数系数时只允许去分母一次,如两边乘 4 化整,此后不再放缩,公式与方程一一对应,无需再校正.

3.7.1.0.7 常见失误清单

- 展开 $(kx+m)^2$ 漏掉中项 $2kmx$,或移项忘记变号. 展开、乘常数、移项分三步写,每步只完成一个动作,可以减少这类错误;
- 双曲线、抛物线未检查 $A\neq 0$ 就计算 Δ,会漏掉退化一次方程对应的几何情形(渐近线平行,水平线);
- $\Delta<0$ 时仍代入韦达两式,和与积形式上算得出,对应的交点却不存在;

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 整理时多乘常数放缩 A,B,C, 再把放缩后的 Δ 代入简化引理或面积公式, 会差出 λ^2 的因子;
- 求面积时先开方计算 $|x_1-x_2|$ 再平方, 会多算一次开方, 直接用 $(x_1-x_2)^2=\dfrac{\Delta}{A^2}$ 可以避免.

知乎@余命数

3.7.1.0.8　三类曲线的基础联立模板

- **椭圆** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上, 代入 $y=kx+m$, 得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2km\,x+a^2(m^2-b^2)=0.$$

- **双曲线** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上, 代入 $y=kx+m$, 得

$$(b^2-a^2k^2)x^2-2a^2km\,x-a^2(m^2+b^2)=0$$

(注意二次项系数 $A=b^2-a^2k^2$ 可正可负, 且 $A=0$ 时退化为一次方程, 对应渐近线平行情形).

- **抛物线** $y^2=2px$ 上, 代入 $y=kx+m$, 得

$$k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0$$

(若 $k=0$ 则直线水平, 联立后关于 x 至多一次, 需单独讨论).

例题 3.119 (椭圆基础联立) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 直线 $\ell:y=x+1$. 将直线与椭圆联立, 求 x_1+x_2, x_1x_2 与 Δ, 并判定 ℓ 与 C 的位置关系.

解 取 $k=1, m=1$, 代入 $16x^2+25y^2=400$:

$$16x^2+25(x+1)^2=400 \implies 41x^2+50x-375=0.$$

故 $A=41$、$B=50$、$C=-375$. 判别式

$$\Delta=B^2-4AC=50^2-4\cdot 41\cdot(-375)=2500+61500=64000>0,$$

故 ℓ 与 C 相交于两点. 由韦达定理 (第3.3节):

$$x_1+x_2=-\frac{50}{41},\qquad x_1x_2=-\frac{375}{41}.$$

不必求根即可得到和与积, 供后续弦长、面积等后处理使用.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.120 (双曲线基础联立) 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, 直线 $\ell:y=\dfrac{1}{2}x+1$. 写出联立后的一元二次方程, 求 Δ 与韦达两式, 并说明交点个数.

知乎@余命数

解 此处 $a^2=9$、$b^2=4$、$k=\dfrac{1}{2}$、$m=1$. 代入 $4x^2-9y^2=36$:

$$4x^2-9\Big(\frac{x}{2}+1\Big)^2=36 \implies 4x^2-9\Big(\frac{x^2}{4}+x+1\Big)=36$$
$$\implies 4x^2-\frac{9}{4}x^2-9x-9=36.$$

两边乘 4:$16x^2-9x^2-36x-36=144$, 即 $7x^2-36x-180=0$. 故 $A=7$、$B=-36$、$C=-180$. 判别式

知乎@余命数

$$\Delta=(-36)^2-4\cdot 7\cdot(-180)=1296+5040=6336>0,$$

交于两点. 韦达:

$$x_1+x_2=\frac{36}{7},\qquad x_1x_2=-\frac{180}{7}.$$

注意 $A=b^2-a^2k^2=4-9\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}>0$(自然标准化后乘 4 得 $A=7$), 未触及 $A=0$ 的渐近线平行退化.

例题 3.121 (抛物线基础联立) 抛物线 $C:y^2=8x$, 即 $2p=8$, $p=4$, 直线 $\ell:y=x+2$. 求交点横坐标的和与积, 并求弦长 $|AB|$.

解 代入 $y=x+2$ 得 $(x+2)^2=8x$, 即 $x^2+4x+4=8x$, 整理 $x^2-4x+4=0$, 即 $(x-2)^2=0$. 故 $\Delta=0$, 直线与抛物线相切于一点 $A(2,4)$(二重根). 此时弦退化为切点, $|AB|=0$.

若改取 $\ell:y=x+1$, 则 $(x+1)^2=8x$、$x^2+2x+1=8x$、$x^2-6x+1=0$.$\Delta=36-4=32>0$,

$$x_1+x_2=6,\qquad x_1x_2=1,\qquad |x_1-x_2|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

由弦长公式 (第3.3节, $k=1$):

$$|AB|=\sqrt{1+1}\cdot 4\sqrt{2}=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8.$$

抛物线联立展开后常数项常为 m^2, 一次项含 $-2p$, 系数形态与椭圆不同, 但联立与读韦达的步骤相同.

知乎@余命数

3.7.2 判别式的计算与简化

判别式 $\Delta = B^2 - 4AC$ 在联立中反复出现, 由符号判定位置关系, 由 $\sqrt{\Delta}$ 写弦长, 由整式形态讨论定值与存在性 ($\Delta \geq 0$). 直接展开往往冗长, 但按固定方式整理后, 因子形式通常很清楚. 现给出椭圆与双曲线情形的判别式简化引理, 并说明公因子提取与双曲线 $A = 0$ 的退化.

定理 3.23 (椭圆直线判别式简化引理) 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 直线 $\ell : y = kx + m$. 联立消 y 得二次方程

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2km\,x + a^2(m^2 - b^2) = 0.$$

其判别式简化为

$$\Delta = 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2 - m^2). \tag{3-28}$$

特别地, ℓ 与椭圆相切 $\iff \Delta = 0 \iff m^2 = b^2 + a^2k^2$.

证明 联立 $y = kx + m$ 与 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$:

$$b^2x^2 + a^2(kx + m)^2 - a^2b^2 = 0.$$

展开 $a^2(kx + m)^2 = a^2k^2x^2 + 2a^2km\,x + a^2m^2$, 合并得

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2km\,x + a^2(m^2 - b^2) = 0.$$

此处 $A = b^2 + a^2k^2$、$B = 2a^2km$、$C = a^2(m^2 - b^2)$. 计算

$$\begin{aligned}
\Delta = B^2 - 4AC &= (2a^2km)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)\cdot a^2(m^2 - b^2) \\
&= 4a^4k^2m^2 - 4a^2\big(b^2m^2 - b^4 + a^2k^2m^2 - a^2k^2b^2\big) \\
&= 4a^4k^2m^2 - 4a^2b^2m^2 + 4a^2b^4 - 4a^4k^2m^2 + 4a^4k^2b^2 \\
&= 4a^2b^2\big(-m^2 + b^2 + a^2k^2\big) = 4a^2b^2\big(b^2 + a^2k^2 - m^2\big).
\end{aligned}$$

$m^2 = b^2 + a^2k^2 \iff \Delta = 0$. 二次项系数 $A = b^2 + a^2k^2 > 0$ 恒成立, 故相切 $\iff \Delta = 0$. □

注 3.9 (双曲线陷阱)
双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的平行结论是将 (3-28) 改为

$$\Delta = 4a^2b^2(m^2 + b^2 - a^2k^2);$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此时 $A=b^2-a^2k^2$ 可正可负, 且 $A=0$ 时退化一次方程, 对应直线与渐近线平行(斜率 $k=\pm\dfrac{b}{a}$). 故相切 $\iff \Delta=0$ 的结论须附加 $A\neq 0$ 的条件. 凡见 $k=\pm\dfrac{b}{a}$, 先检查 A 是否为零, 再谈 Δ.

3.7.2.0.1 公因子提取 展开 $\Delta=B^2-4AC$ 后, 常先提出 $4a^2$ 或 $4b^2$ 等公因子, 再整理括号内的 k,m 多项式. 引理 (3-28) 已把椭圆情形一次完成; 含参题可**跳过展开步骤**直接写因子形式, 然后读符号, 读等式.

例题 3.122 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 直线 $\ell:y=x+m$ $(m\in\mathbb{R})$. 用判别式简化引理直接写出 Δ, 并由此分类 ℓ 与 C 的位置关系.

知乎@余命数

解 此处 $a^2=9$、$b^2=4$、$k=1$. 由 定理 3.23,

$$\Delta=4\cdot 9\cdot 4(4+9-m^2)=144(13-m^2).$$

- 若 $\Delta>0$, 即 $m^2<13$ 亦即 $|m|<\sqrt{13}$, 则 ℓ 与 C 交于两点;
- 若 $\Delta=0$, 即 $|m|=\sqrt{13}$, 则相切;
- 若 $\Delta<0$, 即 $|m|>\sqrt{13}$, 则相离, 无公共点.

知乎@余命数

若不用引理直接算: 由 $4x^2+9(x+m)^2=36$ 得 $13x^2+18mx+9m^2-36=0$,

$$\Delta=324m^2-4\cdot 13\cdot(9m^2-36)=144(13-m^2).$$

知乎@余命数

同结果, 但要算三步乘开方; 引理一步直读因子. 对 k 含参的题型, 速差更大.

几何校验如下. 直线 $x-y+m=0$ 与椭圆相切的条件为 $A^2a^2+B^2b^2=C^2$. 此处 $A=1$、$B=-1$、$C=m$, 故 $9+4=m^2\iff m^2=13$, 与引理给出的相切条件 $m^2=b^2+a^2k^2=13$ 完全一致.

3.7.3 弦长公式的灵活选用

第3.3节 的弦长公式有两条等价形式: 对直线 $y=kx+m$ $(k\neq 0)$,

$$|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|,$$

知乎@余命数

第二条可写为 $\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{|k|}|y_1-y_2|$. 选用哪个形式, 取决于哪种方程的根读得更顺.

选用时可大致依斜率大小: $|k|\le 1$ 时优先消 y 得关于 x 的二次方程(A 中 a^2k^2 不大, 系数较干净); $|k|>1$ 时优先把直线写成 $x=ty+n$ $(t=\dfrac{1}{k})$, 近竖直线时 x 形系数膨胀, y 形更省. 过焦点的弦若目标含 $|PF|$ 或 $|P_1F|+|P_2F|$, 宜先用焦半径

$|PF_2| = a - ex_0$ (第3.3节) 把距离一阶线性化, 再与韦达配合. 个别题目某一边恰好因式分解时, 仍以具体计算为准.

例题 3.123　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$($a^2=16$、$b^2=9$、$c=\sqrt{7}$, 右焦点 $F(\sqrt{7},0)$), 过 F 斜率为 4 的直线 $\ell: y=4(x-\sqrt{7})$. 试用两种弦长形式分别计算 $|AB|$, 并比较两条代数路径的难易.

解

把 $y=4(x-\sqrt{7})$ 代入 $9x^2+16y^2=144$:

$$9x^2+16\cdot 16(x-\sqrt{7})^2=144 \implies 265x^2-512\sqrt{7}\,x+1648=0.$$

判别式

$$\Delta_x=(512\sqrt{7})^2-4\cdot 265\cdot 1648=1835008-1746880=88128=5184\cdot 17.$$

故

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta_x}}{265}=\frac{72\sqrt{17}}{265},\qquad |AB|=\sqrt{1+16}\cdot\frac{72\sqrt{17}}{265}=\frac{72\cdot 17}{265}=\frac{1224}{265}.$$

把 ℓ 改写为 $x=\dfrac{1}{4}y+\sqrt{7}$, 代入 $9x^2+16y^2=144$:

$$9\Big(\frac{y}{4}+\sqrt{7}\Big)^2+16y^2=144 \implies \frac{265}{16}y^2+\frac{9\sqrt{7}}{2}y-81=0.$$

自然标准化(乘 16)得 $265y^2+72\sqrt{7}\,y-1296=0$, 判别式

$$\Delta_y=(72\sqrt{7})^2-4\cdot 265\cdot(-1296)=36288+1373760=1410048=16\cdot 88128.$$

注意 $\Delta_y=16\Delta_x$ 来自乘 16 这一放缩. 计算

$$\begin{aligned}|y_1-y_2|&=\frac{\sqrt{\Delta_y}}{265}=\frac{288\sqrt{17}}{265},\\ |AB|&=\sqrt{1+\frac{1}{16}}\cdot\frac{288\sqrt{17}}{265}\\ &=\frac{\sqrt{17}}{4}\cdot\frac{288\sqrt{17}}{265}=\frac{1224}{265}.\end{aligned}$$

两条路径给出同一答案 $\dfrac{1224}{265}$. 这里 $|k|=4$ 偏大, 形式二中间常系数较大; 当 k 近无穷 (近竖直线) 时, 形式二的判别式比形式一小得多, 选形式二才合算. 仅当 $|k|$ 明显偏离 1 时, 改用另一形式才有实际增益.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

过 F 的弦若附加焦半径条件, 如 $|AF|+|BF|$ 为定值, 焦半径公式 $|PF_2|=a-ex_0=4-\dfrac{\sqrt{7}}{4}x_0$(这里 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$)会进一步把弦长与中点条件线性化, 详见第3.9节 的韦达后处理专题.

3.7.4 面积的联立表达

三角形面积在联立框架里有三条常用路径, 可视已知条件选用.

3.7.4.0.1 底高式 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d(P,\ell)$, 其中 $|AB|$ 用弦长公式, $d(P,\ell)$ 用点到直线距离. 二者均含因子 $\sqrt{1+k^2}$ 或其倒数, 在乘积中相互抵消, 给出不含根号的联立面积式.

3.7.4.0.2 坐标行列式 已知两端点坐标时, $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ (第三顶点为原点; 一般第三顶点见 第3.4节 鞋带公式). 联立后若已得 $S=x_1+x_2$, $P=x_1x_2$ 及 $y_i=kx_i+m$, 可化为

知乎@余命数

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|m|\,|x_1-x_2|,$$

一般情形则用 y_1y_2, $x_1y_2+x_2y_1$ 的对称展开.

3.7.4.0.3 割补 当三角形与坐标轴或已知矩形/梯形有包含关系时, 用大面积减小面积, 避免直接算斜边. 典型如 $\triangle OAB$ 与坐标轴围成的梯形割补.

3.7.4.0.4 联立面积公式(椭圆, 第三顶点为原点) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 直线 $\ell: y=kx+m$ 交椭圆于 A,B. 以原点 O 为第三顶点的 $\triangle OAB$ 面积为

$$S_{\triangle OAB}=\frac{ab\,|m|\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{b^2+a^2k^2}. \tag{3-29}$$

推导如下(底高式 + $\sqrt{1+k^2}$ 互消).

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|AB|\cdot d(O,\ell)\\&=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{b^2+a^2k^2}}_{\text{弦长, 见 第3.3节}}\cdot\underbrace{\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}}_{\text{点线距}}\\&=\frac{|m|\sqrt{\Delta}}{2(b^2+a^2k^2)}.\end{aligned}$$

知乎@余命数

代入 定理 3.23 的 $\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$, 得

$$\sqrt{\Delta}=2ab\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}$$

(取正, 即须 $b^2+a^2k^2-m^2\geq 0$). 整理即得 (3-29).

第三顶点不必是 O, 只需把 $|m|$ 相应换为

$$|kx_0-y_0+m|,$$

仍可同样在弦长乘积里消去 $\sqrt{1+k^2}$.

例题 3.124　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ($a^2=16$、$b^2=4$、$c=2\sqrt{3}$, 右焦点 $F(2\sqrt{3},0)$), 过 F 斜率 $k=1$ 的直线 $\ell:y=x-2\sqrt{3}$. 求 $\triangle OAB$ 的面积, 分别用底高式独立计算和联立面积公式 (3-29) 两条路径.

解　此处 $k=1, m=-2\sqrt{3}$, 故 $|m|=2\sqrt{3}$ 且 $b^2+a^2k^2-m^2=4+16-12=8$.

联立得 $(4+16)x^2+2\cdot16\cdot1\cdot(-2\sqrt{3})\,x+16(12-4)=0$, 即 $20x^2-64\sqrt{3}\,x+128=0$, 简化为 $5x^2-16\sqrt{3}\,x+32=0$.

知乎@余命数

$$\Delta_x=(16\sqrt{3})^2-4\cdot5\cdot32=768-640=128.$$

知乎@余命数

故 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{128}}{5}=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$, $|AB|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{8\sqrt{2}}{5}=\dfrac{16}{5}$.

知乎@余命数

点 O 到 $\ell:x-y-2\sqrt{3}=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$. 于是

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}\cdot\sqrt{6}=\frac{8\sqrt{6}}{5}.$$

代入 $a=4$、$b=2$、$|m|=2\sqrt{3}$、$b^2+a^2k^2-m^2=8$、$b^2+a^2k^2=20$:

$$S_{\triangle OAB}=\frac{4\cdot2\cdot2\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}}{20}=\frac{16\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}}{20}=\frac{32\sqrt{6}}{20}=\frac{8\sqrt{6}}{5}.$$

两路径同结果. 区别在路径一需独立算弦长与点线距再相乘 (经历 $\sqrt{1+k^2}$ 与 $\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ 互消的隐性步骤), 路径二把互消预先完成, 常数项直接整体出场.

$a=4$, $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 对交点 A,B, 由焦半径公式 (第3.3节) $|AF_2|=a-ex_A=4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_A$, 同样 $|BF_2|=4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_B$. 焦点为弦内分点, 故

知乎@余命数

$$|AF|+|BF|=|AB|=\frac{16}{5}\quad\Longleftrightarrow\quad8-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_A+x_B)=\frac{16}{5}.$$

联立得 $x_A+x_B=\dfrac{16\sqrt{3}}{5}$. 由韦达(二次方程 $5x^2-16\sqrt{3}\,x+32=0$)$x_A+x_B=\dfrac{16\sqrt{3}}{5}$, 两式吻合.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.7.5 代数变形的基本技巧

联立之后, 许多目标量都是关于两根的对称式. 记 $S=x_1+x_2$, $P=x_1x_2$, 下列几类整式会反复用到.

3.7.5.0.1 常用对称式

- $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$;
- $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$;
- $(x_1-x_2)^2=S^2-4P=\dfrac{\Delta}{A^2}$;
- $x_1^2x_2+x_1x_2^2=SP$;
- $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{S}{P}\,(P\neq 0)$;
- $(x_1-c)(x_2-c)=P-cS+c^2$.

变形时宜先看清目标式(待证、待求或待比较), 再反向构造 S,P 的线性组合, 避免盲目展开; 多项式先写成 S,P 的整式再代入韦达. 遇到 $x_1^2+x_2^2$ 一类, 常可配上与 m,k 或 c 相关的项使目标齐次, 便于读出定值. 若目标式本身含可分解因子, 如 x_1x_2, x_1+x_2+D, 宜先分解再代入.

3.7.5.0.2 数值速算提醒 $\Delta=B^2-4AC$ 展开时, 先提公因子 4 或 A 的公共数字; $(x_1-x_2)^2=\dfrac{\Delta}{A^2}$ 可避免先开方再平方的往返. 韦达代入通分时, 分子按 k^2c^2 等同类项归并, 往往一次消掉繁杂的中项.

例题 3.125 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0, c^2=a^2-b^2)$, 右焦点 $F(c,0)$, 直线 $\ell: y=k(x-c)$ 过右焦点, 斜率为 k. 设 ℓ 交 C 于 A,B 两点. 试证

$$(x_A-c)(x_B-c)=-\frac{b^4}{b^2+a^2k^2}.$$

解 ℓ 即 $y=kx-kc$, 对应 $y=kx+m$ 形下 $m=-kc$. 代入椭圆方程按自然标准化整理:

$$b^2x^2+a^2(kx-kc)^2-a^2b^2=0 \implies (b^2+a^2k^2)x^2-2a^2ck^2\,x+a^2(k^2c^2-b^2)=0.$$

记 $A_0=b^2+a^2k^2$、$B_0=-2a^2ck^2$、$C_0=a^2(k^2c^2-b^2)$. 由韦达定理 (第3.3节),

$$S=x_A+x_B=\frac{2a^2ck^2}{b^2+a^2k^2},\qquad P=x_Ax_B=\frac{a^2(k^2c^2-b^2)}{b^2+a^2k^2}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

针对目标式展开

$$(x_A-c)(x_B-c)=P-cS+c^2.$$

代入韦达两式, 通分 $A_0=b^2+a^2k^2$:

$$(x_A-c)(x_B-c)=\frac{a^2(k^2c^2-b^2)-2a^2c^2k^2+c^2(b^2+a^2k^2)}{b^2+a^2k^2}.$$

整理分子(按 $a^2k^2c^2$ 三次同类项归并):

$$\begin{aligned}\text{分子}&=a^2k^2c^2-a^2b^2-2a^2c^2k^2+c^2b^2+c^2a^2k^2\\&=(a^2k^2c^2-2a^2c^2k^2+a^2k^2c^2)+(-a^2b^2+b^2c^2)\\&=0+b^2(c^2-a^2)\\&=b^2\cdot(-b^2)=-b^4,\end{aligned}$$

最后一步用了 $c^2-a^2=(a^2-b^2)-a^2=-b^2$. 故

$$(x_A-c)(x_B-c)=-\frac{b^4}{b^2+a^2k^2}.$$

等式对一切使 $\Delta>0$ 的 k 成立(现 $m=-kc$, $b^2+a^2k^2-m^2=b^2+a^2k^2-k^2c^2=b^2+k^2b^2=b^2(1+k^2)>0$ 恒真).

由于 $b^2+a^2k^2>0$, 右端恒为负. 这正反映 F 严格位于 A,B 之间, 因为 x_A-c 与 x_B-c 异号. 进一步, $|(x_A-c)(x_B-c)|=\dfrac{b^4}{b^2+a^2k^2}$ 仅含 k^2, 当 $k\to\infty$(弦趋于竖直)时渐近 $\dfrac{b^4}{a^2k^2}\to 0$, 与近竖直的过焦弦两端点在 F 上下对称靠拢的图景相一致.

计算时宜先选定目标式 $(x_A-c)(x_B-c)$, 写成 S,P 与常数 c 的组合, 再代入韦达并通分; 分子按 k^2c^2 同类项归并后, 即可显出 $b^2(c^2-a^2)$ 的结构. 先写成整式、再代入, 往往比边代入边展开更易看出 $-b^4$.

3.7.6 弦长与长度和差商积例题

弦长公式是设线法的基本工具, 由此衍生出长度和、差、商、积的各类问题.

例题 3.126 (弦长问题) 已知点 F_1,F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右焦点, 过 F_2 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交椭圆于 A,B 两点, 则弦 AB 的长为 __.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 答案: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点 $F_2(1,0)$, 因为直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 且过点 $F_2(1,0)$, 所以直线 $AB: y=x-1$, 设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases} y=x-1 \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$, 消去 y 得 $3x^2-4x=0$, 所以 $x_1=0, x_2=\frac{4}{3}$, 所以 $y_1=-1, y_2=\frac{1}{3}$, 所以 $A(0,-1), B\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$, 所以 $|AB|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 故答案为: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

例题 3.127 (弦长问题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率为 $\frac{1}{2}$, 椭圆 C 上点 M 满足 $|MF_1|+|MF_2|=4$. (1) 求椭圆 C 的标准方程; (2) 若过坐标原点 $O(0,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两点, 求线段 PQ 长为 $\sqrt{14}$ 时直线 l 的方程.

例题 3.128 (长度和问题) 已知 F 为抛物线 $E: x^2=4y$ 的焦点, 过点 $(0,2)$ 的直线 l 与抛物线 E 交于 A, B 两点, 抛物线 E 在 A, B 两点处的切线交于点 L.

(1) 设 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 E 上一点, 证明: 抛物线 E 在点 P 处的切线方程为 $y=\frac{x_0}{2}x-y_0$, 并利用切线方程求点 L 的纵坐标的值;

(2) 点 C 为抛物线 E 上异于 A, B 的点, 过点 C 作抛物线 E 的切线, 分别与线段 AL, BL 交于 M, N;

(i) 若 $\overrightarrow{LM}=\lambda\overrightarrow{LA}, \overrightarrow{LN}=\mu\overrightarrow{LB}$, 求 $\lambda+\mu$ 的值.

(ii) 证明: $|FA|+|FB|+|FC|>|FL|+|FM|+|FN|$

解 答案: (1) 切线方程 $y=\frac{x_0}{2}x-y_0$, $y_L=-2$; (2)(i) 1; (ii) 见解析. (1) 由题意, 曲线 $y=\frac{x^2}{4}$, 可得 $y'=\frac{x}{2}$, 则 $y'|_{x=x_0}=\frac{x_0}{2}$, 点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y=\frac{x_0}{2}(x-x_0)+y_0$, 即 $y=\frac{x_0}{2}x-\frac{x_0^2}{2}+y_0$, 因为 $x_0^2=4y_0$, 代入可得 $y=\frac{x_0}{2}x-y_0$, 设 $A(x_A,y_A), B(x_B,y_B), L(x_L,y_L)$,

例题 3.129 (长度差问题) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 且 $|F_1F_2|=2$, 过点 F_2 作两条直线 l_1, l_2, 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, $\triangle F_1AB$ 的周长为 $4\sqrt{2}$. (1) 求 C 的方程; (2) 若 $\triangle F_1AB$ 的面积为 $\frac{4}{3}$, 求 l_1 的方程; (3) 若 l_2 与 C 交于 M, N 两点, 且 l_1 的斜率是 l_2 的斜率的 2 倍, 求 $|MN|-|AB|$ 的最大值.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$; (2) $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$; (3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (1) 设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$, 由题意知 $2c=2$, 所以 $c=1$, $\triangle F_1AB$ 的周长为 $|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=4\sqrt{2}$,所以 $a=\sqrt{2}$,所以 $b^2=a^2-c^2=1$,故 C 的

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. (2) 易知 l_1 的斜率不为 0,设 $l_1: x=my+1, A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases} x=my+1 \\ x^2+2y^2-2=0 \end{cases}$,得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$,所以 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}, y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$. 所以 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$,由 $S_{\triangle F_1AB}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=\frac{4}{3}$,解得 $m=\pm1$,所以 l_1 的方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$. (3) 由 (2) 可知 $|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}=2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{m^2+2}\right)$, 因为 l_1 的斜率是 l_2 的斜率的 2 倍, 所以 $m\neq0$, 得 $|MN|=2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4m^2+2}\right)$. 所以 $|MN|-|AB|=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{m^2+2}-\frac{1}{4m^2+2}\right)=\frac{3\sqrt{2}m^2}{2m^4+5m^2+2}=\frac{3\sqrt{2}}{2m^2+5+\frac{2}{m^2}}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4+5}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, 当且仅当 $m=\pm1$ 时, 等号成立, 所以 $|MN|-|AB|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

例题 3.130 (长度商问题) 已知抛物线 $C_1: y^2=4x$ 的焦点为椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点 F, 点 P 为抛物线 C_1 与椭圆 C_2 在第一象限的交点, 且 $|PF|=\frac{5}{3}$. (1) 求椭圆 C_2 的方程; (2) 若直线 l 过点 F, 交抛物线 C_1 于 A,C 两点, 交椭圆 C_2 于 B,D 两点 (A,B,C,D 依次排序), 且 $|AC|-|BD|=\frac{30}{11}$, 求直线 l 的方程.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2) $\sqrt{2}x\pm y-\sqrt{2}=0$, 即 $y=\pm\sqrt{2}(x-1)$. (1) 由抛物线 $y^2=4x$ 可知: $F(1,0)$, 故由 $|PF|=\frac{5}{3}$ 得: $|PF|=x_P+1=\frac{5}{3}, x_P=\frac{2}{3}$, 故 $y_P^2=\frac{8}{3}$, 则 $P(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$, 则对于 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 有: $\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ \frac{4}{9a^2}+\frac{24}{9b^2}=1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a^2=4 \\ b^2=3 \end{cases}$, 故椭圆方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2) 过点 F 的直线 l 的斜率不存在时, $l: x=1$、$P(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$、$1>\frac{2}{3}$, 所以直线 l 在点 P 的右侧, 与两曲线的交点顺序变成 A,B,D,C 的顺序, 不满足题意, 如下图; 所以过点 F 的直线 l 的斜率存在, 故设直线 l 的斜率为 k, 则直线方程为 $y=k(x-1)$, 联立抛物线方程: $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$, 整理得: $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$, 设 $A(x_1,y_1), C(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$, 故 $|AC|=x_1+x_2+2=4+\frac{4}{k^2}$, 联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$, 整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$, 设 $B(x_3,y_3), D(x_4,y_4)$, 则 $x_3+x_4=\frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_3\cdot x_4=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$, 则 $|BD|=\sqrt{(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2-\frac{4(4k^2-12)}{3+4k^2}}=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$, 又 $|AC|-|BD|=\frac{30}{11}$, 即 $4+\frac{4}{k^2}-\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}=\frac{30}{11}$, 整理得 $38k^4-43k^2-66=0$, 解得 $k^2=2$, 因为 $P(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$, $F(1,0)$, 而 $1>\frac{2}{3}$, 且 A,B,C,D 依次排序, 所以 $k>0$, 如下图, 故 $k=\sqrt{2}$, 故直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}(x-1)$. 综上, 直线 l 的方程为 $\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}=0$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.131 (长度积问题) （2024·高三·北京海淀·开学考试）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(2,0)$，上顶点为 $B(0,\sqrt{3})$. (1) 求椭圆 C 的方程；(2) 椭圆 C 的左焦点为 F，点 P 为椭圆 C 上不同于顶点的一点，直线 AP,FP 与 y 轴的交点分别为 M,N，若 $|OM|\cdot|ON|=\frac{9}{4}$，求点 P 的横坐标.

解 答案：(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；(2) 1 或 $-\frac{7}{5}$. (1) 由题设，$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. (2) 法一：设 $P(x_0,y_0)$，所以 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1\,(-2<x_0<2,x_0\neq 0)$ 所以 $k_{AP}=\frac{y_0}{x_0-2}$，直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$. 令 $x=0$，得 $y_M=\frac{-2y_0}{x_0-2}$ 又 $k_{FP}=\frac{y_0}{x_0+1}$，直线 FP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+1}(x+1)$ 令 $x=0$，得 $y_N=\frac{y_0}{x_0+1}$，所以 $|OM|\cdot|ON|=\left|\frac{-2y_0}{x_0-2}\right|\left|\frac{y_0}{x_0+1}\right|=\left|\frac{2\cdot3(1-\frac{x_0^2}{4})}{(x_0-2)(x_0+1)}\right|=\frac{9}{4}$，所以 $\left|\frac{3}{2}\frac{(4-x_0^2)}{(x_0-2)(x_0+1)}\right|=\frac{9}{4}$，所以 $\left|\frac{2+x_0}{x_0+1}\right|=\frac{3}{2}$，所以 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{7}{5}$. 所以点 P 的横坐标为 1 或 $\frac{7}{5}$. 法二：由题意直线 AP 斜率存在，且不为 0. 设直线 AP 的方程为 $y=k(x-2)$. 令 $x=0$，得 $y_M=-2k$ 由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$. 易得 $\Delta>0$，设 $P(x_0,y_0)\,(-2<x_0<2,x_0\neq 0)$，则 $y_0=k(x_0-2)$，$2x_0=\frac{16k^2-12}{4k^2+3}$，所以 $x_0=\frac{8k^2-6}{4k^2+3}$. 直线 FP 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+1}(x+1)$.

例题 3.132 (长度的范围与最值问题) 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，且经过点 $(2,3)$. (1) 求 C 的方程；(2) 若直线 l 与 C 交于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$（点 O 为坐标原点），求 $|AB|$ 的取值范围.

解 答案：(1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$；(2) $[\sqrt{6},+\infty)$. (1) 由题意可得 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{a^2+b^2}{a^2}=2\end{cases}$，解得 $a^2=1,b^2=3$，故双曲线方程为 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$. (2) 当直线 l 斜率不存在时，可设 $A(x_A,y_A),B(x_A,-y_A)$，则 $\overrightarrow{OA}=(x_A,y_A),\overrightarrow{OB}=(x_A,-y_A)$，将其代入双曲线方程 $x_A^2-\frac{y_A^2}{3}=1$，又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_A^2-y_A^2=0$，解得 $y_A=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，此时 $|AB|=2|y_A|=\sqrt{6}$. 当直线 l 斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0,\cdots\cdots$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.133 (长度的定值问题) 如图所示, 抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线过点 $(-2,3)$, (1) 求抛物线的标准方程; (2) 若角 α 为锐角, 以角 α 为倾斜角的直线经过抛物线的焦点 F, 且与抛物线交于 A、B 两点, 作线段 AB 的垂直平分线 l 交 x 轴于点 P, 证明: $|FP|-|FP|\cos 2\alpha$ 为定值, 并求此定值.

解 (1) 解: 由题意得 $-\frac{p}{2}=-2\therefore p=4\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2=8x$ (2) 设 $A\left(x_A,y_A\right),B\left(x_B,y_B\right)$, 直线 AB 的斜率为 $k=\tan\alpha$ 则直线方程为 $y=k\left(x-2\right)$ 将此式代入 $y^2=8x$, 得 $k^2x^2-4\left(k^2+2\right)x+4k^2=0$, 故 $x_A+x_B=\frac{4(k^2+2)}{k^2}$ 设 AB 的中垂线为直线 m, 设直线 m 与 AB 的交点为 $E\left(x_E,y_E\right)$

例题 3.134 (2024·海南模拟预测) 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴长为 $2\sqrt{2}$, 点 $P(2,\sqrt{6})$ 在双曲线 C 上.(1) 求双曲线 C 的标准方程; (2) 过点 P 且斜率为 $2\sqrt{6}$ 的直线与双曲线 C 的另一个交点为 Q, 求 $|PQ|$.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$; (2) $\frac{20}{7}$. (1) 为双曲线的实轴长为 $2\sqrt{2}$, 所以 $2a=2\sqrt{2}$, 解得: $a=\sqrt{2}$; 又因为点 $P(2,\sqrt{6})$ 在双曲线 C 上, 所以 $\frac{4}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1$, 解得: $b=\sqrt{6}$, 所以双曲线的标准方程为: $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$.(2) 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 由题可得过点 P 且斜率为 $2\sqrt{6}$ 的直线方程为: $y-\sqrt{6}=2\sqrt{6}(x-2)$, 即 $y=2\sqrt{6}x-3\sqrt{6}$, 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1\\ y=2\sqrt{6}x-3\sqrt{6}\end{cases}$, 消去 y 可得: $7x^2-24x+20=0$, 所以 $x_1+x_2=\frac{24}{7}$, $x_1x_2=\frac{20}{7}$, 所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+24}\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^2-4\times\frac{20}{7}}=\frac{20}{7}$

知乎@余命数

例题 3.135 已知抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 $F(0,2)$.(1) 求 p; (2) 斜率为 2 的直线过点 F, 且与抛物线 E 交于 A,B 两点, 求线段 AB 的长.

解 答案: (1) 4; (2) 40. (1) $\because F(0,2)$ 为抛物线 E 的焦点, $\therefore\frac{p}{2}=2$, 解得: $p=4$.(2) 由 (1) 知: 抛物线 $E:x^2=8y$; $\therefore$ 直线 $AB:y=2x+2$, $\therefore$ 由 $\begin{cases}y=2x+2\\ x^2=8y\end{cases}$ 得: $x^2-16x-16=0$, 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=16$、$\because y_1+y_2=2x_1+2+2x_2+2=2(x_1+x_2)+4=36$、$\therefore|AB|=y_1+y_2+p=36+4=40$.

知乎@余命数

例题 3.136 (2024·宁夏银川·银川一中校考模拟) 如图所示, 由半椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(y\leqslant 0)$ 和两个半圆 $C_2:(x+1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$、$C_3:(x-1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$ 组成曲线 $C:F(x,y)=0$, 其中点 A_1,A_2 依次为 C_1 的左、右顶点, 点 B 为 C_1 的下顶点, 点 F_1,F_2 依次为 C_1 的左、右焦点. 若点 F_1,F_2 分别为曲

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

线 C_2,C_3 的圆心. (1) 求 C_1 的方程; (2) 若过点 F_1,F_2 作两条平行线 l_1,l_2 分别与 C_1,C_2 和 C_1,C_3 交于 M,N 和 P,Q, 求 $|MN|+|PQ|$ 的最小值.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\leqslant 0)$; (2) 5. (1) 由两圆的方程知: 圆心分别为 $C_1(-1,0)$、$C_2(1,0)$, 即 $F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$. $\therefore b^2+1=4$, 解得: $b^2=3$, $\therefore C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\leqslant 0)$. (2) 由题意知: $|MN|+|PQ|=|MF_1|+|PF_2|+2$; $\therefore l_1//l_2$, $\therefore$ 由对称性可知: $|MF_1|+|PF_2|$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 截直线 l_2 的弦长, 设 $l_2:x=my+1$, 其与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 由 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得: $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$, 则 $\Delta=48(3m^2+3)>0$ $\therefore y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$、$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$、$\therefore |MF_1|+|PF_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}=4-\frac{4}{3m^2+4}$, 当 $m=0$ 时, $|MF_1|+|PF_2|$ 取得最小值 $4-1=3$, $\therefore |MN|+|PQ|$ 的最小值为 $3+2=5$.

知乎@余命数

例题 3.137 已知抛物线 $C:y^2=2px$ 经过点 $(2,-2\sqrt{6})$, 直线 $l_1:y=kx+m$ $(km\neq 0)$ 与 C 交于 A,B 两点(异于坐标原点 O). (1) 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 证明: 直线 l_1 过定点. (2) 已知 $k=2$, 直线 l_2 在直线 l_1 的右侧, $l_1\parallel l_2$, l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\sqrt{5}$, l_2 交 C 于 M,N 两点, 试问是否存在 m, 使得 $|MN|-|AB|=10$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 说明理由.

解 答案: $m=\frac{31}{24}$. (1) 证明: 将点 $(2,-2\sqrt{6})$ 代入 $y^2=2px$, 得 $24=4p$, 即 $p=6$. 联立 $\begin{cases}y^2=12x,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $ky^2-12y+12m=0$, 由 $km\neq 0$, 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则 $y_1y_2=\frac{12m}{k}$, $x_1x_2=\frac{y_1^2}{12}\cdot\frac{y_2^2}{12}=\frac{(y_1y_2)^2}{144}=\frac{m^2}{k^2}$. 因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 所以 $x_1x_2+y_1y_2=\frac{m^2}{k^2}+\frac{12m}{k}=0$ 恒成立, 则 $m=-12k$, 所以 l_1 的方程为 $y=k(x-12)$, 故直线 l_1 过定点 $(12,0)$. (2) 联立 $\begin{cases}y^2=12x,\\ y=2x+m,\end{cases}$ 得 $4x^2+(4m-12)x+m^2=0$, 则 $\begin{cases}x_1+x_2=-m+3,\\ x_1x_2=\frac{m^2}{4},\end{cases}$ 且 $\Delta=(4m-12)^2-16m^2=48(3-2m)>0$, 即 $m<\frac{3}{2}$, $|AB|=\sqrt{1+2^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+2^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6m}$, 设 $l_2:y=2x+n$, 同理可得 $|MN|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{9-6n}$. 因为直线 l_2 在 l_1 的右侧, 所以 $n<m$, 则 $d=\frac{m-n}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, 即 $n=m-5$. 所以 $|MN|-|AB|=\sqrt{5}\left(\sqrt{9-6(m-5)}-\sqrt{9-6m}\right)=10$, 即 $\sqrt{39-6m}=2\sqrt{5}+\sqrt{9-6m}$, 解得 $m=\frac{31}{24}$, 因为 $\frac{31}{24}<\frac{3}{2}$, 所以满足条件的 m 存在, $m=\frac{31}{24}$.

知乎@余命数

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.138　(1) 若 MN 的中点为 H, 直线 OH、MN 的斜率分别为 k_1, k_2, O 为坐标原点, 求 $k_1 \cdot k_2$; (2) 若直线 l_1 与直线 l_2 的交点 T 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上, 且直线 l_1 与直线 l_2 的斜率和为 0, 证明: $\frac{|TP|}{|TM|}=\frac{|TN|}{|TQ|}$.

解 答案:(1) 16. (1) 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\sqrt{17}\\ \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{4^2}{b^2}=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}$,所以 $x^2-\frac{y^2}{16}=1$,设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$、$H(x_0,y_0)$ 因为 M、N 两点都在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{16}=1$ 上,所以 $\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{16}=1\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{16}=1\end{cases}$,两式作差得 $x_1^2-x_2^2=\frac{y_1^2-y_2^2}{16}$,整理得 $x_0(x_1-x_2)=\frac{y_0(y_1-y_2)}{16}$,则 $k_1\cdot k_2=\frac{y_0(y_1-y_2)}{x_0(x_1-x_2)}=16$; (2) 设 $T(\frac{1}{2},n)$, 设直线 MN 的方程为 $y-n=k(x-\frac{1}{2})$、$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases}y-n=k(x-\frac{1}{2})\\ x^2-\frac{y^2}{16}=1\end{cases}$,化简得 $(16-k^2)x^2+(k^2-2kn)x-\frac{1}{4}k^2-n^2+kn-16=0, \Delta=16(4n^2-4kn-3k^2+64)$, 则 $x_1+x_2=-\frac{k^2-2kn}{16-k^2}$, $x_1\cdot x_2=\frac{-\frac{1}{4}k^2-n^2+kn-16}{16-k^2}$, 故 $|TM|=\sqrt{1+k^2}|x_1-\frac{1}{2}|$、$|TN|=\sqrt{1+k^2}|x_2-\frac{1}{2}|$、$|TM|\cdot|TN|=(1+k^2)|x_1-\frac{1}{2}||x_2-\frac{1}{2}|=(1+k^2)|x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}|=(1+k^2)|\frac{-\frac{1}{4}k^2-n^2+kn-16}{16-k^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2-2kn}{16-k^2}+\frac{1}{4}|=\frac{(1+k^2)(12+n^2)}{|k^2-16|}$, 由 $k_{PQ}+k_{MN}=0$, 所以 $k_{PQ}=-k$, 从而 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{(1+(-k)^2)(12+n^2)}{|(-k)^2-16|}=\frac{(1+k^2)(12+n^2)}{|k^2-16|}$, $\therefore|TM|\cdot|TN|=|TP|\cdot|TQ|$, 即 $\frac{|TP|}{|TM|}=\frac{|TN|}{|TQ|}$.

例题 3.139　(2) 过焦点 F 的直线(斜率存在且不为 0)交抛物线 C 于 A,B 两点, 线段 AB 的中垂线交抛物线的对称轴于点 P, 求 $\frac{|FP|}{|AB|}$

解　答案: $\frac{1}{2}$. (1) 因为抛物线 C 的焦点 F 到准线 l 的距离为 2, 所以 $p=2$, 根据建系方案的不同, 抛物线的标准方程有四种可能, 分别是 $y^2=4x, y^2=-4x, x^2=4y, x^2=-4y$.

(2) 在平面直角坐标系中, 抛物线的位置并不影响 $\frac{|FP|}{|AB|}$ 的取值, 因此不妨取抛物线的方程为 $y^2=4x$, 此时焦点 $F(1,0)$. 根据题意, 直线 AB 的斜率存在且不为 0, 因此设直线 AB 的方程为 $x=my+1$. 与抛物线 $y^2=4x$ 联立, 得关于 y 的一元二次方程 $y^2-4my-4=0$, 则 $\Delta=16m^2+16>0$, 设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 则 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4, |y_1-y_2|=\sqrt{16m^2+16}.x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$, 则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=4(1+m^2)$. 线段 AB 的中点坐标为 $(2m^2+1,2m)$, 中

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

垂线方程为 $y-2m=-m(x-2m^2-1)$, 令 $y=0$, 解得 $x=3+2m^2$, 即中垂线与 x 轴交于 $P(3+2m^2,0)$, 所以 $|FP|=2+2m^2$, 则 $\dfrac{|FP|}{|AB|}=\dfrac{1}{2}$.

例题 3.140 (2024·湖北黄冈·模拟预测) 在生活中, 我们经常看到椭圆, 比如放在太阳底下的篮球, 在地面上的影子就可能是一个椭圆. 已知影子椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, C 的上顶点为 A, 两个焦点为 F_1,F_2, 离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D,E 两点, $|DE|=6$, 则 $\dfrac{1}{2DF_1}+\dfrac{1}{AD}$ 的最小值是

解 答案: $\frac{3+2\sqrt{2}}{13}$. $\because$ 椭圆的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore a=2c$, $\therefore b^2=a^2-c^2=3c^2$, $\therefore$ 圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$, $3x^2+4y^2=12c^2=0$ 不妨设左焦点为 F_1, 右焦点为 F_2, 如图所示, $\therefore AF_2=a$、$OF_2=c$、$a=2c$, $\therefore\angle AF_2O=\dfrac{\pi}{3}$, $\therefore\triangle AF_1F_2$ 为正三角形, $\therefore$ 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D,E 两点, DE 为线段 AF_2 的垂直平分线, $\therefore$ 直线 DE 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 斜率倒数为 $\sqrt{3}$, 直线 DE 的方程: $x=\sqrt{3}y-c$, 代入椭圆方程 $3x^2+4y^2-12c^2=0$, 整理得: $13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$, $\Delta=(6\sqrt{3}c)^2+4\times13\times9c^2=6^2\times16\times c^2$,

例题 3.141 (2024·高三·河北·开学考试) 已知椭圆 E 的焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 对称轴为坐标轴, 且经过点 $\left(2\sqrt{2},\frac{2}{3}\right)$. (1) 求椭圆 E 的方程; (2) 若过 $P(0,1)$ 的直线交椭圆 E 于 C、D 两点, 求 $\left|\frac{CP}{DP}\right|$ 的取值范围.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; (2) $[\frac{1}{3},3]$. (1) 依题意, 可设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$. 由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 得 $a=\frac{3\sqrt{5}}{5}c$, 又因为 $a^2=b^2+c^2$, 所以 $b=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$, 则 $\frac{x^2}{\frac{9}{5}c^2}+\frac{y^2}{\frac{4}{5}c^2}=1$, 因为椭圆经过点 $\left(2\sqrt{2},\frac{2}{3}\right)$, 代入上述方程解得 $c^2=5$, 则 $a^2=9,b^2=4$, 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 由 (1) 可知: $A(0,2),B(0,-2)$, 当斜率不存在时, 若点 C 与 A 重合, D 与 B 重合, 此时 $\left|\frac{CP}{DP}\right|=\left|\frac{AP}{BP}\right|=\frac{1}{3}$. 若点 D 与 A 重合, B 与 C 重合, 则 $\left|\frac{CP}{DP}\right|=\left|\frac{BP}{AP}\right|=3$. 当直线斜率存在时, 设直线 $CD:y=kx+1,C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $(4+9k^2)x^2+18kx-27=0$, 显然 $\Delta>0$, 则 $x_1+x_2=-\frac{18k}{4+9k^2},x_1x_2=-\frac{27}{4+9k^2}$, 可得 $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=-\frac{12k^2}{4+9k^2}=-\frac{4}{3}\left(1-\frac{4}{4+9k^2}\right)$, 整理可得 $\frac{x_1}{x_2}+2+\frac{x_2}{x_1}=-\frac{12k^2}{4+9k^2}=-\frac{4}{3}\left(1-\frac{4}{4+9k^2}\right)$, 因为 $4+9k^2\geqslant4$, 可得 $-\frac{4}{3}\left(1-\frac{4}{4+9k^2}\right)\in\left(-\frac{4}{3},0\right]$, 令 $\frac{x_1}{x_2}=t(t<0)$, 则 $-\frac{4}{3}\leqslant t+\frac{1}{t}+2\leqslant0$, 解得

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$-3<t<-\frac{1}{3}$, 即 $\frac{x_1}{x_2}\in(-3,-\frac{1}{3})$, 从而 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right|\in(\frac{1}{3},3)$. 结合斜率不存在时的端点值, 得 $\left|\frac{CP}{DP}\right|\in[\frac{1}{3},3]$.

例题 3.142　已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$, F 为 C 的焦点, 过点 F 的直线 l 与 C 交于 H,I 两点, 且在 H,I 两点处的切线交于点 T, 当 l 与 y 轴垂直时, $|HI|=4$. (1) 求 C 的方程; (2) 证明: $|FI|\cdot|FH|=|FT|^2$.

解　答案: (1) $x^2=4y$ (2) 证明见解析. (1) 由题意知 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, 将 $y=\frac{p}{2}$ 代入 $x^2=2py$, 解得 $x=\pm p$, 所以当 l 与 y 轴垂直时, $|HI|=2p=4$, 所以 $p=2$, 故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2) 证明: 法一: 根据题意知直线 l 的斜率存在, $F(0,1)$, 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$、$H(x_1,y_1)$、$I(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+1\end{cases}$, 得 $x^2-4kx-4=0$, 所以 $\Delta=(-4k)^2+16>0$、$x_1+x_2=4k$、$x_1x_2=-4$. 对 $y=\frac{1}{4}x^2$ 求导, 得 $y'=\frac{1}{2}x$, 所以 $k_{TH}\cdot k_{TI}=\frac{1}{2}x_1\cdot\frac{1}{2}x_2=\frac{1}{4}\times(-4)=-1$, 所以 $TI\perp TH$. 由 $\begin{cases}y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)\\y-y_2=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2k\\y=-1\end{cases}$, 所以 $T(2k,-1)$. 当 $k=0$ 时, 根据对称性得 $|FI|=|FH|=2$, $|FT|=2$, 所以 $|FI|\cdot|FH|=|FT|^2$; 当 $k\neq0$ 时, $k_{FT}\cdot k_{HI}=-\frac{1}{k}\cdot k=-1$, 所以 $FT\perp HI$, 所以 $\triangle FTI\sim\triangle FHT$, 所以 $\frac{|FT|}{|FH|}=\frac{|FI|}{|FT|}$, 即 $|FI|\cdot|FH|=|FT|^2$. 综上, $|FI|\cdot|FH|=|FT|^2$.

法二: 根据题意知直线 l 的斜率存在, $F(0,1)$, 设直线 l 的方程为 $y=kx+1$、$H(x_1,y_1)$、$I(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+1\end{cases}$, 得 $x^2-4kx-4=0$, 所以 $\Delta=(-4k)^2+16>0$、$x_1+x_2=4k$、$x_1x_2=-4$. 对 $y=\frac{1}{4}x^2$ 求导, 得 $y'=\frac{1}{2}x$, 由 $\begin{cases}y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)\\y-y_2=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2k\\y=-1\end{cases}$, 所以 $T(2k,-1)$. 因为 $|FH|^2=x_1^2+(y_1-1)^2=4y_1+(y_1-1)^2=(y_1+1)^2$, $|FI|^2=x_2^2+(y_2-1)^2=4y_2+(y_2-1)^2=(y_2+1)^2$, 所以 $|FH|^2\cdot|FI|^2=(y_1+1)^2\cdot(y_2+1)^2=(y_1y_2+y_1+y_2+1)^2=\left(\frac{(x_1x_2)^2}{16}+\frac{x_1^2+x_2^2}{4}+1\right)^2=(4k^2+4)^2$.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

例题 3.143 双曲线: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 有一点 P 在双曲线上, 分别过 P 点作渐近线平行线交 x 轴于 A,B, 且 A 在靠近原点的一侧, 过 A 点作 x 轴垂线交以 OB 为直径的圆于点 C, 求 $|OC|$ 的取值范围.

解 答案: 4. 由对称性不妨取点 P 在第一象限, 设 $P(x_0,y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{16}-\frac{y_0^2}{9}=1$, 由双曲线方程可得其渐近线方程为: $y=\pm\frac{3}{4}x$, 则 $PA:y-y_0=\frac{3}{4}(x-x_0)$、$PB:y-y_0=-\frac{3}{4}(x-x_0)$、$\therefore x_A=x_0-\frac{4}{3}y_0$、$x_B=x_0+\frac{4}{3}y_0$、$\because|OC|^2=|OA|\cdot|OB|$、$\therefore|OC|^2=x_A\cdot x_B=x_0^2-\frac{16}{9}y_0^2=16$、$\therefore|OC|=4$.

例题 3.144 已知椭圆 $\omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(-2,0)$, 且 $a=2b$. (1) 求椭圆 ω 的方程; (2) 设 O 为原点, 过点 $C(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 ω 交于 P, Q 两点, 且直线 l 与 x 轴不重合, 直线 AP, AQ 分别与 y 轴交于 M, N 两点. 求证 $|OM|\cdot|ON|$ 为定值.

解 答案:(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$;(2) 定值为 $\frac{1}{3}$. (1) 因为椭圆 ω 过点 $A(-2,0)$, 所以 $a=2$. 因为 $a=2b$, 所以 $b=1$. 所以椭圆 ω 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (2) 当直线 l 斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x=1$. 不妨设此时 $P\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以直线 AP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$, 即 $M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 直线 AQ 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{6}(x+2)$, 即 $N\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 所以 $|OM|\cdot|ON|=\frac{1}{3}$. 当直线 l 斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$, 由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$, 得 $(4k^2+1)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$. 依题意, $\Delta>0$. 设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{4k^2-4}{4k^2+1}$. 又直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$, 令 $x=0$, 得点 M 的纵坐标为 $y_M=\frac{2y_1}{x_1+2}$, 即 $M\left(0,\frac{2y_1}{x_1+2}\right)$, 同理 $N\left(0,\frac{2y_2}{x_2+2}\right)$. 所以 $|OM|\cdot|ON|=\left|\frac{4y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}\right|=\left|\frac{4k^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1+2)(x_2+2)}\right|=\left|\frac{4k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right|=\left|\frac{4k^2\left(\frac{4k^2-4}{4k^2+1}-\frac{8k^2}{4k^2+1}+1\right)}{\frac{4k^2-4}{4k^2+1}+\frac{16k^2}{4k^2+1}+4}\right|=\left|\frac{4k^2(4k^2-4-8k^2+4k^2+1)}{4k^2-4+16k^2+16k^2+4}\right|=\left|\frac{12k^2}{36k^2}\right|=\frac{1}{3}$. 综上, $|OM|\cdot|ON|$ 为定值, 定值为 $\frac{1}{3}$.

例题 3.145 已知斜率为 2 的直线 l 经过椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点 F_1, 与椭圆相交于 A,B 两点, 求弦 AB 的长.

解 答案: $\frac{5\sqrt{5}}{3}$. 由题意可知: $a=\sqrt{5},b=2,c=\sqrt{a^2-b^2}=1$, 因为直线 l 过椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点 $F_1(1,0)$, 且斜率为 $k=2$, 则直线 l 的方程为 $y=2(x-1)$, 且直线 l 与椭圆必相交, 方法一: 解方程组

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=2(x-1)\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=0\\ y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\ y=\frac{4}{3}\end{cases}$，不妨令 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$，所以 $|AB|=\sqrt{\left(0-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-2-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{125}{9}}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$；方法二：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=2(x-1)\end{cases}$，消去 y 得 $3x^2-5x=0$，则 $x_1+x_2=\frac{5}{3}$，$x_1x_2=0$. 所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+2^2}\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-4\times 0}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$；方法三：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=2(x-1)\end{cases}$，消去 x 得 $3y^2+2y-8=0$，则 $y_1+y_2=-\frac{2}{3}$，$y_1y_2=-\frac{8}{3}$.

知乎@余命数

3.7.7 本节小结

除判别式简化引理外，本节主要把 第3.3节 的韦达与弦长公式组织成可重复的联立步骤，即设线，代入曲线，整理为一元二次，算 Δ，读韦达. 椭圆、双曲线、抛物线共用同一框架，差别只在系数模板.

整理时宜用自然标准化 $b^2x^2+a^2(kx+m)^2=a^2b^2$，避免再乘公分母使 Δ 与韦达失真. 含参判别式可直接写成 $4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$ (定理 3.23)；双曲线还须 $A\neq 0$ (注 3.9). 弦长方面，$|k|\leq 1$ 时优先 x 形，$|k|>1$ 时优先 y 形；焦点弦可先用 $|PF_2|=a-ex_0$. 面积可用底高式、坐标行列式或割补，公式 (3-29) 预先消去 $\sqrt{1+k^2}$. 对称式变形常用 S^2-2P、$S^2-4P=\Delta/A^2$、$(x_1-c)(x_2-c)=P-cS+c^2$，并先写成 S,P 的整式再代入.

直线方程取 $y=kx+m$ 还是 $x=ty+n$，往往直接决定运算量. 第3.8节 讨论这两种形式的选用，以及斜率不存在时的写法；韦达之后的代数处理见 第3.9节.

3.7.8 本节习题

3.35.　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，直线 $\ell:y=x+m$. 试用 定理 3.23 直接写出 Δ，并求使 ℓ 与 C 相切的 m 之值. 再写出相离的 m 范围.

3.36.　双曲线 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ $(a^2=9,b^2=16)$，直线 $\ell:y=kx+m$ 与 C 交于两点. 用 注 3.9 的 $\Delta=4a^2b^2(m^2+b^2-a^2k^2)$，讨论 $k=\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$ 时 $A=b^2-a^2k^2$ 的取值，并解释此时直线与双曲线的交点个数与渐近线平行性.

3.37.　抛物线 $y^2=4x$，直线 $y=2x-1$. 写出联立后的一元二次方程，求 Δ，韦达两式与弦长 $|AB|$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.38. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 过左焦点 $F(-\sqrt{7},0)$, 斜率 k 的弦 $\ell: y=k(x+\sqrt{7})$. 类似 例题 3.125 推证 $(x_A+\sqrt{7})(x_B+\sqrt{7})=-\dfrac{b^4}{b^2+a^2k^2}$, 并解释负号的几何意义, 即焦点内分弦.

3.39. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, $\ell: y=x+1$, 此例已在 第3.7.1小节 中计算过韦达两式. 试用联立面积公式 (3-29) 直接求 $\triangle OAB$ 的面积, 并用底高式独立复核.

3.40. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 过右焦点 $F(\sqrt{5},0)$, 斜率为 k 的弦 $\ell: y=k(x-\sqrt{5})$. 用 定理 3.23 直接由公式给出 Δ 的 k 的表达式, 并求使弦长 $|AB|$ 取最大值的 k (提示: 弦长 $\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{\Delta}}{4+9k^2}$, 化简为 k 的有理式后再求极值).

3.41. 设二次方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 的两根为 x_1,x_2 ($A\neq 0$). 用 $S=-\dfrac{B}{A}, P=\dfrac{C}{A}$ 表达 $x_1^2+x_2^2$、$(x_1-x_2)^2$、$x_1^3+x_2^3$, 并验证 $(x_1-x_2)^2=\dfrac{\Delta}{A^2}$.

3.42. 给出一条 “面积联立式对第三顶点 $P(x_0,y_0)$ 一般化” 的推导: $S_{\triangle PAB}=\dfrac{ab\,|kx_0-y_0+m|\sqrt{b^2+a^2k^2-m^2}}{b^2+a^2k^2}$. 据此公式重新计算 第3.7.4小节 例题中第三顶点改换为左焦点 $F_1(-c,0)$ 时的面积.

3.8 直线方程的形式选择

第3.7节 已介绍设线、联立、读韦达与后处理. 判别式简化引理可直接给出 Δ, 联立面积公式可在乘积中消去 $\sqrt{1+k^2}$. 第一步设线仍有分叉. 同一条非竖直直线既可写为 $y=kx+m$, 也可写为 $x=ty+n$ ($t=1/k$ 为反斜率). 二者只差一个字母, 形式选得不当会显著放大中间系数, 甚至在斜率不存在时直接漏掉一枝.

本节围绕直线形式的选择展开, 先比较斜截式与横截式 (第3.8.1小节), 再处理多动直线时的斜率关系 (第3.8.2小节), 最后讨论以斜截式为主干的含参问题与竖直枝的补验 (第3.8.3小节).

3.8.1 斜截式与横截式的比较

设非竖直直线为 L. 我们把它写成两种等价形式.

- **斜截式** $y=kx+m$, 以 x 为自变量, k 为斜率, m 为 y 截距. 联立椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 后二次项为 $b^2+a^2k^2$, 其化简见 定理 3.23; $|k|$ 偏小时系数较小, $|k|$ 偏大时系数膨胀;
- **横截式**, 又称反斜截式, $x=ty+n$, 以 y 为自变量, t 为反斜率 ($t=1/k$), n 为 x 截距. 联立后二次项为 $a^2+b^2t^2$, $|t|$ 偏小时系数较小, 亦即 $|k|$ 偏大时更省.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两式的覆盖范围不同.$y=kx+m$ 覆盖一切非竖直线,但 $k\to\infty$(竖直线)时失效;$x=ty+n$ 覆盖一切非水平线,但 $t\to\infty$ 即水平线时失效. 因此 $|k|<1$ 时宜用 $y=kx+m$, $|k|>1$ 时宜用 $x=ty+n$, $|k|=1$ 时两路径代价相当.

更关键的是斜率不存在的特例. 若题面允许弦取竖直方向, $y=kx+m$ 会漏掉这一枝, 须以 $x=x_0$ 独立代入补回, 见 第3.8.3小节; 而 $x=ty+n$ 在 $t=0$ 时给出 $x=n$, 竖直枝一并包含. 对过定点、斜率变化的题型, $x=ty+n$ 通常更稳, 代价是横弦 $y=y_0$ 对应 $t\to\infty$ 须另补, 但横弦中点多在 x 轴上, 较少造成遗漏.

还可结合定点位置. 过定点 P 时, 若 $y_P=0$ 则宜选 $x=ty+n$(截距 n 为已知常数), 若 $x_P=0$ 则宜选 $y=kx+m$. 下例把同一道过定点弦题用两式各算一遍, 对照中间系数, 并观察何者可自然容纳竖直弦.

例题 3.146　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ($a^2=16, b^2=4$), 动弦 AB 过定点 $P(2,0)$. 分别以 $y=kx+m$ 与 $x=ty+n$ 联立, 写出韦达两式与弦中点 M 的坐标, 比较两路径的中途系数复杂度, 并指出何者自然容纳弦竖直的特例.

解　因 AB 过 $P(2,0)$, 两种设线都据此消去一个参数(P 落在 y 截距或 x 截距之一).

$0=2k+m\implies m=-2k$, 即 $y=k(x-2)$. 代入 $4x^2+16y^2=64$, 即 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 形:

$$4x^2+16k^2(x-2)^2=64\implies(4+16k^2)x^2-64k^2\,x+(64k^2-64)=0.$$

此处 $A=4+16k^2$、$B=-64k^2$、$C=64k^2-64$. 由 第3.3节 韦达两式:

$$x_A+x_B=\frac{64k^2}{4+16k^2}=\frac{16k^2}{1+4k^2},\qquad x_Ax_B=\frac{64(k^2-1)}{4+16k^2}=\frac{16(k^2-1)}{1+4k^2}.$$

弦中点 M 横坐标 $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$; 因 M 在弦上, $y_M=k(x_M-2)=k\cdot\dfrac{8k^2-2-8k^2}{1+4k^2}=-\dfrac{2k}{1+4k^2}$.

$2=t\cdot0+n\implies n=2$, 即 $x=ty+2$. 代入 $4x^2+16y^2=64$:

$$4(ty+2)^2+16y^2=64\implies(4t^2+16)y^2+16t\,y+(16-64)=0.$$

即 $(4t^2+16)y^2+16ty-48=0$, 自然标准化, 除以 4 得 $(t^2+4)y^2+4ty-12=0$. 第3.3节 韦达(y 为根):

$$y_A+y_B=-\frac{4t}{t^2+4},\qquad y_Ay_B=-\frac{12}{t^2+4}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

弦中点 M 纵坐标 $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=-\dfrac{2t}{t^2+4}$；因 M 在弦上，$x_M=t\,y_M+2=\dfrac{-2t^2}{t^2+4}+2=\dfrac{8}{t^2+4}$.

$y=kx+m$ 与 $x=ty+n$ 对同一直线满足 $k=1/t$（反斜率关系）. 把 $k=1/t$ 代入路径 A 之 x_M,y_M：

$$x_M=\frac{8/t^2}{1+4/t^2}=\frac{8}{t^2+4},\qquad y_M=-\frac{2/t}{1+4/t^2}=-\frac{2t}{t^2+4},$$

与路径 B 完全吻合. 两路径给出同一答案；代数代价的中途系数复杂度对比如下：

- 路径 A 二次方程 $(1+4k^2)x^2-16k^2\,x+16(k^2-1)=0$. 常数项 $16(k^2-1)$ 含 k^2，三处系数均含 k^2，韦达读后须约去与通分各一次；
- 路径 B 二次方程 $(t^2+4)y^2+4ty-12=0$. 常数项 -12 为静态整数，仅二次项与一次项含参，韦达读后一步即出.

路径 B 中途系数较简，因定点 P 的横坐标 2 直接落在 x 截距 n 上，反斜率 t 才是唯一活跃参数. 定点落在所代入的坐标轴上时，横截式通常更省，与 第3.7.3小节 中按斜率大小选用弦长形式的想法一致.

弦竖直时方程为 $x=2$，路径 A ($y=kx+m$) 要求 $k\to\infty$，系数 $1+4k^2\to\infty$，韦达形式上 $x_A+x_B\to 4$，$x_Ax_B\to 4$，弦长 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|$ 可取极限得 $2\sqrt{3}$，但过程中 $k=\infty$ 形式失效，须独立以 $x=2$ 代入：$4\cdot4+16y^2=64\implies y^2=3$，弦长 $2\sqrt{3}$. 路径 B 中 $t=0$ 即给出 $x=0\cdot y+2=2$，即 $x=2$ 同一方程，$y_A+y_B=0$，$y_Ay_B=-12/4=-3$，弦长 $|y_A-y_B|=\sqrt{0+4\cdot3}=2\sqrt{3}$. 路径 B 在 $t=0$ 处自然容纳竖直弦，不另列分类.

3.8.2 多动直线情形下的斜率关系利用

第3.3节 已证明，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的弦 AB（斜率 k）与弦中点 M 满足 $k\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，其中 O 为椭圆中心. 上式描述单条弦与其弦中点的关系. 题目中的弦往往不止一条. 若同一椭圆内的两条弦被垂直、平行或共点条件串起，我们就可以把上述关系连乘，一次写完整族中点的轨迹.

这条关系中 k 为弦斜率，k_{OM} 为弦中点到中心连线的斜率，二者之积 $-\dfrac{b^2}{a^2}<0$，故 k 与 k_{OM} 反号. 当多条弦由垂直、对称或斜率之和/积为定值等条件相连时，我们就把这种反向关系连乘，以得到中点轨迹之间的结构，不必逐弦联立. 我们先把所有斜率条件写成关于单一参数 k 的约束，再代入中点公式或上述关系一次写完.

我们给出常用的一个网络式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.24 (垂直弦中点的斜率积) 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, l_1,l_2 是过同一椭圆内点 P 的两条弦, 且 $l_1\perp l_2$, 即斜率 $k_1k_2=-1$. 以 M_1,M_2 分别记 l_1,l_2 的中点, 则

$$k_{OM_1}\cdot k_{OM_2}=-\frac{b^4}{a^4}. \tag{3-30}$$

由此 OM_1 与弦 l_1 的方向共轭, OM_2 与弦 l_2 的方向共轭. 两条直径 OM_1、OM_2 相互共轭需要 $k_{OM_1}k_{OM_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 由 (3-30) 这要求 $a=b$.

证明 由 第3.3节 弦中点斜率关系, 对 l_1,l_2 分别有

$$k_1\cdot k_{OM_1}=-\frac{b^2}{a^2},\qquad k_2\cdot k_{OM_2}=-\frac{b^2}{a^2}.$$

知乎@余命数

两式相乘, 得

$$(k_1k_2)\cdot(k_{OM_1}k_{OM_2})=\frac{b^4}{a^4}.$$

题设 $l_1\perp l_2\iff k_1k_2=-1$, 这里假设两弦均非竖直与水平, 即斜率均有限非零, 退化情形见本定理后的讨论. 代入上式, 得

$$(-1)\cdot(k_{OM_1}k_{OM_2})=\frac{b^4}{a^4}\implies k_{OM_1}k_{OM_2}=-\frac{b^4}{a^4}.$$

知乎@余命数

此即 (3-30). 由 $-\dfrac{b^4}{a^4}<0$ 知 OM_1,OM_2 的斜率反号, 二者分别与 l_1,l_2 的方向共轭: 由弦中点斜率关系有 $k_{l_i}k_{OM_i}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ $(i=1,2)$. 当 $a=b$ 即椭圆退化为圆时 $-\dfrac{b^4}{a^4}=-1$, 两条半径互相垂直, 与圆的共轭直径互相垂直一致.

讨论退化情形. 若 l_1 竖直, 即 k_1 不存在, 则 $l_2\perp l_1$ 使 l_2 水平 ($k_2=0$). 此时 l_1 为 $x=x_P$, x_P 为 P 之横坐标, 弦 l_1 两端关于 x 轴对称, 中点 $M_1=(x_P,0)$, 故 $k_{OM_1}=0$.l_2 为 $y=y_P$, y_P 为 P 之纵坐标, 两端关于 y 轴对称, 中点 $M_2=(0,y_P)$, 故 k_{OM_2} 不存在 (OM_2 为竖直直径). 形式上 $k_{OM_1}\cdot k_{OM_2}$ 含 $0\cdot\infty$, 解读为 l_1 趋于竖直时 $k_{OM_1}\to0$, 同时 l_2 趋于水平, $k_{OM_2}\to\infty$, 二者乘积的极限仍为 $-b^4/a^4$, 与连续极限意义一致. 此时应退回几何结论, l_1 竖直则中点 M_1 落 x 轴, l_2 水平则中点 M_2 落 y 轴, 不宜强行套用式 (3-30) 的代数形式. □

知乎@余命数

例题 3.147 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\,(a^2=9,b^2=4)$, 定点 $P(1,0)$ 在 C 内. 过 P 作两条互相垂直的弦 l_1,l_2 (l_1 斜率 k_1, l_2 斜率 $k_2=-1/k_1$, 假设 k_1 有限非

零). 设 M_1, M_2 分别为 l_1, l_2 之中点, 验证 $k_{OM_1}k_{OM_2} = -\dfrac{16}{81}$, 并求 M_1 的轨迹方程.

解

对斜率为 k 的过 $P(1,0)$ 的弦 $y = k(x-1)$. 代入椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 36$:

$$4x^2 + 9k^2(x-1)^2 = 36 \implies (4+9k^2)x^2 - 18k^2\,x + 9(k^2-4) = 0.$$

此处 $A = 4+9k^2$、$B = -18k^2$、$C = 9(k^2-4)$. 韦达 (第3.3节):

$$x_{A_1} + x_{A_2} = \frac{18k^2}{4+9k^2}, \qquad x_{A_1}x_{A_2} = \frac{9(k^2-4)}{4+9k^2}.$$

中点 M 横坐标 $x_M = \dfrac{x_{A_1}+x_{A_2}}{2} = \dfrac{9k^2}{4+9k^2}$. 由 M 在弦上 $y_M = k(x_M - 1) = k\cdot\dfrac{9k^2-4-9k^2}{4+9k^2} = -\dfrac{4k}{4+9k^2}$.

$$k_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = \frac{-4k/(4+9k^2)}{9k^2/(4+9k^2)} = -\frac{4}{9k}.$$

套用 定理 3.24, l_1, l_2 垂直 ($k_1k_2 = -1$) 时

$$k_{OM_1}k_{OM_2} = -\frac{b^4}{a^4} = -\frac{16}{81}.$$

在本例直接验算: $k_{OM_1} = -\dfrac{4}{9k_1}$, $k_{OM_2} = -\dfrac{4}{9k_2} = -\dfrac{4}{9\cdot(-1/k_1)} = \dfrac{4k_1}{9}$, 故

$$k_{OM_1}k_{OM_2} = -\frac{4}{9k_1}\cdot\frac{4k_1}{9} = -\frac{16}{81}.$$

上述关系可直接读出, 不必分别联立 l_1, l_2.

由 $x_{M_1} = \dfrac{9k_1^2}{4+9k_1^2}$, $y_{M_1} = -\dfrac{4k_1}{4+9k_1^2}$, 把 k_1 视为参数消去. 注意 $\dfrac{y_{M_1}}{x_{M_1}} = -\dfrac{4}{9k_1}$, 即 $k_1 = -\dfrac{4x_{M_1}}{9y_{M_1}}$. 代入 x_{M_1} 表达式, 得

$$x_{M_1} = \frac{9\cdot\dfrac{16x_{M_1}^2}{81y_{M_1}^2}}{4+9\cdot\dfrac{16x_{M_1}^2}{81y_{M_1}^2}} = \frac{\dfrac{16x_{M_1}^2}{9y_{M_1}^2}}{4+\dfrac{16x_{M_1}^2}{9y_{M_1}^2}} = \frac{16x_{M_1}^2}{36y_{M_1}^2+16x_{M_1}^2}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两边乘 $36y_{M_1}^2+16x_{M_1}^2$ 得

$$36x_{M_1}y_{M_1}^2+16x_{M_1}^3=16x_{M_1}^2.$$

若 $x_{M_1}\neq 0$, 两边除 x_{M_1} 得

$$36y_{M_1}^2+16x_{M_1}^2=16x_{M_1},$$

即 $16x_{M_1}^2-16x_{M_1}+36y_{M_1}^2=0$, 配方

$$16\Big(x_{M_1}-\frac{1}{2}\Big)^2+36y_{M_1}^2=4,$$

亦即 $\dfrac{(x_{M_1}-1/2)^2}{1/4}+\dfrac{y_{M_1}^2}{1/9}=1$, 这是以 $(\frac{1}{2},0)$ 为中心, 长半轴 $1/2$, 短半轴 $1/3$ 的椭圆. 因 $P=(1,0)$ 在椭圆 C 之内, 弦须在 l_1 与 C 相交即 $\Delta\geq 0$ 的范围内取. 当 $k_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 取遍时, M_1 走过上述椭圆除去 $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$ 即 $x=0$ 与 $x=1$ 两端点, 分别对应 $k_1=0$ 与 k_1 不存在的两个退化. 这两点的几何意义, 其中 $k_1=0$ 时 $M_1=O$, 为横弦枝, k_1 不存在时 $M_1=P$, 为竖弦枝, 已在上述 $k_{OM}=-4/(9k)$ 的极限处印证, 不必单独分析(退化情形对照见 定理 3.24 退化情形段).

$P=(1,0)$ 所引垂直弦的中点 M_1 走过一小椭圆, M_2 的轨迹由同一定理刻画, 两轨迹上的对应点满足 $k_{OM_1}k_{OM_2}=-\dfrac{b^4}{a^4}$. 直接代 $k_2=-1/k_1$ 入 x_{M_2},y_{M_2} 公式, 得

$$x_{M_2}=\frac{9/k_1^2}{4+9/k_1^2}=\frac{9}{4k_1^2+9},\qquad y_{M_2}=-\frac{4\cdot(-1/k_1)}{4+9/k_1^2}=\frac{4k_1}{4k_1^2+9}.$$

以 k_2 为参数, 得到形如 $(x_{M_2}=\frac{9k_2^2}{4+9k_2^2},y_{M_2}=-\frac{4k_2}{4+9k_2^2})$ 的参数方程, 即 M_2 走过的是一条同型椭圆.

例题 3.148 (斜率之和定值的统一参数) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ $(a^2=4,b^2=1)$, 过定点 $P(1,0)$ 的两条弦 l_1,l_2 的斜率 k_1,k_2 满足 $k_1+k_2=0$, 即关于 x 轴对称. 用弦中点斜率关系写出 $k_{OM_1}+k_{OM_2}$ 与 $k_{OM_1}k_{OM_2}$ 的关系, 并说明如何把两弦统一到一参 k.

解 由 $k\cdot k_{OM}=-b^2/a^2=-1/4$, 得 $k_{OM}=-1/(4k)$. 对称条件 $k_2=-k_1$ 令 $k_1=k$, $k_2=-k$ $(k\neq 0)$, 则

$$k_{OM_1}=-\frac{1}{4k},\qquad k_{OM_2}=-\frac{1}{4(-k)}=\frac{1}{4k},$$

故 $k_{OM_1}+k_{OM_2}=0, k_{OM_1}k_{OM_2}=-1/(16k^2)$. 两弦关于 x 轴对称时, 其中点亦关于 x 轴对称, 这与 $k_{OM_1}+k_{OM_2}=0$ 一致. 我们把它统一到一参, 只对 $l_1:y=k(x-1)$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

联立求 M_1,再由对称直接得 $M_2=(x_{M_1},-y_{M_1})$,不必对 l_2 再联立一次. 当 k 不存在即竖弦 $x=1$ 时,对称条件要求另一弦亦为竖弦,与题面通常要求的两条不同弦冲突,故本条件族默认排除竖直枝. 若题面允许同一竖弦计两次,则中点 $M=(1,0)$ 重合,网络式退化为单点.

3.8.3 斜截式的运用与竖直枝

相对 第3.8.1小节 中的横截式,我们仍以 $y=kx+m$ 为主干,因为它与 定理 3.23 的 $\Delta=4a^2b^2(b^2+a^2k^2-m^2)$ 直接衔接,也与 第3.3节 的弦长 $\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$ 及面积式 (3-29) 同源,后处理不必改形式.

它的覆盖盲点正是斜率不存在的竖直弦. 这也是横截式存在的理由. 若形式上令 $k=\infty$,原公式失效,须另以 $x=x_0$ 代入并独立完成弦长、面积等后处理. 常见失误是只做完有限斜率情形就停笔,把斜率存在当成题面的默认前提;多数题目里竖直枝同样需要检验.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

3.8.3.0.1 先一般枝后竖直枝的书写模板

1. **一般枝**. 设 $y=k(x-x_0)$(或 $y=kx+m$ 过定点),联立,读 Δ 与韦达,完成目标量关于 k 或 $u=k^2$ 的表达式与极值分析;
2. **竖直枝**. 独立设 $x=x_0$,代入曲线,求交点弦长 / 面积 / 中点,与一般枝的 $k\to\infty$ 极限对照;
3. **闭环**. 确认竖直枝是否在曲线上取得,是否改写极值结论;不得把 $u\to\infty$ 时仅趋近的情形误读为极值不存在.

下例是一道最短弦题,漏掉竖直枝会得到错误答案,必须独立补验.

知乎@余命数

例题 3.149 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a^2=16,b^2=9)$,过 C 内部定点 $P(2,0)$ 的所有弦中,求弦长 $|AB|$ 的最小值与最大值.

解

弦过 $P(2,0)$,故 $0=2k+m\implies m=-2k$,即弦 $y=k(x-2)$. 代入椭圆 $9x^2+16y^2=144$:

$$9x^2+16k^2(x-2)^2=144\implies(9+16k^2)x^2-64k^2\,x+(64k^2-144)=0.$$

知乎@余命数

此处 $A=9+16k^2$、$B=-64k^2$、$C=64k^2-144$. 判别式

知乎@余命数

$$\begin{aligned}\Delta=B^2-4AC&=(-64k^2)^2-4(9+16k^2)(64k^2-144)\\&=4096k^4-4\big(576k^2-1296+1024k^4-2304k^2\big)\\&=4096k^4-4096k^4+6912k^2+5184=6912k^2+5184\end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= 1728(4k^2+3).$$

弦长 第3.3节 形式一:

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|} = \sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{1728(4k^2+3)}}{9+16k^2}.$$

写平方(便于稍后求导):

$$|AB|^2 = (1+k^2)\cdot\frac{1728(4k^2+3)}{(9+16k^2)^2}. \tag{3-31}$$

先看特例.$k=0$ 即弦水平时,弦就是 x 轴上从 $(-4,0)$ 到 $(4,0)$ 的一段,

$$|AB|^2 = 1\cdot\frac{1728\cdot 3}{81} = \frac{5184}{81} = 64, \qquad |AB| = 8,$$

与直接令 $y=0$ 代入得 $x^2/16=1 \implies x=\pm 4$,弦长 8 的结果一致.

令 $u=k^2\geq 0$, $f(u)=(1+u)(3+4u)/(9+16u)^2$, 常数因子 1728 不影响极值,略去. 对 f 求导,得

$$f'(u) = \frac{(7+8u)(9+16u)^2-(3+7u+4u^2)\cdot 2(9+16u)\cdot 16}{(9+16u)^4}$$
$$= \frac{(7+8u)(9+16u)-32(3+7u+4u^2)}{(9+16u)^3}.$$

分子展开: $(7+8u)(9+16u) = 63+112u+72u+128u^2 = 128u^2+184u+63$; $32(3+7u+4u^2) = 96+224u+128u^2$. 二者作差:$128u^2+184u+63-128u^2-224u-96 = -40u-33$. 故

$$f'(u) = \frac{-40u-33}{(9+16u)^3}.$$

对一切 $u\geq 0$,分子 $-40u-33<0$,分母 $(9+16u)^3>0$,故 $f'(u)<0$. 即 $f(u)$ 与相应的 $|AB|^2$ 在 $u\geq 0$ 上严格递减,因此 $|AB|^2$ 之最大值在 $u=0$ 即 $k=0$ 的水平弦处取得, $|AB|^2_{\max} = 1728\cdot 3/81 = 64$, $|AB|_{\max}=8$;而 $|AB|^2$ 之最小值在 $u\to+\infty$ 处取得(代数上为极限值, $|AB|^2\to 1728\cdot 4u^2/(16u)^2 = 1728\cdot 4/256 = 27$, $|AB|\to 3\sqrt{3}$).

$u\to+\infty$ 即 k 不存在,弦趋于竖直 $x=2$. 直接代入 $x=2$ 到椭圆 $9x^2+16y^2=144$:

$$9\cdot 4+16y^2 = 144 \implies 16y^2 = 108 \implies y^2 = \frac{27}{4}, \qquad y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

弦两端点为 $(2,\frac{3\sqrt{3}}{2})$ 与 $(2,-\frac{3\sqrt{3}}{2})$,弦长

$$|AB| = 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

与 (3-31) 的极值极限 $u \to \infty$ 完全一致. 故实际最小值被竖直弦 $|AB| = 3\sqrt{3}$ 取得, 有限斜率弦达不到该值.

若只用 $y = kx + m$ 推得 $|AB|^2$ 单调递减, 便会误以为最大值在 $u = 0$ 而最小值不存在(只趋近), 这是典型的漏枝结论. 真实最小值在 $u \to \infty$ 端由竖直枝单独实取, 必须由 $x = 2$ 独立联立验证才能闭环.

例题 3.150 椭圆 $C : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ ($a^2 = 25, b^2 = 16$) 与直线 ℓ 交于 A, B, ℓ 过 C 之焦点 $F(3, 0)$. 求 $\triangle OAB$ 的面积, 并涵盖 ℓ 竖直 ($\ell : x = 3$) 的情形.

解

ℓ 过 $(3, 0) \implies m = -3k$, 即 $y = k(x - 3)$. 代入椭圆 $16x^2 + 25y^2 = 400$:

$$16x^2 + 25k^2(x - 3)^2 = 400 \implies (16 + 25k^2)x^2 - 150k^2\,x + (225k^2 - 400) = 0.$$

由 定理 3.23 一步读 $\Delta = 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2 - m^2)$, 其中 $m = -3k$, 故 $m^2 = 9k^2$:

$$\Delta = 4 \cdot 25 \cdot 16 \cdot (16 + 25k^2 - 9k^2) = 1600(16 + 16k^2) = 25600(1 + k^2).$$

联立面积公式 (3-29)(顶点为 O):

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{ab\,|m|\sqrt{b^2 + a^2k^2 - m^2}}{b^2 + a^2k^2} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3|k| \cdot \sqrt{16(1 + k^2)}}{16 + 25k^2} \\ &= \frac{60|k| \cdot 4\sqrt{1 + k^2}}{16 + 25k^2} \\ &= \frac{240|k|\sqrt{1 + k^2}}{16 + 25k^2}. \end{aligned}$$

A, B 由 $x = 3$ 代入 $16x^2 + 25y^2 = 400$ 给出: $16 \cdot 9 + 25y^2 = 400 \implies 25y^2 = 256 \implies y^2 = \frac{256}{25}$, $y = \pm\frac{16}{5}$. 弦长 $|AB| = 2 \cdot \frac{16}{5} = \frac{32}{5}$; 点 O 到 $\ell : x - 3 = 0$ 之距 $d = 3$. 故

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{5} \cdot 3 = \frac{48}{5}.$$

把 $k \to \infty$ 代入非竖直式, 极限为 $\dfrac{240|k|\sqrt{1 + k^2}}{16 + 25k^2} \sim \dfrac{240|k| \cdot |k|}{25k^2} = \dfrac{240}{25} = \dfrac{48}{5}$. 这与竖直情形直接算出的 $\frac{48}{5}$ 一致, 竖直枝是极限之内被代数形式遮蔽的正常值. 我们须独立联立 $x = 3$ 才能确认该值被实际取到. 在本例中, k 任意有限即对应一族过 F 的斜弦, k 不存在对应 $x = 3$ 的竖弦且确实落于 C 上; 在过椭圆内部点的所有弦问题中, 竖直枝是否在 C 内还须再独立检验 ℓ 与 C 是否有交点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.8.4 本节小结

非竖直直线有两种等价写法 $y=kx+m$ 与 $x=ty+n$ ($t=1/k$). 选用时, 我们先看斜率大小.$|k|<1$ 优先斜截式, $|k|>1$ 优先横截式, 使二次项系数 $b^2+a^2k^2$ 或 $a^2+b^2t^2$ 较小 (第3.8.1小节). 二者盲点互补. 斜截式须另补竖直弦, 横截式须另补水平弦; 过定点且斜率变化时, 定点落在所代入坐标轴上的那一形式通常一并包含竖直或水平枝.

单弦与其弦中点的关系 $k\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$ (第3.3节) 在多弦问题中可以连乘.定理 3.24 给出, 椭圆内过同点的两垂直弦, 其中点 M_1,M_2 所张直径斜率之积为 $-b^4/a^4$(退化情形须另作几何讨论). 遇到垂直、对称或斜率之和/积为定值等条件, 我们宜先把它们统一到单一参数, 再联立.

以 $y=kx+m$ 为主干配合 定理 3.23 与 式 (3-29), 适合绝大多数有限斜率问题, 但须独立检验竖直枝; 讨论顺序宜先一般后竖直 (第3.8.3小节). 例如最短弦问题 (例题 3.149) 中, 若只看 $u=k^2$ 上 $|AB|^2$ 的单调性, 会误以为最小值不存在, 而竖直枝恰恰取到极小.

联立读出韦达之后, 我们还要处理和与积. 第3.9节 讨论对称式代入、和积关系、点乘双根、整体代换, 以及何时改为直接解点.

3.8.5 本节习题

3.43.　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 过定点 $P(4,0)$ 的弦 AB. 分别以 $y=kx+m$ 与 $x=ty+n$ 两种形式联立, 求韦达两式与弦中点 M 的轨迹方程; 比较两路径的中途系数复杂度, 并据 P 在椭圆内 ($4^2/25=16/25<1$) 论证 $\Delta\geq 0$ 对一切 k 成立.

3.44.　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 定点 $P\left(\frac{3}{5},0\right)$ 在 C 内. 过 P 作两条互相垂直的弦 l_1,l_2, M_1,M_2 分别为其中点. 据 定理 3.24 直接写出 $k_{OM_1}k_{OM_2}$ 之值, 再辅以独立联立验证(不必联立两次, 一次联立得 $k_{OM}=-\frac{4}{9k}$, 由 $k_1k_2=-1$ 即推得结果).

3.45.　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 过 C 之右焦点 $F(\sqrt{7},0)$ 的弦 AB. 用 定理 3.23 一步写出 $\Delta(k)$, 并推导 $|AB|^2$ 关于 $u=k^2$ 的表达式; 判定其最大值与最小值分别由何弦取得, 并独立验证竖直弦 $x=\sqrt{7}$ 是否对应 $|AB|$ 的最小或最大值, 即 例题 3.149 的过焦点版本.

3.46.　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ($a^2=9$、$b^2=4$、$c=\sqrt{5}$、$e=\sqrt{5}/3$), 过 C 之左焦点 $F_1(-\sqrt{5},0)$ 的弦 AB 设为 $y=k(x+\sqrt{5})$, k 不存在时对应 $x=-\sqrt{5}$. 用 定理 3.23 一步写 $\Delta(k)$, 推 $|AB|^2$ 关于 $u=k^2$ 的表达式. 据 $k=\tan\theta$ 把 $|AB|$ 化为 θ 的有理函数, 验证竖直枝 $\theta=\pi/2$ 即 k 不存在时给出 $|AB|=\dfrac{8}{3}$(此即椭圆通径 $2b^2/a$, 一般式证

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

明见第4章 焦弦调和平均定理)；有限枝 $\theta=0$ 即 $k=0$ 的横弦给出 $|AB|=2a=6$，即长轴长.

3.47. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，动弦 AB 过 $P(1,1)$，P 在 C 内即 $1/9+1/4=13/36<1$. 用 $x=ty+n$ 形式，由 P 在所设直线上的截距位置得 $1=t\cdot 1+n$，即 $n=1-t$，推 $|AB|^2$ 关于 t 的表达式；验证 $t=0$ 的竖直弦 $x=1$ 与某有限 t 对应的水平弦之弦长. 据此说明横截式如何消去 k 不存在的补枝，而仍须单独补 $y=y_P=1$ 即 $t=\infty$ 退化枝的可能性.

3.48. 抛物线 $C:y^2=8x$ 开口向右，$2p=8$ 即 $p=4$，焦点为 $F(2,0)$；过 F 的弦 AB 斜率为 k，k 不存在时即 $x=2$. 用 $y=k(x-2)$ 联立 $y^2=8x$，推 $|AB|$ 关于 k 的表达式，验证其最小值在 k 不存在时取得，此时为竖直弦 $x=2$，长 $|AB|=8$，与 $x=2$ 直接代入 $y^2=16\implies y=\pm 4$ 给出弦长 8 一致. 据此比较抛物线与椭圆的焦弦极值方向，两者都在过焦且垂直于长轴的弦即通径处取得最短，抛物线为 $|AB|_{\min}=2p=8$，椭圆为 $|AB|_{\min}=2b^2/a$，类比见 例题 3.149；但抛物线的过焦弦长度无上界，$k\to 0$ 时弦趋近于横轴，长 $\to\infty$，而椭圆的过焦弦限于 $2a$(长轴长).

3.9 联立后的代数处理技巧

第3.3节 已给出韦达两式，第3.7节 介绍设线、联立与读韦达的做法，第3.8节 讨论直线形式的选取. 联立之后，计算繁简通常取决于对和与积的后续处理. 本节依次讨论下面几类手法. 一是把目标写成对称式直接代入；二是从几何条件独立得到和积关系；三是用点乘双根处理非对称式；四是在点位于曲线上时作整体代换；五是何时改为直接解出交点. 焦弦的调和平均等极坐标结果见 第4章.

3.9.1 韦达直接代入

目标量若是 x_1+x_2,x_1x_2 的对称多项式，我们直接把韦达结果代入即可，不必求根. 做法是先把目标写成 $s=x_1+x_2,p=x_1x_2$ 的整式，再代入.

这里列出常用公式(第3.7节 已列出，此处复用).

$$x_1^2+x_2^2=s^2-2p,\qquad (x_1-x_2)^2=s^2-4p=\frac{\Delta}{A^2},\qquad x_1^3+x_2^3=s^3-3sp.$$

若目标含 y_i，且直线为 $y=kx+m$，则

$$y_1+y_2=ks+2m,\qquad y_1y_2=k^2p+kms+m^2,$$

从而一切关于 y 的对称式也可转成 s,p 的式子，仍不解根.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.151　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 直线 $\ell:y=x+1$ 与 C 交于 A,B. 求 $x_A^2+x_B^2$ 与 $x_A^3+x_B^3$.

解 由 第3.7节 基础联立例, 得 $41x^2+50x-375=0$, 故

$$s:=x_A+x_B=-\frac{50}{41},\qquad p:=x_Ax_B=-\frac{375}{41}.$$

直接代入, 得

$$x_A^2+x_B^2=s^2-2p=\frac{2500}{1681}+\frac{750}{41}=\frac{2500+750\cdot 41}{1681}=\frac{2500+30750}{1681}=\frac{33250}{1681},$$

$$x_A^3+x_B^3=s^3-3sp=\Big(-\frac{50}{41}\Big)^3-3\Big(-\frac{50}{41}\Big)\Big(-\frac{375}{41}\Big)=-\frac{125000}{68921}-\frac{56250}{1681}.$$

通分 $68921=41^3$:

$$-\frac{125000+56250\cdot 41}{68921}=-\frac{125000+2306250}{68921}=-\frac{2431250}{68921}.$$

全程不解根.

例题 3.152　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $\ell:y=\dfrac{1}{2}x+1$ 与 C 交于 A,B. 求 y_A+y_B 与 y_Ay_B.

解 代入 $9x^2+16y^2=144$, 得

$$\begin{aligned}9x^2+16\Big(\frac{x}{2}+1\Big)^2&=144\\ \Longrightarrow\ 9x^2+16\Big(\frac{x^2}{4}+x+1\Big)&=144\\ \Longrightarrow\ 13x^2+16x-128&=0.\end{aligned}$$

故 $s=-\dfrac{16}{13},p=-\dfrac{128}{13}$. 由 $y=kx+m$ 且 $k=\dfrac{1}{2},m=1$ 可得

$$y_A+y_B=ks+2m=\frac{1}{2}\Big(-\frac{16}{13}\Big)+2=-\frac{8}{13}+2=\frac{18}{13},$$

$$\begin{aligned}y_Ay_B&=k^2p+kms+m^2\\&=\frac{1}{4}\Big(-\frac{128}{13}\Big)+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\Big(-\frac{16}{13}\Big)+1\\&=-\frac{32}{13}-\frac{8}{13}+1\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= -\frac{40}{13} + 1$$
$$= -\frac{27}{13}.$$

知乎@余命数

也可对 y 消 x 直接读韦达, 结果一致; 当目标本是 y 对称量且 $|k|$ 偏大时, 改用 $x = ty + n$ 更省, 见 第3.8节.

3.9.2 和积关系的独立挖掘

韦达给出的 s, p 来自联立; 题面几何条件往往还能独立给出另一组关于 s, p 的等式. 我们先把条件译成和积约束, 再与韦达联立, 这常比先求 k, m 再回代更短. 我们称这种方法为**和积关系的独立挖掘**.

3.9.2.0.1 标准程序

1. **选定坐标根**. 按设线形式决定以 x 为根还是以 y 为根, 记 $s = x_1 + x_2, p = x_1 x_2$ (或 y 版).
2. **条件 $\to$ 和积**. 把中点, 定比, 斜率, 垂直, 定长等条件写成 s, p 的等式, 暂不引入 k, m.
3. **韦达 $\to$ 参数**. 写出联立后的 $s = -\dfrac{B}{A}, p = \dfrac{C}{A}$ (系数含 k, m).
4. **联立求解**. 用步骤 2 的约束消去未知参数, 或直接求目标对称量.
5. **回写几何量**. 需要时再由 s, p 与直线方程还原斜率, 截距, 弦方程.

两条路径的差别在次序. 先参数后条件, 即设 $y = kx + m$ (或过定点消一参), 展开, 再令中点条件; 先条件后和积, 即由中点坐标直接给出 $s = 2x_M$, 再由弦过中点得斜率关系. 后者通常少一次含参展开.

例题 3.153 椭圆 $C : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ 上弦 AB 的中点为 $M(1, 1)$. 用和积独立挖掘求弦 AB 的斜率 k 与方程, 并与先设线再反解 k 的路径对照.

解

记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 中点条件直接给出

$$s_x := x_1 + x_2 = 2, \qquad s_y := y_1 + y_2 = 2.$$

设弦斜率为 k, 则 $y_i - 1 = k(x_i - 1)$, 两端对 $i = 1, 2$ 求和:

$$s_y - 2 = k(s_x - 2) \implies 0 = k \cdot 0,$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此式对任意 k 恒成立，故我们改用 第3.3节 的弦中点斜率关系 ($a^2=9, b^2=5$)：

$$k=-\frac{b^2x_M}{a^2y_M}=-\frac{5\cdot 1}{9\cdot 1}=-\frac{5}{9}.$$

弦过 $M(1,1)$：$y-1=-\dfrac{5}{9}(x-1)$，即 $5x+9y-14=0$. 这里由条件到斜率一步完成，未展开联立二次方程.

设 $y=kx+m$ 过 M：$1=k+m\implies m=1-k$. 代入椭圆 $5x^2+9y^2=45$：

$$5x^2+9(kx+1-k)^2=45\implies (5+9k^2)x^2+18k(1-k)x+9(1-k)^2-45=0.$$

中点横坐标 $x_M=\dfrac{s}{2}=-\dfrac{B}{2A}=1$，即 $-B=2A$：

$$\begin{aligned}-18k(1-k)&=2(5+9k^2)\\ \implies -9k+9k^2&=5+9k^2\\ \implies -9k&=5\\ \implies k&=-\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

结果相同，但含参展开明显更长. 这里直接调用弦中点斜率关系（它本身是和积约束的几何封装），就是和积关系的捷径.

例题 3.154　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，斜率 $k=1$ 的弦 AB 满足 $|AB|=\dfrac{4\sqrt{6}}{7}$. 用和积独立挖掘求截距 m 与弦方程，并验证 $s^2-4p=\Delta/A^2$.

解　设 $\ell: y=x+m$，即 $k=1$. 代入 $3x^2+4y^2=12$：

$$3x^2+4(x+m)^2=12\implies 7x^2+8m\,x+(4m^2-12)=0.$$

故 $A=7$、$B=8m$、$C=4m^2-12$，

$$s=-\frac{8m}{7},\qquad p=\frac{4m^2-12}{7}.$$

判别式

$$\begin{aligned}\Delta=B^2-4AC&=(8m)^2-4\cdot 7\cdot(4m^2-12)\\ &=64m^2-112m^2+336\\ &=-48m^2+336\\ &=48(7-m^2).\end{aligned}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

弦长公式(第3.3节):

$$|AB| = \sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{7}.$$

题设 $|AB| = \dfrac{4\sqrt{6}}{7}$, 故

$$\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{7} = \frac{4\sqrt{6}}{7} \implies \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{3} \implies \Delta = 48.$$

于是 $48(7-m^2) = 48 \implies m^2 = 6 \implies m = \pm\sqrt{6}$. 弦方程为 $y = x \pm \sqrt{6}$.

取 $m = \sqrt{6}$: $s = -\dfrac{8\sqrt{6}}{7}$, $p = \dfrac{4\cdot 6 - 12}{7} = \dfrac{12}{7}$,

$$s^2 - 4p = \frac{384}{49} - \frac{48}{7} = \frac{384-336}{49} = \frac{48}{49} = \frac{\Delta}{A^2}.$$

与 $\Delta = 48$, $A = 7$ 一致. 和积原料 $s^2 - 4p$ 与弦长条件通过 Δ 一一对应.

步骤可归纳为, 先选定 x 为根, 写出含 m 的 s, p 与 $\Delta(m)$; 再由弦长条件得到关于 Δ(因而关于 s^2-4p)的等式; 然后解出 m, 回写弦方程. 全程目标是先求出 m. 若先求根再算距离, 代数代价会更大.

例题 3.155 椭圆 $C: \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$,过定点 $P(2,0)$ 的弦 AB 满足 $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{8}{5}$, 即中点横坐标为 $\dfrac{8}{5}$. 用和积挖掘求斜率 k, 并写出弦方程.

解 设 $\ell: y = k(x-2)$(过 P, $m = -2k$). 代入 $9x^2 + 16y^2 = 144$:

$$9x^2 + 16k^2(x-2)^2 = 144 \implies (9+16k^2)x^2 - 64k^2\,x + (64k^2 - 144) = 0.$$

故

$$s = x_A + x_B = \frac{64k^2}{9+16k^2}.$$

中点横坐标条件 $s/2 = 8/5 \implies s = 16/5$:

$$\begin{aligned}
\frac{64k^2}{9+16k^2} &= \frac{16}{5} \\
&\implies 320k^2 = 16(9+16k^2) \\
&\implies 20k^2 = 9 + 16k^2 \\
&\implies 4k^2 = 9 \\
&\implies k = \pm\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

弦方程：$y=\dfrac{3}{2}(x-2)$ 或 $y=-\dfrac{3}{2}(x-2)$，即 $3x-2y-6=0$ 与 $3x+2y-6=0$.

条件直接约束 s，而韦达把 s 写成 k 的有理式；二者联立一次解出 k. 若改用弦中点斜率关系，中点 $M(\dfrac{8}{5},y_M)$ 在弦上，于是 $y_M=k(\dfrac{8}{5}-2)=k(-\dfrac{2}{5})=-\dfrac{2k}{5}$. 再由

$$k=-\frac{b^2x_M}{a^2y_M}=-\frac{9\cdot(8/5)}{16\cdot(-2k/5)}=\frac{9\cdot 8/5}{32k/5}=\frac{72}{32k}=\frac{9}{4k},$$

得 $k^2=\dfrac{9}{4}$，与上一致. 两种挖掘路径，一是韦达 $s(k)$ 联立给定的 s，二是弦中点斜率关系联立中点在弦上；都是把几何条件先变成和积，或等价的斜率与中点约束，再解参数.

3.9.3 点乘双根法

对称式可用 s,p 直接代入；非对称式如 $(x_1-a)(x_2-a)$，$\dfrac{y_1}{x_1-c}+\dfrac{y_2}{x_2-c}$ 需要把平移后的积一次写出. 点乘双根公式是为此设计.

定理 3.25 (点乘双根公式) 设 $f(x)=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$ 有两根 x_1,x_2. 对任意常数 a，

$$(x_1-a)(x_2-a)=\frac{f(a)}{A}.$$

证明 由韦达定理，$x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}$，$x_1x_2=\dfrac{C}{A}$. 故

$$\begin{aligned}(x_1-a)(x_2-a)&=x_1x_2-a(x_1+x_2)+a^2\\&=\frac{C}{A}+a\frac{B}{A}+a^2\\&=\frac{Aa^2+Ba+C}{A}\\&=\frac{f(a)}{A}.\end{aligned}$$

□

注 3.10
若直线 $\ell:y=kx+m$ 与曲线联立得关于 x 的 $f(x)=0$，且 ℓ 过定点 $A(x_0,y_0)$，则

$$|AP_1|\cdot|AP_2|=(1+k^2)\Big|(x_1-x_0)(x_2-x_0)\Big|=(1+k^2)\Big|\frac{f(x_0)}{A}\Big|.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

对椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 进一步有

$$f(x_0)=a^2b^2\Big(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\Big)\quad\text{(在自然标准化系数下需按实际 } A,B,C \text{ 核对)},$$

从而

$$|AP_1|\cdot|AP_2|=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2+a^2k^2}\Big(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\Big)$$

当 A 在椭圆外时, 括号为正.$a=b=R$ 时退化为圆幂 $x_0^2+y_0^2-R^2$.

例题 3.156 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 定点 $A(3,0)$ 在 C 外. 过 A 斜率为 k 的直线 $\ell:y=k(x-3)$ 与 C 交于 P_1,P_2(设 $\Delta>0$). 求 $|AP_1|\cdot|AP_2|$ 关于 k 的表达式, 并验证 $k=0$ 时结果.

知乎@余命数

解 $m=-3k$. 联立 $3x^2+4\big(k(x-3)\big)^2=12$:

$$(3+4k^2)x^2-24k^2x+(36k^2-12)=0.$$

记 $f(x)=(3+4k^2)x^2-24k^2x+(36k^2-12)$, $A=3+4k^2$. 由点乘双根,

$$(x_1-3)(x_2-3)=\frac{f(3)}{A}=\frac{9(3+4k^2)-72k^2+(36k^2-12)}{3+4k^2}=\frac{15}{3+4k^2}.$$

故

$$|AP_1|\cdot|AP_2|=(1+k^2)\cdot\frac{15}{3+4k^2}=\frac{15(1+k^2)}{3+4k^2}.$$

$k=0$ 时 ℓ 为 x 轴, 交点 $(\pm2,0)$, 乘积 $|3-2|\cdot|3+2|=5$, 与 $\dfrac{15}{3}=5$ 一致.

例题 3.157 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$、$F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$. 直线 $\ell:y=k(x+1)$ 过 F_1, 与 C 交于 P_1,P_2 ($k\neq\pm\dfrac{3}{4}$). 求 $k_{F_2P_1}+k_{F_2P_2}$, 即 $\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}$.

解 联立 $3x^2+4\big(k(x+1)\big)^2=12$:

$$(3+4k^2)x^2+8k^2x+(4k^2-12)=0.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

记 $A=3+4k^2$、$B=8k^2$、$C=4k^2-12$、$f(x)=Ax^2+Bx+C$. 韦达: $s=-B/A$, $p=C/A$. 由点乘双根,

$$(x_1-1)(x_2-1)=\frac{f(1)}{A}=\frac{A+B+C}{A}=\frac{-9+16k^2}{A}.$$

又 $y_i=k(x_i+1)$, 故

$$\frac{y_i}{x_i-1}=k\cdot\frac{x_i+1}{x_i-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}\sum\frac{x_i+1}{x_i-1}&=\frac{(x_1+1)(x_2-1)+(x_2+1)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}\\&=\frac{2p-2}{(x_1-1)(x_2-1)}\\&=\frac{2(p-1)A}{f(1)}.\end{aligned}$$

而 $p-1=\dfrac{C-A}{A}=\dfrac{4k^2-12-(3+4k^2)}{A}=\dfrac{-15}{A}$, $f(1)=-9+16k^2$, 故

$$\sum\frac{x_i+1}{x_i-1}=\frac{2(-15)}{-9+16k^2}=\frac{-30}{16k^2-9}.$$

最终

$$k_{F_2P_1}+k_{F_2P_2}=k\cdot\frac{-30}{16k^2-9}=\frac{-30k}{16k^2-9}.$$

当 $k=1$ 时为 $-\dfrac{30}{7}$. 各 $k_{F_2P_i}$ 本身非对称, 其和却由点乘双根一次写出.

3.9.4 曲线方程的整体代换

点在曲线上时, $b^2x_i^2+a^2y_i^2=a^2b^2$ 可整体替换目标式中的二次组合, 无需先求 s,p 再展开.

例题 3.158　椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上弦 AB 的端点为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. 证明

$$b^2(x_1^2+x_2^2)+a^2(y_1^2+y_2^2)=2a^2b^2.$$

解　因 $A,B\in C$, 有 $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$ 与 $b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2$. 两式相加即得. 这比先求 x_1+x_2,y_1+y_2 再展开更短, 因为曲线方程本身就是整体约束, 无需回到韦达.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.159 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 外一点 $A(3,0)$, 过 A 的动直线与 C 交于 P_1,P_2. 证明

$$|AP_1|\cdot|AP_2|=\frac{15(1+k^2)}{3+4k^2},$$

其中 k 为动直线斜率(设斜率存在). 并说明 $a=b$ 时退化为圆幂定理.

解 由点乘双根公式与曲线方程整体代换可知, 对椭圆外一点 $A(x_0,y_0)$ 与过 A 斜率为 k 的弦, 有

$$|AP_1|\cdot|AP_2|=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2+a^2k^2}\Big(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\Big).$$

此处 $a^2=4$、$b^2=3$、$x_0=3$、$y_0=0$: $\dfrac{x_0^2}{a^2}-1=\dfrac{9}{4}-1=\dfrac{5}{4}$, 故

$$|AP_1|\cdot|AP_2|=\frac{4\cdot3(1+k^2)}{3+4k^2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15(1+k^2)}{3+4k^2}.$$

当 $a=b=R$ 时右端化为 $x_0^2+y_0^2-R^2$, 即圆幂, 与斜率无关. 这也与 例题 3.156 的直接计算互相印证. 整体代换给出一般公式, 点乘双根给出具体验算入口.

3.9.5 设线解点策略

韦达适合处理对称量. 若必须求具体交点坐标, 例如代入另一曲线、写两点式、计算非对称函数, 我们应直接解二次方程, 不必绕道韦达.

例题 3.160 (暴力解点) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 与直线 $\ell:x+2y-3=0$ 交于 A,B. 求 A,B 的坐标, 并写出弦 AB 的中点.

解 由 ℓ: $x=3-2y$. 代入椭圆: $\dfrac{(3-2y)^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 乘 36:

$$\begin{aligned}4(3-2y)^2+9y^2&=36\\ \Longrightarrow\ 4(9-12y+4y^2)+9y^2&=36\\ \Longrightarrow\ 36-48y+16y^2+9y^2&=36.\end{aligned}$$

$$25y^2-48y=0\ \Longrightarrow\ y(25y-48)=0.$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

故 $y=0$ 或 $y=\dfrac{48}{25}$. 对应 $x=3$ 或 $x=3-\dfrac{96}{25}=-\dfrac{21}{25}$. 即 $A=(3,0), B=(-\dfrac{21}{25},\dfrac{48}{25})$ (或对调). 中点

$$M=\Big(\frac{3-\frac{21}{25}}{2},\frac{0+\frac{48}{25}}{2}\Big)=\Big(\frac{54}{50},\frac{24}{25}\Big)=\Big(\frac{27}{25},\frac{24}{25}\Big).$$

题目要求坐标, 解根最直接; 若目标仅是中点, 可读 y 和, 得 $y_A+y_B=\dfrac{48}{25}$, 再由 $x=3-2y$ 得 $x_A+x_B=6-2\cdot\dfrac{48}{25}=\dfrac{54}{25}$, 中点即半和.

例题 3.161 (韦达对照) 仍取椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 与直线 $\ell:x+2y-3=0$. 仅求弦 AB 的中点 M, 用韦达直接读出, 并与 例题 3.160 对照.

解 由 ℓ:$x=3-2y$. 同上得 $25y^2-48y=0$, 即 $25y^2-48y+0=0$. 韦达(以 y 为根):

$$y_A+y_B=\frac{48}{25},\qquad y_Ay_B=0.$$

中点纵坐标 $y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{24}{25}$. 又 $x_A+x_B=2\cdot3-2(y_A+y_B)=6-\dfrac{96}{25}=\dfrac{54}{25}$, 故

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{27}{25}.$$

即 $M=(\dfrac{27}{25},\dfrac{24}{25})$, 与暴力解点结果一致, 而且**全程未写出单个交点**. 对照两例可得.

- 目标是坐标 / 两点式 / 非对称函数 $\to$ 暴力解点 (例题 3.160);
- 目标是中点 / 弦长 / 对称幂和 $\to$ 只读韦达 (例题 3.161).

例题 3.162 (必须解点) 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 与 $\ell:x+2y-3=0$ 交于 A,B (坐标见 例题 3.160). 求 $\dfrac{y_A}{x_A}+\dfrac{y_B}{x_B}$ 是否可仅用 s,p 完成? 若否, 用已解坐标直接计算.

解 形式上看

$$\frac{y_A}{x_A}+\frac{y_B}{x_B}=\frac{y_Ax_B+y_Bx_A}{x_Ax_B},$$

分子 $y_Ax_B+y_Bx_A$ 一般不是 s_x,s_y,p_x,p_y 的对称式(除非再引入 y_i 与 x_i 的线性关系并整理). 本题有 $x=3-2y$, 故 $y=\dfrac{3-x}{2}$,

$$\frac{y}{x}=\frac{3-x}{2x}=\frac{3}{2x}-\frac{1}{2},$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$\sum \frac{y_i}{x_i} = \frac{3}{2}\sum \frac{1}{x_i} - 1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{s}{p} - 1.$$

由 例题 3.160：$x_A = 3, x_B = -\dfrac{21}{25}$，故

$$s = 3 - \frac{21}{25} = \frac{54}{25}, \qquad p = 3\cdot\left(-\frac{21}{25}\right) = -\frac{63}{25},$$

$$\sum \frac{y_i}{x_i} = \frac{3}{2}\cdot\frac{54/25}{-63/25} - 1 = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{54}{63}\right) - 1 = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{6}{7}\right) - 1 = -\frac{9}{7} - 1 = -\frac{16}{7}.$$

知乎@余命数

直接用坐标：$\dfrac{0}{3} + \dfrac{48/25}{-21/25} = 0 + \dfrac{48}{-21} = -\dfrac{16}{7}$，一致. 本例说明，经线性关系整理后，某些看似非对称的式子仍可回到 s/p；若整理失败，则暴力解点是正道，不必硬套韦达.

知乎@余命数

3.9.6 面积问题例题

圆锥曲线中的三角形面积与四边形面积是设线法代数处理的典型应用，涉及分割法、面积坐标化、共角等角模型、对顶角模型、对角线垂直模型等.

例题 3.163 (三角形的面积问题之分割法) 已知椭圆 C 的对称中心为坐标原点，对称轴为坐标轴，焦点在 y 轴上，离心率 $e = \frac{1}{2}$，且过点 $P(3,2)$，

知乎@余命数

例题 3.164 (三角形、四边形的面积问题之面积坐标化) 如图，已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2，若点 P 为双曲线 C 在第一象限上的一点，且满足 $|PF_1| + |PF_2| = 8$，过点 P 分别作双曲线 C 两条渐近线的平行线 PA, PB 与渐近线的交点分别是 A 和 B.

(1) 求四边形 $OAPB$ 的面积；

(2) 若对于更一般的双曲线 $C': \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$，点 P 为双曲线 C' 上任意一点，过点 P' 分别作双曲线 C' 两条渐近线的平行线 $P'A', P'B'$ 与渐近线的交点分别是 A' 和 B'，请问四边形 $OA'P'B'$ 的面积为定值吗？若是定值，求出该定值(用 a, b 表示该定值)；若不是定值，请说明理由.

解 答案：(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$；(2) 是定值，$\frac{1}{2}ab$. (1) 因为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$，由双曲线的定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2$，又因为 $|PF_1| + |PF_2| = 8$，$\therefore |PF_1| = 5, |PF_2| = 3$，因为 $|F_1F_2| = 2\sqrt{1+3} = 4$，所以，$|PF_1|^2 + |F_1F_2|^2 = |PF_2|^2$，$\therefore PF_2 \perp x$ 轴，$\therefore$ 点 P 的横坐标为 $x_P = 2$，所以，$2^2 - \frac{y_P^2}{3} = 1$，$\therefore y_P > 0$，可得 $y_P = 3$，即点 $P(2,3)$，过点 P 且与渐近线 $y = -\sqrt{3}x$ 平行的直线的方程为 $y - 3 = -\sqrt{3}(x-2)$，联立

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ y-3=-\sqrt{3}(x-2) \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\sqrt{3}+\frac{3}{2} \end{cases}$，即点 $B\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$，直线 OP 的方程为 $3x-2y=0$，点 B 到直线 OP 的距离为 $d=\frac{|3x_B-2y_B|}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$，且 $|OP|=\sqrt{13}$，因此，四边形 $OAPB$ 的面积为 $S_{\square OAPB}=2S_{\triangle OBP}=|OP|\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{2}$；(2) 四边形 $OA'P'B'$ 的面积为定值 $\frac{1}{2}ab$，理由如下：设点 $P'(x_0,y_0)$，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，则直线 $P'B'$ 的方程为 $y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0)$，联立 $\begin{cases} y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0) \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\frac{x_0}{2}+\frac{a}{2b}y_0 \\ y=\frac{y_0}{2}+\frac{b}{2a}x_0 \end{cases}$，即点 $B'\left(\frac{x_0}{2}+\frac{a}{2b}y_0,\frac{y_0}{2}+\frac{b}{2a}x_0\right)$，

例题 3.165 (三角形的面积比问题之共角、等角模型)（2024·陕西西安·一模）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的短轴长等于焦距，且过点 $(2,1)$ (1) 求椭圆 C 的方程；(2) P 为直线 $y=2\sqrt{3}$ 上一动点，记椭圆 C 的上下顶点为 A,B，直线 PA,PB 分别交椭圆 C 于点 M,N；当 $\triangle PMN$ 与 $\triangle PAB$ 的面积之比为 $\frac{3}{4}$ 时，求直线 MN 的斜率.

解 答案：(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$；(2) 0. (1) 由题意可得 $\begin{cases} a^2-b^2=c^2 \\ 2b=2c \\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \end{cases}$，解得 $a=\sqrt{6},b=c=\sqrt{3}$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 因为 $A(0,\sqrt{3}),B(0,-\sqrt{3})$，设 $P(t,2\sqrt{3}),(t\neq 0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则直线 PA 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{t}x+\sqrt{3}$，联立 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{t}x+\sqrt{3} \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $(t^2+6)x^2+12tx=0$，$\Delta=(12t)^2>0$，解得 $x_1=\frac{-12t}{t^2+6}$，代入直线方程可得 $y_1=\frac{\sqrt{3}t^2-6\sqrt{3}}{t^2+6}$，故 $M\left(\frac{-12t}{t^2+6},\frac{\sqrt{3}t^2-6\sqrt{3}}{t^2+6}\right)$. 直线 PB 的方程为 $y=\frac{3\sqrt{3}}{t}x-\sqrt{3}$，由 $\begin{cases} y=\frac{3\sqrt{3}}{t}x-\sqrt{3} \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $(t^2+54)x^2-36tx=0,\Delta=(36t)^2>0$，解得 $x_2=\frac{36t}{t^2+54},y_2=\frac{-\sqrt{3}t^2+54\sqrt{3}}{t^2+54}$，故 $N\left(\frac{36t}{t^2+54},\frac{-\sqrt{3}t^2+54\sqrt{3}}{t^2+54}\right)$. 设 $\triangle PMN$ 与 $\triangle PAB$ 的面积分别为 S_1,S_2，则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|PM|\cdot|PN|\sin\angle MPN}{\frac{1}{2}|PA|\cdot|PB|\sin\angle APB}$. 因为 $\angle MPN=\angle APB$，且 P,A,M 三点共线，P,B,N 三点共线，结合距离公式化简可得 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|PM|\cdot|PN|}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{|t-x_1|}{|t|}\cdot\frac{|t-x_2|}{|t|}=\frac{\left(t+\frac{12t}{t^2+6}\right)\left(t-\frac{36t}{t^2+54}\right)}{t^2}=\frac{(t^2+18)^2}{(t^2+6)(t^2+54)}$. 由 $\frac{(t^2+18)^2}{(t^2+6)(t^2+54)}=\frac{3}{4}$ 化简解得 $(t^2-18)^2=0\Rightarrow t^2=18\Rightarrow t=\pm 3\sqrt{2}$. 当 $t=3\sqrt{2}$ 时，$M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),N\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$MN$ 的斜率为 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}}=0$；同理当 $t=-3\sqrt{2}$ 时率也为 0. 故直线 MN 的斜率为 0.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.166 (三角形的面积比问题之对顶角模型) (2024·高三·山西吕梁·开学考试) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(2,\sqrt{2})$, 且 C 的右焦点为 $F(2,0)$. (1) 求 C 的方程; (2) 设过点 $(4,0)$ 的一条直线与 C 交于 P,Q 两点, 且与线段 AF 交于点 S. (i) 证明: S 到直线 FP 和 FQ 的距离相等; (ii) 若 $\triangle APS$ 的面积等于 $\triangle FQS$ 的面积, 求 Q 的坐标.

解 (1) 根据题意有 $\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$, 且由椭圆的几何性质可知 $a^2=b^2+c^2=b^2+4$, 所以 $a^2=8,b^2=4$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. (2)(i) 显然 PQ 的斜率存在, 设 PQ 的方程为 $y=k(x-4)$, 代入 C 的方程有: $(2k^2+1)x^2-16k^2x+32k^2-8=0$, 其中 $\Delta>0$. 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=\frac{16k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{32k^2-8}{2k^2+1}$,

例题 3.167 (四边形的面积问题之对角线垂直模型) (2024·湖北·模拟预测) 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 B, 右焦点为 F, 点 B,F 都在直线 $3x+\sqrt{3}y-3=0$ 上. (1) 求椭圆 E 的标准方程; (2) 若圆 $x^2+y^2=1$ 的两条相互垂直的切线 l_1,l_2 均不与坐标轴垂直, 且直线 l_1,l_2 分别与 E 相交于点 A,C 和 B,D, 求四边形 $ABCD$ 面积的最小值.

解 (1) 找椭圆 E 的半焦距为 c, 由已知点 B 的坐标为 $(0,b)$, 点 F 的坐标为 $(c,0)$, 因为点 B,F 都在直线 $3x+\sqrt{3}y-3=0$ 上, 所以 $\sqrt{3}b-3=0,3c-3=0$, 又 $a^2=b^2+c^2$, 所以 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$, 所以椭圆 E 的方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, (2) 由题知 l_1,l_2 的斜率存在且不为 0. 设 $l_1:y=kx+m(k\neq0)$. 因为 l_1 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 得 $m^2=1+k^2$. 联立 $l_1:y=kx+m(k\neq0)$ 与 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, 可得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$, 设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$, $\Delta=64k^2m^2-16(3+4k^2)(m^2-3)=48(3+4k^2-m^2)>0\Leftrightarrow 3+4k^2>m^2$, 则 $x_1+x_2=\frac{-8km}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$. 所以 $|AC|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{(1+k^2)(4k^2+3-m^2)}}{3+4k^2}$, 将 $m^2=1+k^2$ 代入, 可得 $|AC|=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{(1+k^2)(3k^2+2)}}{3+4k^2}$. 用 $\frac{1}{k}$ 换 k, 可得 $|BD|=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{(1+k^2)(3+2k^2)}}{3k^2+4}$,

例题 3.168 (四边形的面积问题之一解四边形) (2024·辽宁·模拟预测) 给出如下的定义和定理:
定义: 若直线 l 与抛物线 Γ 有且仅有一个公共点 P, 且 l 与 Γ 的对称轴不平行, 则称直线 l 与抛物线 Γ 相切, 公共点 P 称为切点.
定理: 过抛物线 $y^2=2px$ 上一点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $y_0y=px_0+px$.
完成下述问题:

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

已知抛物线 $\Gamma: y^2=x$, 焦点为 F, 过 Γ 外一点 Q(不在 x 轴上), 作 Γ 的两条切线, 切点分别为 A, B, (A, B 在 x 轴两侧) 直线 QA, QB 分别交 y 轴于 C, D 两点,

(1) 若 $|AF|=\frac{5}{4}$, 求线段 CF 的长度;

(2) 若点 Q 在直线 $x=-1$ 上, 证明直线 AB 过定点, 并求出该定点;

(3) 若点 Q 在曲线 $y^2=\frac{7}{8}(x+1), (-1\leqslant x\leqslant 0)$ 上, 求四边形 $ACDB$ 的面积的范围.

解 答案: $\frac{\sqrt{5}}{4}$. (1) 由题意知 $F(\frac{1}{4},0)$, 直线 QA, QB 的斜率均不为零, 其斜率都存在且异号, 设 $A(x_1,y_1)$, 因为 $|AF|=x_1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\Rightarrow x_1=1, y^2=x=1\Rightarrow y=\pm 1$, 不妨设 $A(1,1)$, 则 AQ 方程为 $y=\frac{1}{2}(x+1)$, 即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$、$C(0,\frac{1}{2})$、$|FC|=\sqrt{(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$, 所以线段 CF 的长度为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

例题 3.169　直线 BA_1, BA_2 的斜率满足 $k_{BA_1}\cdot k_{BA_2}=-\frac{1}{4}$. (1) 求椭圆 C 的方程; (2) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上点 (x_0,y_0) 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$. 若点 P 为直线 $l: x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 上的动点, 过点 P 作椭圆 C 的切线 PM, PN, 切点分别为 M, N, 求 $\triangle PMN$ 面积的最小值.

解 答案: $\frac{\sqrt{3}}{6}$. (1) 由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上顶点为 $B(0,1)$, 可得 $b=1$, 因为 $k_{BA_1}\cdot k_{BA_2}=-\frac{1}{4}$, $A_1(-a,0), A_2(a,0)$, 所以 $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-a}=\frac{1}{-a^2}=-\frac{1}{4}$, 所以 $a^2=4$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (2) 设 $M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$, $P\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},n\right)$, 则椭圆 C 在点 M, N 的切线方程分别为 $\frac{x_1x}{4}+y_1y=1$, $\frac{x_2x}{4}+y_2y=1$, 又 P 在两条切线上, 则 $\frac{\sqrt{3}x_1}{3}+ny_1=1$, $\frac{\sqrt{3}x_2}{3}+ny_2=1$, 则直线 MN 的方程为 $\frac{\sqrt{3}}{3}x+ny=1$, 由 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}x+ny=1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 整理得 $(3n^2+4)y^2-6ny-1=0$, 则 $y_1+y_2=\frac{6n}{3n^2+4}, y_1y_2=\frac{-1}{3n^2+4}$, 则 $|MN|=\sqrt{1+3n^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+3n^2}\sqrt{\left(\frac{6n}{3n^2+4}\right)^2+\frac{4}{3n^2+4}}=\frac{4(3n^2+1)}{3n^2+4}$, 又点 P 到直线 MN 的距离 $d=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}+n^2-1\right|}{\sqrt{1+3n^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+3n^2}$, 则 $\triangle PMN$ 的面积为 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{4(3n^2+1)}{3n^2+4}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+3n^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{(1+3n^2)\sqrt{3n^2+1}}{3n^2+4}$, 令 $m=\sqrt{1+3n^2}$, $m\geq 1$, 则 $S_{\triangle PMN}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{m^3}{m^2+3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{3}{m^3}}$, $m\geq 1$, 则 $y=\frac{1}{m}+\frac{3}{m^3}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减, 则 $S_{\triangle PMN}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{3}{m^3}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $S_{\triangle PMN}\geq\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{1+3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$, 当且仅当 $n=0$ 即点 P 坐标为 $P\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},0\right)$ 时等号成立, 则 $\triangle PMN$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.170 已知双曲线 $\Gamma: x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 与直线 $l: y=x+1$ 交于 A、B 两点（A 在 B 左侧），过点 A 的两条关于 l 对称的直线 l_1、l_2 分别交双曲线 Γ 于 C、D 两点，其中 C 在右支，D 在左支. (1) 设直线 l_1 的斜率为 k_1，直线 l_2 的斜率为 k_2，求 $k_1\cdot k_2$ 的值；(2) 若直线 CD 与双曲线 Γ 在点 B 处的切线交于点 P，求 $\triangle ABP$ 的面积.

解 答案：(1) 1；(2) $\frac{32}{15}$. (1) 由题意知直线 l 斜率为 1，$\therefore$ 直线 l 的倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，设直线 l_1、l_2 的倾斜角分别为 θ_1、θ_2 (θ_1、$\theta_2\in(0,\pi)$)，直线 l_1、l_2 关于直线 l 对称，$\therefore\theta_1+\theta_2=2\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\therefore k_1\cdot k_2=\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2=\tan\theta_1\cdot\tan(\frac{\pi}{2}-\theta_1)=\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta_1)}=1$.

(2) 联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1\\ y=x+1\end{cases}\Rightarrow A(-1,0),B(\frac{5}{3},\frac{8}{3})$，$\therefore$ 双曲线 Γ 在点 B 处的切线方程为 $\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y=1$. 不妨设直线 CD 为 $m(x+1)+ny=1$、$C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1\\ m(x+1)+ny=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4[(x+1)-1]^2-y^2-4=0\\ m(x+1)+ny=1\end{cases}$，$\Rightarrow 4(x+1)^2-8(x+1)[m(x+1)+ny]-y^2=0$ 整理得 $(\frac{y}{x+1})^2+8n\cdot\frac{y}{x+1}+8m-4=0$，将等式看作关于 $\frac{y}{x+1}$ 的方程：两根之和 $\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}=-8n$，两根之积 $\frac{y_1}{x_1+1}\cdot\frac{y_2}{x_2+1}=8m-4$，而其中 $k_1\cdot k_2=k_{AC}\cdot k_{AD}=\frac{y_1}{x_1+1}\cdot\frac{y_2}{x_2+1}=8m-4$，由 (1) 得 $k_1\cdot k_2=1$，$\therefore m=\frac{5}{8}$ $\therefore$ 直线 CD 为 $\frac{5}{8}(x+1)+ny=1$，过定点 $(\frac{3}{5},0)$，又 $\because$ 双曲线 Γ 在点 B 处的切线方程为 $\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}y=1$，过点 $(\frac{3}{5},0)$，$\therefore P(\frac{3}{5},0)$，$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_{P-AB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{|\frac{3}{5}-0+1|}{\sqrt{2}}=\frac{32}{15}$.

例题 3.171 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 2，点 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 C 上. (1) 求椭圆 C 的标准方程；(2) 设点 $T(m,n)$ 在椭圆 C 上（点 T 不在坐标轴上），证明：直线 $\frac{mx}{2}+ny=1$ 与椭圆 C 相切；(3) 设点 P 在直线 $x=-1$ 上，且点 P 在椭圆 C 外，过点 P 作椭圆 C 的两条切线，切点分别为 A,B，O 为坐标原点，若 $\triangle PAB$ 和 $\triangle OAB$ 的面积之和为 1，求直线 AB 的方程.

解 答案：(1) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；(2) 证明见解析；(3) $y=\pm\frac{1}{2}(x+2)$. (1) 由题知，$\begin{cases}\frac{1^2}{a^2}+\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{b^2}=1\\ 2b=2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{2},b=1$，$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2) 由题意，$T(m,n)$ 在椭圆上，故 $\frac{m^2}{2}+n^2=1$，即 $m^2+2n^2=2$. 联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ \frac{mx}{2}+ny=1\end{cases}$，消去 y（或 x）并利用 $m^2+2n^2=2$，可得判别式 $\Delta=0$，故直线与椭圆相切.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(3) 设 $P(-1,t)$, 过 P 的切线为 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$, 代入 P 得 $-\frac{x_0}{2}+ty_0=1$, 即切点弦 AB 方程为 $-\frac{x}{2}+ty=1$. 设 $AB:x=2ty-2$, 与椭圆联立, 利用面积之和为 1 解得 $t=\pm1$, 故 AB 方程为 $y=\frac{1}{2}(x+2)$ 或 $y=-\frac{1}{2}(x+2)$.

例题 3.172　(1) 求椭圆 C 的标准方程; (2) 若直线 l 与椭圆交于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点, 且直线 PA、PB 的倾斜角互补, 点 $M(0,8)$, 求三角形 MAB 面积的最大值.

解　答案:(1) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$;(2) 18. (1) $\because e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$、$\therefore a=2c$、$b=\sqrt{3}c$. 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{3c^2}+\frac{y^2}{4c^2}=1$,即 $4x^2+3y^2=12c^2$,$\therefore$ 过点 $P(3,2)$、$\therefore 36+12=12c^2$、$\therefore c^2=4$.$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$;(2) 由题意可知直线 l 的斜率存在, 且不过点 $P(3,2)$, 设直线 l 的方程为 $y=kx+m\,(3k+m-2\neq0)$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=kx+m\\4x^2+3y^2=48\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3k^2+4)x^2+6kmx+3m^2-48=0$、$x_1+x_2=-\frac{6km}{3k^2+4}$、$x_1x_2=\frac{3m^2-48}{3k^2+4}$、$\Delta=48(12k^2+16-m^2)>0$、$\therefore k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1-2}{x_1-3}+\frac{y_2-2}{x_2-3}=0$、$\therefore\frac{kx_1+m-2}{x_1-3}+\frac{kx_2+m-2}{x_2-3}=2k+(3k+m-2)\left(\frac{1}{x_1-3}+\frac{1}{x_2-3}\right)=0$、$\therefore 2k+(3k+m-2)\cdot\frac{x_1+x_2-6}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}=0$,将 x_1+x_2, x_1x_2 代入整理得 $(k-2)(3k+m-2)=0$,$\therefore k=2$,又因为 $\Delta=48(64-m^2)>0$,解得: $-8<m<8$,三角形 MAB 的面积 $S=\frac{1}{2}|8-m|\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\sqrt{(64-m^2)(8-m)^2}$; 令 $f(m)=(64-m^2)(8-m)^2$, $-8<m<8$, 导函数 $f'(m)=-4(8-m)^2(4+m)$, 当 $x\in(-8,-4)$, $f'(m)>0$, 当 $x\in(-4,8)$, $f'(m)<0$, 增区间为 $(-8,-4)$, 减区间为 $(-4,8)$, $\therefore$ 当 $m=-4$ 时, 三角形 MAB 的面积取得最大值, 最大值为 18.

例题 3.173　分别为点 D,E, 直线 AE 与直线 BD 相交于 P 点, (1) 求证: 点 P 在定直线上; (2) 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

解　答案: (1) 点 P 在直线 $x=3$ 上; (2)$\frac{\sqrt{3}}{4}$. (1) 设椭圆 C 的方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$,代入已知点的坐标,得: $\begin{cases}3m+n=1\\4m+\frac{2}{3}n=1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{6}\\n=\frac{1}{2}\end{cases}$, 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. (2) 如图. (1) 设直线 l 的方程为 $x=my+2(m\neq0)$, 并记点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(x_0,y_0)$, 由 $\begin{cases}x=my+2\\\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 x, 得 $(m^2+3)y^2+4my-2=0$, 易知 $\Delta=16m^2+8(m^2+3)=24(m^2+1)>0$, 则 $y_1+y_2=-\frac{4m}{m^2+3}$, $y_1y_2=-\frac{2}{m^2+3}$. 由条件, $D(x_1,0)$, $E(x_2,0)$, 直线 AE 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-x_2}(x-x_2)$, 直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$, 联立解得 $x_0=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{my_1y_2+2y_1+my_1y_2+2y_2}{y_1+y_2}=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}+2=3$, 所以点 P 在定直线

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$x=3$ 上. (2) $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|x_0-x_2|=\frac{1}{2}|y_1|\cdot|3-x_2|=\frac{1}{2}|y_1|\cdot|1-my_2|=\frac{1}{2}|y_1-my_1y_2|$ 而 $\frac{my_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{1}{2}$,所以 $my_1y_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$,则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\left|y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right|=\frac{1}{4}|y_1-y_2|=\frac{1}{4}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{6(m^2+1)}}{2m^2+6}$. 令 $t=\sqrt{m^2+1}$, 则 $t>1$, 所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{t+\frac{2}{t}}\leq\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时,等号成立,所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

例题 3.174 已知抛物线 $y^2=4x$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,直线 m 与抛物线相切,与椭圆交于 A,B 两点,与 x 轴交于点 D,O 为坐标原点,且 O,A,B 三点不共线,求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

解 答案: $\sqrt{2}$. 当直线 m 斜率不存在时, $m:x=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 相切于 O, 与椭圆交于 A,B 在 y 轴上, 三点共线, 舍去. 设直线 $m:x=ky+b$, 联立抛物线得 $y^2-4ky-4b=0$, 由 $\Delta=16k^2+16b=0$ 得 $b=-k^2<0$. 联立圆得 $(k^2+2)y^2+2kby+b^2-4=0$, 由 $\Delta=4k^2b^2-4(k^2+2)(b^2-4)>0$ 结合 $b=-k^2$ 得 $0<k^2<1+\sqrt{5}$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 则 $y_1+y_2=-\frac{2kb}{k^2+2}$, $y_1y_2=\frac{b^2-4}{k^2+2}$. 点 $D(b,0)$,则 $|S_{\triangle AOB}|=\frac{1}{2}|OD||y_1-y_2|=\frac{b\sqrt{4k^2-2b^2+8}}{k^2+2}$. 代入 $b=-k^2$ 得 $S=\frac{k^2\sqrt{-2k^4+4k^2+8}}{k^2+2}$. 令 $t=k^2+2$,则 $2<t<3+\sqrt{5}$, $S=f(t)=\frac{(t-2)\sqrt{-2t^2+12t-8}}{t}$. 求导得 $f'(t)=-\frac{2(t+2)(t-4)(t-1)}{t^2\sqrt{-2t^2+12t-8}}$, 故 $f(t)$ 在 $(2,4)$ 递增, 在 $(4,3+\sqrt{5})$ 递减, $t=4$ 处取最大值. 故 $S_{\max}=\frac{(4-2)\sqrt{-32+48-8}}{4}=\sqrt{2}$.

例题 3.175 (2024·四川达州·二模) 已知抛物线 $\Gamma:y^2=2px(p>0)$, 直线 $l:y=k(x-p)$ 与 Γ 交于 A,B 两点,线段 AB 中点 $M(x_m,y_m)$, $ky_m=2$.
(1) 求抛物线 Γ 的方程;
(2) 直线 l 与 x 轴交于点 C,O 为原点,设 $\triangle BOC,\triangle COM,\triangle MOA$ 的面积分别为 $S_{\triangle BOC},S_{\triangle COM},S_{\triangle MOA}$,若 $S_{\triangle BOC},S_{\triangle COM},S_{\triangle MOA}$ 成等差数列,求 k.

解 答案: $y^2=4x$, $k=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}$. 【解法】(1) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

$$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=k(x-p)\end{cases}\Rightarrow ky^2-2py-2p^2k=0,$$

$$\therefore y_1+y_2=\frac{2p}{k},\quad y_m=\frac{p}{k},$$

$$\therefore ky_m=2\Rightarrow p=2,\quad \therefore\Gamma:y^2=4x.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

(2)

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x-2) \end{cases} \Rightarrow ky^2 - 4y - 8k = 0,$$

故 $y_1 + y_2 = \frac{4}{k}, y_1 y_2 = -8$,

$$\therefore S_{\triangle BOC}, S_{\triangle COM}, S_{\triangle MOA} \text{ 成等差数列} \Rightarrow |y_2|, |y_m|, |y_1| - |y_m| \text{ 成等差数列.}$$

$$\therefore 2|y_m| = |y_2| + |y_1| - |y_m| \Rightarrow 3|y_m| = |y_1| + |y_2| \Rightarrow 3|y_m| = |y_1 - y_2|,$$

$$\therefore 9y_m^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 \Rightarrow 9\left(\frac{2}{k}\right)^2 = \left(\frac{4}{k}\right)^2 + 32,$$

$$\therefore k = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

例题 3.176　求 $\triangle OMN$ 面积 S 的取值范围.

知乎@余命数

解　答案: $\left(0, \frac{24\sqrt{3}}{49}\right]$. (1) 由题可得点 F 在 x 轴的正半轴, 在直线 $2x+3y-2=0$ 上, 令 $y=0$, 解得 $x=1$, 即焦点 F 坐标为 $(1,0)$, 所以 $\frac{p}{2}=1$, 解得 $p=2$, 所以抛物线的方程为: $y^2=4x$.(2) 设过点 $(3,0)$ 的直线 l 的方程为: $x=my+3$、$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+3 \end{cases}$ 可得 $y^2-4my-12=0$, $\begin{cases} \Delta = 16m^2+48>0 \\ y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=-12 \end{cases}$, 以焦点 F 为圆心, OF 为半径的圆 P 的方程为: $(x-1)^2+y^2=1$. 直线 OP 的方程为: $y=\frac{y_1}{x_1}x=\frac{4}{y_1}x$, 联立 $\begin{cases} y=\frac{4}{y_1}x \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$, 解得 $M\left(\frac{2y_1^2}{y_1^2+16}, \frac{8y_1}{y_1^2+16}\right)$, 同理可得 $N\left(\frac{2y_2^2}{y_2^2+16}, \frac{8y_2}{y_2^2+16}\right)$, 设直线 MN 与 x 轴的交点 $T(n,0)$, 所以 $\overrightarrow{MT} \parallel \overrightarrow{TN}$, 由于 $\overrightarrow{MT}=\left(n-\frac{2y_1^2}{y_1^2+16}, -\frac{8y_1}{y_1^2+16}\right), \overrightarrow{TN}=\left(\frac{2y_2^2}{y_2^2+16}-n, \frac{8y_2}{y_2^2+16}\right)$,所以 $\left(n-\frac{2y_1^2}{y_1^2+16}\right)\left(\frac{8y_2}{y_2^2+16}\right)-\left(\frac{2y_2^2}{y_2^2+16}-n\right)\left(-\frac{8y_1}{y_1^2+16}\right)=0$, 化简可得: $(28n-24)(y_1-y_2)=0$, 由于 $y_1-y_2 eq 0$, 所以 $28n-24=0$, 解得 $n=\frac{6}{7}$, 则直线 MN 恒过点 $T\left(\frac{6}{7},0\right)$, 所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{7}\times\left|\frac{8y_1}{y_1^2+16}-\frac{8y_2}{y_2^2+16}\right|=\frac{24}{7}\times\left|\frac{y_1y_2^2+16y_1-y_2y_1^2-16y_2}{(y_1^2+16)(y_2^2+16)}\right|$, 将 $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=-12 \end{cases}$, 代入化简可得: $S_{\triangle OMN}=\frac{24}{7}\times\left|\frac{28(y_1-y_2)}{(y_1^2+16)(y_2^2+16)}\right|=\frac{96\sqrt{16m^2+48}}{784+256m^2}=\frac{6\sqrt{16m^2+48}}{49+16m^2}$, 令 $t=\sqrt{16m^2+48}$, 则 $t=\sqrt{16m^2+48}\geq 4\sqrt{3}$, 因为 $y=t+\frac{1}{t}(t\geq 4\sqrt{3})$ 在 $[4\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增, 所

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

以 $y=t+\frac{1}{t}\geq 4\sqrt{3}+\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{49\sqrt{3}}{12}$, 则 $0<\frac{1}{y}\leq\frac{12}{49\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{49}$, 所以 $0<6\times\frac{1}{y}\leq\frac{24\sqrt{3}}{49}$, 即 $0<S_{\triangle OMN}\leq\frac{24\sqrt{3}}{49}$. 故 $\triangle OMN$ 面积 S 的取值范围为 $\left(0,\frac{24\sqrt{3}}{49}\right]$

例题 3.177 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B, 离心率为 e, 且 $|AB|=\frac{8\sqrt{3}}{3}e=4$. (1) 求椭圆 C 的标准方程; (2) 设点 P,Q 为椭圆上异于 A,B 的两动点, 记直线 AP 的斜率为 k_1, 直线 QB 的斜率为 k_2, 已知 $k_1=7k_2$. 直线 PQ 与 x 轴相交于点 M, 求 $\triangle APM$ 的面积的最大值.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; (2) $\frac{1}{4}$. (1) 因为 $|AB|=\frac{8\sqrt{3}}{3}e=4$, 所以 $\begin{cases}\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{c}{a}=4,\\ 2a=4,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; (2) 由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得点 $A(-2,0),B(2,0)$, 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$, 直线 $AP:x=t_1y-2$, 直线 $BQ:x=t_2y+2$, 联立 $\begin{cases}x=t_1y-2,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t_1^2+4)y^2-4t_1y=0$, 解得 $y_1=\frac{4t_1}{t_1^2+4}$. 联立 $\begin{cases}x=t_2y+2,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t_2^2+4)y^2+4t_2y=0$, 解得 $y_2=-\frac{4t_2}{t_2^2+4}$.

因为 $k_{AP}=7k_{BQ}$, 且 $k_{AP}=\frac{1}{t_1},k_{BQ}=\frac{1}{t_2}$, 所以 $t_2=7t_1$, 此时 $y_2=-\frac{4t_2}{t_2^2+4}=-\frac{28t_1}{49t_1^2+4}$, 设 $M(x_0,0)$, 由 P,M,Q 三点共线, 所以 $\frac{x_1-x_0}{y_1}=\frac{x_2-x_0}{y_2}$, 则 $x_0=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}=\frac{(t_2y_2+2)y_1-(t_1y_1-2)y_2}{y_1-y_2}=\frac{(t_2-t_1)y_1y_2+2(y_1+y_2)}{y_1-y_2}=\frac{(7t_1-t_1)\left(-\frac{112t_1^2}{(t_1^2+4)(49t_1^2+4)}\right)+2\left(\frac{4t_1}{t_1^2+4}-\frac{28t_1}{49t_1^2+4}\right)}{\frac{4t_1}{t_1^2+4}-\left(-\frac{28t_1}{49t_1^2+4}\right)}=\frac{-24\times28t_1^3+8t_1(49t_1^2+4)-56t_1(t_1^2+4)}{4t_1(49t_1^2+4)+28t_1(t_1^2+4)}=\frac{-28\times6t_1^2+98t_1^2+8-14t_1^2-56}{49t_1^2+4+7t_1^2+28}=\frac{-84t_1^2-48}{56t_1^2+32}=-\frac{12(7t_1^2+4)}{8(7t_1^2+4)}=-\frac{3}{2}$, 所以 $M\left(-\frac{3}{2},0\right)$. 所以 $S_{\triangle APM}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}|y_1|=\frac{1}{4}\cdot\frac{4|t_1|}{t_1^2+4}=\frac{1}{|t_1|+\frac{4}{|t_1|}}\leq\frac{1}{4}$, 当且仅当 $|t_1|=\frac{4}{|t_1|}$, 即 $|t_1|=2$ 时等号成立. 所以 $S_{\triangle APM}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

例题 3.178 (1) 求 C 的方程;

解 答案: $x^2=4y$. 由抛物线 $C:x^2=2py$ 上一点 $H(-4,y_0)$ 到坐标原点 O 的距离为 $4\sqrt{2}$, 可得 $|OH|=\sqrt{(-4)^2+y_0^2}=4\sqrt{2}$, 解得 $y_0=4,p=2$, 所以抛物线的标准方程为 $x^2=4y$.

例题 3.179 (2) 若 $|PN|=4|PM|$, 求 k 的值;

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 答案: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 由题意, 设直线 l 的方程为 $y=kx+2$, 且 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$. 联立方程组 $\begin{cases}y=kx+2\\x^2=4y\end{cases}$ 消去 y 整理得 $x^2-4kx-8=0$, 则 $\Delta=(-4k)^2+4\times8>0$, 所以 $x_1+x_2=4k$, $x_1x_2=-8$, 因为 $MA\perp l, NB\perp l$, 所以 $MA\parallel NB$, 所以 $\triangle APM\sim\triangle BPN$, 又因为 $|PN|=4|PM|$, 所以 $|PB|=4|PA|$, 则 $x_2=-4x_1$, 因为 $k>0$, 所以 $\begin{cases}x_1=-\sqrt{2}\\x_2=4\sqrt{2}\end{cases}$, 则 $k=\frac{x_1+x_2}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

例题 3.180 (3) 若 $k\in[1,2)$, 记 $\triangle PAM$, $\triangle PBN$ 的面积分别为 S_1, S_2, 求 S_1+S_2 的取值范围.

知乎@余命数

解 答案: $[32,100)$. 根据抛物线对称性, 不妨令 $y_1<2<y_2$, 由 (2) 中 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 得直线 NB 的方程为 $y-y_2=-\frac{1}{k}(x-x_2)$, 令 $x=0$, 得 $N\left(0,\frac{x_2}{k}+y_2\right)$, 同理可得 $M\left(0,\frac{x_1}{k}+y_1\right)$, 则 $S_1=\frac{1}{2}\left(2-\frac{x_1}{k}-y_1\right)(-x_1)$, $S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{k}+y_2-2\right)x_2$, 且 $x_1+x_2=4k$, $x_1x_2=-8$, 故 $S_1+S_2=(x_1+x_2)+\frac{1}{2k}(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{2}(x_1y_1+x_2y_2)=-(x_1+x_2)+\frac{1}{2k}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+\frac{1}{8}(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=-4k+\frac{1}{2k}(16k^2+16)+\frac{k}{2}(16k^2+24)=8k^3+16k+\frac{8}{k}$, 令 $f(k)=8k^3+16k+\frac{8}{k}(1\le k\le2)$, 则 $f'(k)=24k^2+16-\frac{8}{k^2}$, 显然 $f'(k)>0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立, 所以 $f(k)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增, 由 $f(1)=32, f(2)=100$, 可得 S_1+S_2 的取值范围为 $[32,100]$.

知乎@余命数

例题 3.181 (2024·高三·四川成都·开学考试) 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$ 且左右顶点分别为 A_1,A_2, 过点 $T(4,0)$ 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 M,N 两点. (1) 求双曲线的方程; (2) 记直线 A_2M,A_2N 的斜率分别为 k_1,k_2, 证明 $\frac{k_1}{k_2}$ 是定值; (3) 设 G 为直线 A_1M 和 A_1N 的交点, 记 $\triangle GMN,\triangle GA_1A_2$ 的面积分别为 S_1,S_2, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$; (2) $\frac{k_1}{k_2}=-\frac{1}{3}$; (3) 3. (1) 由双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 得 $a^2+1=(\sqrt{5})^2$, 解得 $a^2=4$, 所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

知乎@余命数

(2) 依题意, 设直线 l 的方程为 $x=my+4, M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$, 由 $\begin{cases}x=my+4\\x^2-4y^2=4\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $(m^2-4)y^2+8my+12=0$, 由直线 l 与双曲线的右支交于 M,N 两点, 得可得 $\begin{cases}\Delta=64m^2-48(m^2-4)>0\\m^2-4\neq0\\y_1y_2=\frac{12}{m^2-4}<0\end{cases}$, 解得 $-2<m<2$, 则 $y_1+y_2=-\frac{8m}{m^2-4}$,

$y_1y_2=\frac{12}{m^2-4}$, 即 $2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$, 而 $A_1(-2,0),A_2(2,0)$, 所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{y_1(my_2+2)}{y_2(my_1+6)}=\frac{my_1y_2+2y_1}{my_1y_2+6y_2}=\frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+2y_1}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+6y_2}=\frac{\frac{1}{2}y_1-\frac{3}{2}y_2}{-\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}=-\frac{1}{3}$ 为定值. (3) 由 (2) 知 $k_2=-3k_1$, 直线 $A_1M:y=k_1(x+2)$, 直线 $A_2N:y=-3k_1(x-2)$, 则点 G 的横坐标为 $x_G=1$, 于是 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|GM||GN|\sin\angle MGN}{\frac{1}{2}|GA_1||GA_2|\sin\angle A_1GA_2}=\frac{|GM||GN|}{|GA_1||GA_2|}=\frac{(x_1-1)(x_2-1)}{3}=\frac{(my_1+3)(my_2+3)}{3}=\frac{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}{3}=\frac{4m^2}{4-m^2}+3\geqslant 3$, 当且仅当 $m=0$ 时取等号,

例题 3.182 (2024·河北·统考模拟预演)已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$, 过点 $P(0,2)$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点, 当直线 l 与 y 轴垂直时, $OA\perp OB$, 其中 O 为坐标原点. (1) 求 C 的准线方程; (2) 若点 A 在第一象限, 直线 l 的倾斜角为锐角, 过点 A 作 C 的切线与 y 轴交于点 T, 连接 TB 交 C 于另一点为 D, 直线 AD 与 y 轴交于点 Q, 求 $\triangle APQ$ 与 $\triangle ADT$ 面积之比的最大值.

解 答案: (1) $y=-\frac{1}{2}$; (2) $3-2\sqrt{2}$. (1) 将 $y=2$ 代入 $x^2=2py(p>0)$, 则 $x=\pm2\sqrt{p}$, 由 $OA\perp OB$, 故 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形, 故 $2\sqrt{p}=2$, 即 $p=1$, 所以 $C:x^2=2y$, 故准线方程为 $y=-\frac{1}{2}$.

(2) 设 $A\left(a,\frac{a^2}{2}\right)$, 直线 $l:y=kx+2(k>0)$, 联立抛物线得 $x^2-2kx-4=0$, 所以 $ax_B=-4$, 则 $x_B=-\frac{4}{a}$, 故 $B\left(-\frac{4}{a},\frac{8}{a^2}\right)$.

由 $y=\frac{x^2}{2}$, 则 $y'=x$, 故 $k_{TA}=a$, 直线 $TA:y-\frac{a^2}{2}=a(x-a)$, 令 $x=0$, 则 $y_T=-\frac{a^2}{2}$, 故 $T\left(0,-\frac{a^2}{2}\right)$.

设直线 $TB:y=k_1x-\frac{a^2}{2}$, 联立物线得 $x^2-2k_1x+a^2=0$, 所以 $\frac{4}{a}x_D=a^2$, 则 $x_D=-\frac{a^3}{4}$, 故 $D\left(-\frac{a^3}{4},\frac{a^6}{32}\right)$.

于是, 直线 $AD:y-\frac{a^2}{2}=\frac{\frac{a^6}{32}-\frac{a^2}{2}}{-\frac{a^3}{4}-a}(x-a)$, 令 $x=0$, 则 $y_Q=\frac{a^4}{8}$, 故 $Q\left(0,\frac{a^4}{8}\right)$.

由直线 l 的倾斜角为锐角, 故 $a>2$, 则 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{8}-2\right)a$, $S_{\triangle ADT}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{8}+\frac{a^2}{2}\right)\left(a+\frac{a^3}{4}\right)=\frac{a^3}{64}(a^2+4)^2$, 所以 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ADT}}=\frac{4(a^2-4)}{a^2(a^2+4)}$, 令 $t=a^2-4>0$, 则 $a^2=t+4$, 则 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ADT}}=\frac{4t}{(t+4)(t+8)}=\frac{4}{t+\frac{32}{t}+12}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}+3}=3-2\sqrt{2}$, 仅当 $t=4\sqrt{2}$, 即 $a^2=4(\sqrt{2}+1)$ 时等号成立, 所以 $\triangle APQ$ 与 $\triangle ADT$ 面积之比的最大值 $3-2\sqrt{2}$.

3.9.7 本节小结

联立读出韦达之后, 常见处理可以概括如下. 目标若是对称式, 我们先把它写成 s,p 的整式, 再代入; y 方向的对称量可经 $y=kx+m$ 转为 x 的和积. 几何条件有时能直接给出关于 s,p 的等式(中点、定长、定比等), 我们宜先写出这些关系, 再与韦达联立. 非对称的 (x_i-a) 型可用点乘双根 $(x_1-a)(x_2-a)=f(a)/A$; 点在曲线上时, 二次组合可直接用曲线方程整体替换. 必须求具体坐标时解方程, 只需对称量时只读韦达.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

直线形式的选取见 第3.8节. 设点与设线的取舍在 第3.16节 讨论; 极坐标与焦弦的更深结构见同卷 第4章.

3.9.8 本节习题

3.49. 椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $y=2x-1$ 与之相交于 A,B. 求 $x_A^2+x_B^2$ 与 y_A+y_B (后者用 $y=2x-1$ 把 y 和转为 x 的韦达).

3.50. 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 外一点 $P(4,0)$, 过 P 斜率为 k 的弦 AB. 用点乘双根写出 $|PA|\cdot|PB|$ 关于 k 的式子, 并验证 $k=0$ 时与直接计算一致.

3.51. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 弦 AB 的中点为 $M(2,2)$. 用和积独立挖掘(弦中点斜率关系)求 k 与弦方程; 再以设 $y=kx+m$ 过 M 后令 $x_M=2$ 的路径对照, 比较代数长度.

3.52. 椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, 斜率 $k=\dfrac{1}{2}$ 的弦满足 $(x_A-x_B)^2=\dfrac{48}{25}$. 用 $s^2-4p=\Delta/A^2$ 独立挖掘截距 m, 并写出弦方程.

3.53. 证明: 对椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任意弦 AB, 有 $\dfrac{x_A^2+x_B^2}{a^2}+\dfrac{y_A^2+y_B^2}{b^2}=2$(曲线方程整体代换).

3.54. 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 与 $x-2y+1=0$ 的交点: (i) 暴力解出坐标; (ii) 仅用韦达求中点; 对照说明何时该解点、何时只读和积.

3.10 一次式与法线式

直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ 的左端即二元一次式 $L(x,y)=Ax+By+C$. 点在直线上当且仅当一次式的值为零; 若点不在直线上, $L(x_0,y_0)$ 的绝对值与点到直线的距离只差一个固定因子, 符号记录点位于直线的哪一侧. 我们以代入一次式为基本动作, 平行与垂直的写法、距离与侧向的判定、角平分线的选取、三线共点的证明, 都可沿同一条主线完成.

3.10.1 过定点的平行线与垂线

回忆 第3.1节. 直线 $Ax+By+C=0$ 以 (A,B) 为法向量. 改变常数项 C 不改变法向量, 只让直线平行移动. 这给出平行线与垂线的快速写法.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.26 (过定点的平行线与垂线) 设直线 $l: Ax+By+C=0$, 点 $P_0(x_0,y_0)$.

- 过 P_0 且与 l 平行的直线方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$;
- 过 P_0 且与 l 垂直的直线方程为 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.

证明 与 l 平行的直线以 (A,B) 为法向量, 方程形如 $Ax+By+C'=0$. 代入 P_0 得 $C'=-(Ax_0+By_0)$, 整理即得第一式.

与 l 垂直的直线以 l 的法向量 (A,B) 为方向向量, 其法向量可取 $(B,-A)$, 因为 $(A,B)\cdot(B,-A)=AB-AB=0$. 以 P_0 为定点写出点法式 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$, 即第二式. □

平行保系数, 垂直换系数并改一处符号. 这一写法省去先求斜率、再用点斜式的中转, 也自动涵盖竖直与水平的情形, 无须讨论斜率是否存在.

例题 3.183 求过点 $P(2,-1)$ 且与直线 $l: 3x+4y-5=0$ (i) 平行; (ii) 垂直的直线方程.

解 (i) 平行: $3(x-2)+4(y+1)=0$, 即 $3x+4y-2=0$.

(ii) 垂直: $4(x-2)-3(y+1)=0$, 即 $4x-3y-11=0$.

3.10.2 一次式的符号与点的位置

直线把平面分成两个半平面, 一次式的符号精确记录这件几何事实.

定理 3.27 (一次式的符号判定) 设 $L(x,y)=Ax+By+C$ (A,B 不全为零), l 为直线 $L=0$. 对任意两点 P_1,P_2:

- $L(P_1)$ 与 $L(P_2)$ 同号 $\iff$ P_1,P_2 在 l 的同侧;
- $L(P_1)$ 与 $L(P_2)$ 异号 $\iff$ P_1,P_2 在 l 的异侧.

证明 考察线段 P_1P_2 上的动点 $P(t)=(1-t)P_1+tP_2$, $t\in[0,1]$. 代入一次式, 由 L 的线性性得

$$L(P(t))=(1-t)\,L(P_1)+t\,L(P_2).$$

右端是关于 t 的一次函数, 或常数函数, 端点值分别为 $L(P_1)$ 与 $L(P_2)$.

若 $L(P_1)$ 与 $L(P_2)$ 异号, 由连续性, 存在 $t_0\in(0,1)$ 使 $L(P(t_0))=0$, 即线段 P_1P_2 与 l 有公共点, 两点分居异侧. 若同号, 一次函数在 $[0,1]$ 上单调且端点同号, 故处处同号, 线段与 l 无公共点, 两点位于同侧. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

原点落在哪一侧, 由 $L(0,0)=C$ 的符号直接判定. 更一般地, 一次式符号给出点与多边形位置关系的快捷检验. 点 P 位于 $\triangle ABC$ 内部, 当且仅当 P 与 C 在直线 AB 同侧, 与 A 在直线 BC 同侧, 与 B 在直线 CA 同侧, 三个符号条件, 一次算完.

例题 3.184　判断点 $M(1,1)$ 是否在顶点为 $A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(0,3)$ 的三角形内部.

解　三边所在直线的方程为 $AB:y=0$; $BC:3x+4y-12=0$; $CA:x=0$.

对 $M(1,1)$ 逐边检验: $y_M=1$ 与 C 的纵坐标 3 同号; $3\cdot1+4\cdot1-12=-5$ 与 A 处的值 -12 同号; $x_M=1$ 与 B 的横坐标 4 同号. 三个同侧条件齐备, 故 M 在三角形内部.

注 3.11 (与线性规划的联系)
第3.2节 中可行域的每条边界都对应一个一次式. $Ax+By+C\geq0$ 表示哪个半平面, 是这里的符号判定. 解题时用原点, 或任一便利点试值定向, 这是最快的取域方法.

3.10.3 法线式

点到直线的距离公式 (第3.1节)

知乎@余命数

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

的分母 $\sqrt{A^2+B^2}$ 恰是法向量 (A,B) 的长度. 若一开始就把法向量取成单位向量, 距离公式便不需要分母. 沿这条路走下去, 我们得到直线的另一种标准形式.

设直线 l 不经过原点. 从原点 O 向 l 作垂线, 垂足记为 N, 这条垂线称为 l 的**法线**. 记

$$p=|ON|>0,$$

并记 $\overrightarrow{ON}$ 与 x 轴正向的夹角为 θ $(0\leq\theta<2\pi)$. 于是 $\overrightarrow{n_0}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 是 l 的单位法向量, $N=(p\cos\theta,\,p\sin\theta)$. 对 l 上任意一点 $P(x,y)$, 由 $\overrightarrow{NP}\perp\overrightarrow{n_0}$ 得

知乎@余命数

$$(x-p\cos\theta)\cos\theta+(y-p\sin\theta)\sin\theta=0,$$

利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 化简, 得

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0. \tag{3-32}$$

这就是直线的**法线式方程**. 它有两个特征一目了然. 一次项系数组成单位法向量 $(\cos\theta,\sin\theta)$; 常数项 $-p$ 的绝对值是原点到直线的距离.

一般式化为法线式, 只需把法向量单位化, 并调整整体符号使常数项为负.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

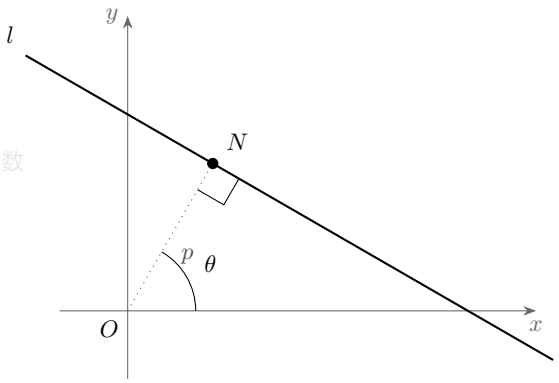


图 3.37 法线式中 p 为原点到直线的距离, θ 为法线的方向角

定理 3.28 (一般式化法线式) 设直线 $Ax+By+C=0$ 中 $C\neq 0$. 以**法线因子**

$$\lambda=-\frac{\operatorname{sgn}(C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

乘方程两端, 即得法线式. 先除以 $\sqrt{A^2+B^2}$, 再按 C 的相反符号调整整体符号, 使常数项等于 $-p<0$.

证明 除以 $\sqrt{A^2+B^2}$ 后, 一次项系数组成单位向量, 方程已具有 $x\cos\theta+y\sin\theta+$ 常数 $=0$ 的形状. 再乘以 ±1 使常数项为负, 即与 (3-32) 完全一致; 此时常数项 $=-|C|\big/\sqrt{A^2+B^2}$, 故 $p=|C|\big/\sqrt{A^2+B^2}>0$. □

法线式的直接回报是**有向距离**. 把点 $P_0(x_0,y_0)$ 代入法线式左端, 记

$$\delta(P_0)=x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-p.$$

$|\delta(P_0)|$ 即 P_0 到 l 的距离 (单位法向量投影的绝对值), 符号指示侧向. 原点处 $\delta(O)=-p<0$, 故 $\delta(P_0)<0$ 时 P_0 与原点同侧, $\delta(P_0)>0$ 时异侧. 一次式的值由此获得完整解释, 大小是距离, 符号是方向.

例题 3.185 把直线 $3x-4y+10=0$ 化为法线式, 求原点到该直线的距离, 并判断点 $Q(1,1)$ 与原点是否在该直线的同侧.

解 $\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, $C=10>0$, 法线因子为 $-\dfrac{1}{5}$. 法线式为

$$-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0.$$

读出 $p=2$ (原点到直线的距离), $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$, $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

代入 $Q(1,1)$, 得 $\delta(Q)=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}-2=-\dfrac{9}{5}<0$, 故 Q 与原点同侧(且 Q 到直线的距离为 $\dfrac{9}{5}$).

知乎@余命数

3.10.4 角平分线

两条相交直线 l_1,l_2 的角平分线, 是到两直线距离相等的点的轨迹. 设法线式分别为 $\delta_1(x,y)=0$ 与 $\delta_2(x,y)=0$, 则角平分线的方程为

$$|\delta_1|=|\delta_2| \iff \delta_1=\delta_2 \quad 或 \quad \delta_1=-\delta_2.$$

两条角平分线互相垂直. 问题是哪一条平分哪个角. 采用法线式 (常数项均为负) 时, 规则简明.

定理 3.29 (角平分线的符号规则) 设 l_1,l_2 均不经过原点, $\delta_1=0$, $\delta_2=0$ 为它们的法线式. 则

- $\delta_1=\delta_2$ 是原点所在的那个角(及其对顶角)的平分线;
- $\delta_1=-\delta_2$ 是其余两个角的平分线.

证明 原点处的有向距离 $\delta_1(O)=-p_1<0$, $\delta_2(O)=-p_2<0$. 原点所在的角内, 任一点 P 与 O 在 l_1 同侧且在 l_2 同侧, 由 定理 3.27, $\delta_1(P)<0$ 且 $\delta_2(P)<0$. 两个负数满足 $|\delta_1|=|\delta_2|$, 等价于 $\delta_1=\delta_2$.

知乎@余命数

在相邻的角内, P 与 O 关于一条直线同侧、关于另一条异侧, $\delta_1(P)$ 与 $\delta_2(P)$ 异号, $|\delta_1|=|\delta_2|$ 等价于 $\delta_1=-\delta_2$. □

例题 3.186 求直线 $3x-4y+1=0$ 与 $5x+12y-2=0$ 的两条角平分线, 并指出哪一条平分原点所在的角.

解 $\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, $\sqrt{5^2+12^2}=13$. 第一条直线常数项为正, 法线因子取 $-\dfrac{1}{5}$; 第二条常数项为负, 法线因子取 $+\dfrac{1}{13}$. 两条法线式分别为

$$\delta_1=\frac{-3x+4y-1}{5}=0, \qquad \delta_2=\frac{5x+12y-2}{13}=0.$$

角平分线由 $\delta_1=\pm\delta_2$ 给出.

(i) $\delta_1=\delta_2$: $13(-3x+4y-1)=5(5x+12y-2)$, 整理得

$$64x+8y-3=0;$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(ii) $\delta_1=-\delta_2$：$13(-3x+4y-1)=-5(5x+12y-2)$，整理得

$$14x-112y+23=0.$$

两条平分线的斜率分别为 -8 与 $\dfrac{1}{8}$，乘积为 -1，确实互相垂直. 按符号规则，$64x+8y-3=0$ 平分原点所在的角.

若只求两条角平分线而不需区分，可直接写

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

再去绝对值. 需要区分时，法线式的符号规则给出确定的答案. 这一技术在求三角形内心时还会用到 (第3.12节).

3.10.5 三线共点的线性组合判据

直线束 (第3.3节) 为三线共点提供了一种代数判据，免去先求交点再验证的迂回.

定理 3.30 (三线共点的线性组合判据) 设直线 $l_1:L_1=0$ 与 $l_2:L_2=0$ 相交. 若存在不全为零的实数 m,n，使

$$L_3=mL_1+nL_2$$

为恒等式，则直线 $l_3:L_3=0$ 经过 l_1 与 l_2 的交点.

证明 设 $P_0=l_1\cap l_2$，则 $L_1(P_0)=L_2(P_0)=0$，从而

$$L_3(P_0)=mL_1(P_0)+nL_2(P_0)=0,$$

即 $P_0\in l_3$. □

这正是曲线系原理在直线情形的复述.$mL_1+nL_2=0$ 是过 $l_1\cap l_2$ 的直线束. 要证三线共点，我们只需把其中一条写成另两条的线性组合，系数由比较 x 项、y 项与常数项解出，全程不解交点. 三角形三线共点问题（中线、高、角平分线）常可沿此路处理，见 第3.12节.

例题 3.187 求证：三直线 $x+y-2=0$、$2x-y+2=0$、$4x+y-2=0$ 共点.

解 设 $4x+y-2=m(x+y-2)+n(2x-y+2)$. 比较系数得方程组

$$m+2n=4,\qquad m-n=1,\qquad -2m+2n=-2.$$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由前两式解得 $m=2, n=1$；代入第三式，得 $-2\cdot 2+2\cdot 1=-2$，成立. 故第三条直线属于前两条所确定的直线束，三线共点.

注 3.12 (行列式观点)
三条直线 $A_ix+B_iy+C_i=0\ (i=1,2,3)$ 两两不平行时共点，等价于系数行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

把 $(x,y,1)$ 看作未知量，这是齐次线性方程组有非零解的条件；三阶行列式为零即给出共点判据. 齐次线性方程组与行列式的系统讨论见 第五卷第 22 章. 三点共线的行列式判据见 第3.4.5小节，两者互为对偶.

3.10.6 本节小结

- **平行与垂直**：平行保系数 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$；垂直换系数 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.
- **符号判定**：$L(P_1), L(P_2)$ 同号 $\iff$ 同侧，异号 $\iff$ 异侧；点在三角形内部 $\iff$ 三个同侧条件.
- **法线式**：$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$，一次项系数为单位法向量，$p$ 为原点到直线的距离；化法为除以 $\sqrt{A^2+B^2}$ 再按 C 的相反号调整. 代入点得有向距离，大小是距离，符号是侧向.
- **角平分线**：$\delta_1=\pm\delta_2$；取等号的一条平分原点所在的角.
- **三线共点**：$L_3=mL_1+nL_2$ 的线性组合判据，不解交点.

3.10.7 本节习题

3.55. 求过点 $(-1,2)$ 且与直线 $2x-3y+4=0$ (i) 平行；(ii) 垂直的直线方程.

3.56. 判断点 $(2,1)$ 与 $(-1,3)$ 在直线 $3x-y+2=0$ 的同侧还是异侧；两点中哪一个与原点同侧?

3.57. 把直线 $5x+12y-26=0$ 化为法线式，写出 p 与 $\cos\theta,\sin\theta$，并求点 $(3,2)$ 到该直线的有向距离.

3.58. 求直线 $x+y-2=0$ 与 $7x-y+4=0$ 的两条角平分线，并指出平分原点所在角的一条.

3.59. 用线性组合判据证明：三直线 $2x+y-3=0$、$x-y+3=0$、$x+2y-6=0$ 共点.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

3.60. 求点 $(a,0)$ 到直线 $3x+4y-12=0$ 的有向距离, 并确定 a 的范围, 使该点与原点位于直线同侧.

3.11 直线偶与齐次化

我们来看一次方程与二次方程在几何上的区别. 一次方程表示一条直线, 而能分解为两个一次因式乘积的二次方程则表示两条直线. 特别地, 二元二次**齐次**方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ 总表示过原点的两条直线, 或重合、或退缩为一点, 其斜率关系可以直接从系数读出. 把这一观察与设线法结合, 我们便得到处理过原点弦问题的齐次化技术. 它不求交点坐标, 一步就能读出 OP, OQ 两斜率的和与积.

3.11.1 表示两直线的二次方程

若一个二次方程的左端可以分解为两个一次因式, 则

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

的解集是两条直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的并集. 这样的图形称为**直线偶**, 它是一种退化的二次曲线 (第3.3节).

反过来, 给定一个一般的二元二次方程, 判断它是否表示直线偶并把两条直线找出来, 有一个实用的办法, 按其中一个字母整理成二次三项式. 若判别式恰为另一字母的完全平方, 则求根即得两个一次式.

例题 3.188 判断方程 $x^2-xy-2y^2+x+4y-2=0$ 是否表示两条直线; 若是, 求出这两条直线.

解 先把方程按 x 整理, 得 $x^2+(1-y)x+(-2y^2+4y-2)=0$. 判别式

知乎@余命数

$$\Delta=(1-y)^2-4(-2y^2+4y-2)=9y^2-18y+9=9(y-1)^2,$$

是完全平方. 求根:

$$x=\frac{(y-1)\pm 3(y-1)}{2} \implies x=2y-2 \text{ 或 } x=-y+1.$$

知乎@余命数

故原方程即 $(x-2y+2)(x+y-1)=0$, 表示直线 $x-2y+2=0$ 与 $x+y-1=0$.

知乎@余命数

注 3.13 (一般判据)
$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示直线偶(允许重合)的充分必要条件, 在线性代数中可用三阶行列式刻画, 见 第五卷第 22 章. 下文处理常见情形, 仍用整理成二次三项式、验证判别式为完全平方的直接分解办法.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.11.2 过原点的两直线

直线偶中结构最整齐的情形，是两条直线都经过原点. 此时方程不含一次项与常数项，成为二元二次**齐次方程**

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0. \tag{3-33}$$

齐次性的含义是，若 (x_0, y_0) 满足方程，则对任意 t，(tx_0, ty_0) 也满足，解集由过原点的直线组成. 设 $C \neq 0$，在 $x \neq 0$ 的点上令 $k = \dfrac{y}{x}$，方程两边除以 x^2 得

$$Ck^2 + Bk + A = 0.$$

两条直线的斜率 k_1, k_2 是这个二次方程的两根，由韦达定理：

$$k_1 + k_2 = -\frac{B}{C}, \quad k_1 k_2 = \frac{A}{C}. \tag{3-34}$$

判别式 $B^2 - 4AC$ 决定图形. 大于零为两条相交直线，等于零为两条重合直线，小于零则只剩原点一个实点. 由 (3-34) 可读出两条常用推论.

- **垂直条件**. $k_1 k_2 = -1 \iff A + C = 0$；
- **夹角公式**. 设两直线夹角为 φ，则

$$\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \frac{\sqrt{(k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2}}{|1 + k_1 k_2|} = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{|A + C|}.$$

例题 3.189 求两直线 $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ 的夹角，并判断它们是否垂直.

解 $A = 2、B = -5、C = 2. A + C = 4 \neq 0$，故两直线不垂直. $B^2 - 4AC = 25 - 16 = 9$，夹角满足

$$\tan\varphi = \frac{\sqrt{9}}{|2 + 2|} = \frac{3}{4}.$$

（分解验证. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = (2x - y)(x - 2y)$，斜率 2 与 $\dfrac{1}{2}$，$\tan\varphi = \left|\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2\cdot\frac{1}{2}}\right| = \dfrac{3}{4}$，一致.）

3.11.3 共渐近线的双曲线系

双曲线的渐近线 (第3.3.3小节) 正是直线偶的用武之地. 双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

的两条渐近线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, 合成一个齐次方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

右端的 1 换成 0, 双曲线退化为自己的渐近线偶. 更进一步, 对任意 $\lambda\neq 0$, 方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda \tag{3-35}$$

表示的双曲线都与原双曲线**共渐近线**(渐近方向只由二次项决定); $\lambda>0$ 时焦点在 x 轴一侧, $\lambda<0$ 时在 y 轴一侧, $\lambda=0$ 时退化为渐近线偶. 这是曲线系思想(第3.3节) 的又一成员. 一族曲线共享同一对渐近线, 只由一个参数区分.

知乎@余命数

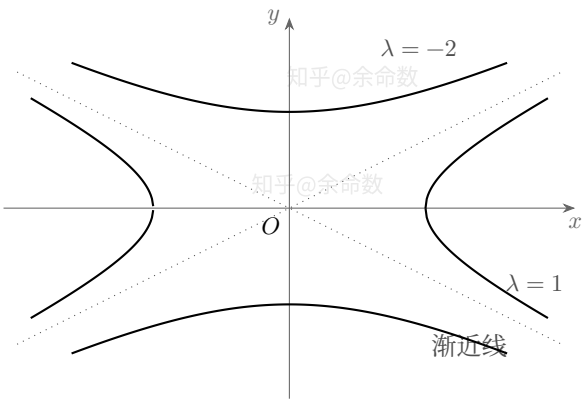


图 3.38 共渐近线的双曲线系 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=\lambda$: $\lambda=0$ 退化为渐近线偶

例题 3.190 求与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 共渐近线, 且经过点 $(2,\sqrt{3})$ 的双曲线方程.

解 设所求双曲线为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=\lambda$. 代入 $(2,\sqrt{3})$, 得

$$\frac{4}{4}-3=\lambda \implies \lambda=-2.$$

故所求方程为 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=-2$, 即 $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{8}=1$. 其渐近线 $y=\pm\dfrac{x}{2}$ 与原双曲线相同.

3.11.4 齐次化方法

现在把前面三个结论整合起来. 设直线 l 与二次曲线 Γ 交于 P,Q 两点, 我们关心原点与两交点连线的斜率 k_{OP},k_{OQ} 之间的关系(垂直、和为定值之类). 常规

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

路径是设线联立、韦达、再把斜率关系翻译回 k 与截距 (第3.7节–第3.9节). 齐次化提供一条更短的路径.

3.11.4.0.1 操作程序

1. 把直线 l 的方程写成 $mx+ny=1$ 的形状(这要求 l 不过原点;过原点的情形单独检验, 通常意味着 P 或 Q 与 O 重合而退化);
2. 在曲线 Γ 的方程中, 把常数项与一次项用 $1=mx+ny$ 配齐, 使方程成为关于 x,y 的二次齐次方程;
3. 该齐次方程恰表示 OP,OQ 两直线(它们过原点, 且与 l 的交点即 P,Q), 用 (3-34) 直接读出 $k_{OP}+k_{OQ}$ 与 $k_{OP}\cdot k_{OQ}$.

齐次化后的方程由 Γ 的方程与 l 的方程组合而成, 故 P,Q 的坐标都满足它; 它又是齐二次的, 解集由过原点的直线组成. 这两件事实合在一起, 它表示的正是直线 OP 与 OQ.

例题 3.191 ($OP\perp OQ$ 的弦过定点) 抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 上两点 A,B 满足 $OA\perp OB$. 求证:直线 AB 过定点.

解 直线 AB 不过原点(否则 A 或 B 与 O 重合, 与 $OA\perp OB$ 矛盾), 设其方程为 $mx+ny=1$. 用 $1=mx+ny$ 配齐抛物线方程, 得

$$y^2=2px\cdot(mx+ny)\implies 2pm\,x^2+2pn\,xy-y^2=0.$$

这是 OA,OB 两直线的合成方程.$OA\perp OB\iff A+C=0$, 即

$$2pm-1=0\implies m=\frac{1}{2p}.$$

代回直线方程, 得 $\dfrac{x}{2p}+ny=1$, 对任意 n, 它经过点 $(2p,0)$. 故 AB 过定点 $(2p,0)$.

将这里的计算量与设线法路线对比. 那边要联立 $y=kx+b$ 与抛物线、写出两根和积、翻译 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$、再解出 b 与 k 的关系; 这边一次配齐、一次读出, 条件 $OA\perp OB$ 直接化为 m 的方程. 齐次化把原点与两交点这一结构利用到了极限.

例题 3.192 (垂直弦的弦心距为定值) 直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 M,N 两点, 且 $OM\perp ON$. 求证:原点 O 到直线 l 的距离为定值.

解 设 $l:mx+ny=1$(l 不过原点, 理由同上). 配齐椭圆方程, 得

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=(mx+ny)^2\implies\Big(\frac{1}{6}-m^2\Big)x^2-2mn\,xy+\Big(\frac{1}{3}-n^2\Big)y^2=0.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

它表示 OM, ON 两直线.$OM \perp ON \iff A + C = 0$, 即

$$\frac{1}{6} - m^2 + \frac{1}{3} - n^2 = 0 \implies m^2 + n^2 = \frac{1}{2}.$$

原点到 l 的距离

$$d = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \sqrt{2},$$

是与 l 的选取无关的定值.

注 3.14 (何时想到齐次化)
题面信号是原点与两交点同时在场. 条件或目标围绕 OP, OQ 的斜率关系(垂直、和/积为定值、角平分线过 y 轴之类)展开. 若定点不在原点, 可以先平移坐标系把它移到原点, 再齐次化. 若目标是弦长、中点一类与原点无关的量, 齐次化使不上力, 回到设点法或设线法.

3.11.5 本节小结

知乎@余命数

- **直线偶**. 二次方程分解为两一次因式 $\iff$ 表示两直线; 判别程序是按一元整理, 判别式须为完全平方.
- **齐次方程**.$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ 表示过原点两直线, $k_1 + k_2 = -B/C$, $k_1 k_2 = A/C$; 垂直 $\iff A + C = 0$, 夹角 $\tan\varphi = \sqrt{B^2 - 4AC}\,/|A + C|$.
- **共渐近线系**.$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \lambda$, $\lambda = 0$ 即渐近线偶.
- **齐次化**. 直线写成 $mx + ny = 1$, 用 1 配齐曲线方程, 一步读出 OP, OQ 的斜率关系; 条件是直线不过原点.

3.11.6 本节习题

3.61. 判断 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 表示什么图形; 若为过原点的两直线, 求其夹角.

3.62. 把 $x^2 - xy - 2y^2 + x + 4y - 2 = 0$ 分解为两个一次因式, 并求两直线的交点.

3.63. 求与双曲线 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ 共渐近线且经过点 $(6, 2)$ 的双曲线方程.

3.64. 证明: 方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ 表示的两直线互相垂直, 当且仅当 $A + C = 0$; 并写出它们重合时系数应满足的条件.

3.65. 抛物线 $y^2 = 2x$ 上两点 A, B 满足 $OA \perp OB$. 用齐次化证明 AB 过定点, 并写出该定点坐标.

3.66. 直线 $y = -x + b$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$. 求 b 的值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.12 三角形的心

三角形的重心、外心、垂心、内心, 在综合几何中各有定义、各成体系. 坐标法把它们统一到一条主线上. 我们将会看到, 四心的坐标都是顶点坐标的简单代数组合, 四心之间的关系, 例如欧拉线也可以由直接计算证明.

3.12.1 平行四边形的顶点

知乎@余命数

平行四边形最有用的代数特征, 是对角线互相平分. 用位置向量写, 平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 有共同的中点, 因此

$$\frac{A+C}{2}=\frac{B+D}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad A+C=B+D.$$

于是已知三个顶点求第四个的问题, 化为一次移项.

例题 3.193 已知 $A(1,2)$、$B(4,1)$、$C(2,5)$. 求使四点成为平行四边形顶点的点 D.

解 题目没有指定顶点的顺序, 我们按 D 与谁相对分三种情形.

- D 与 B 相对, 则 $D=A+C-B=(1+2-4,\,2+5-1)=(-1,6)$;
- D 与 C 相对, 则 $D=A+B-C=(1+4-2,\,2+1-5)=(3,-2)$;
- D 与 A 相对, 则 $D=B+C-A=(4+2-1,\,1+5-2)=(5,4)$.

三个解对应三种不同的平行四边形, 都满足条件.

分类讨论在这里是硬要求. 只写一种情形, 答案就不完整. 同一个中点重合的观点, 在 第1.2节 的定比分点问题中还会反复出现.

3.12.2 重心

三条中线交于一点, 这一点是重心. 用坐标证明, 只需写出一条中线上 $\dfrac{2}{3}$ 处的点, 再看它的对称性.

定理 3.31 (重心坐标公式) 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心为

$$G=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\,\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\Big),$$

用位置向量写即 $G=\dfrac{A+B+C}{3}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 边 BC 的中点为 $M=\dfrac{B+C}{2}$. 重心在中线 AM 上, 且 $AG:GM=2:1$, 由定比分点公式 (第1.2节), 得

$$G=\frac{A+2M}{3}=\frac{A+B+C}{3}.$$

所得坐标关于 A,B,C 对称, 故它也在另外两条中线上, 即三条中线共点于 G. □

对称性在这里承担了全部证明工作. 我们只求一条中线上的分点, 得到的表达式关于三顶点对称, 三条中线自然汇于同一点. 重心的进一步性质, 例如奔驰定理中重心对应的面积比 $1:1:1$ 见 第1.2节.

3.12.3 外心

三边中垂线交于一点, 即外接圆的圆心, 称为**外心**. 坐标求法有一个简化. 设外心 $O=(x,y)$, 由 $|OA|^2=|OB|^2$, 展开后二次项 x^2+y^2 两边相消, 剩下的是 x,y 的一**次**方程, 这正是 AB 中垂线的方程. 两个这样的方程联立, 即得外心.

例题 3.194 求 $A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(1,3)$ 的外接圆圆心与半径.

解 设 $O=(x,y)$. 由 $|OA|^2=|OB|^2$, 得

$$x^2+y^2=(x-4)^2+y^2 \implies 8x=16 \implies x=2.$$

由 $|OA|^2=|OC|^2$, 得

$$x^2+y^2=(x-1)^2+(y-3)^2 \implies 2x+6y=10.$$

代入 $x=2$ 得 $y=1$, 故 $O=(2,1)$, 半径 $R=\sqrt{|OA|^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

方程 $2x+6y=10$ 即 AC 的中垂线 (过中点 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 且法向量为 $\overrightarrow{AC}=(1,3)$), 与几何定义完全吻合.

3.12.4 垂心

三条高交于一点, 称为**垂心**. 求垂心, 写两条高的方程联立即可, 第三条高自动通过交点, 这个事实本身需要证明, 借助外心可直接完成.

定理 3.32 (垂心的向量表示) 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O. 以 O 为原点取位置向量, 则垂心

$$H=A+B+C.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 以 O 为原点, 有 $|A|=|B|=|C|=R$. 令 $H'=A+B+C$, 我们来验证 $AH'\perp BC$.

$$\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC}=(H'-A)\cdot(C-B)=(B+C)\cdot(C-B)=|C|^2-|B|^2=0.$$

同理 $BH'\perp CA, CH'\perp AB$. 故 H' 在三条高上, 即 $H'=H$. □

数量积 $(B+C)\cdot(C-B)=|C|^2-|B|^2$ 一步归零, 外心到三顶点等距的条件用完了全部所需. 这个关系式还给出一条重要推论, 见下一小节.

例题 3.195 求 $A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(1,3)$ 的垂心.

解 边 BC 的斜率为 $\dfrac{3-0}{1-4}=-1$, 故从 A 引出的高斜率为 1, 方程为 $y=x$.

边 AC 的斜率为 3, 故从 B 引出的高斜率为 $-\dfrac{1}{3}$, 方程为 $y=-\dfrac{1}{3}(x-4)$, 即 $x+3y=4$.

联立 $y=x$ 与 $x+3y=4$, 得 $H=(1,1)$. 我们验证, 从 C 引出的高垂直于水平的 AB, 方程为 $x=1$, 确实过 H.

3.12.5 内心

三条角平分线交于一点, 即内切圆的圆心, 称为**内心**. 内心的坐标公式以三边长为权.

定理 3.33 (内心坐标公式) 设 $\triangle ABC$ 中 $a=|BC|$、$b=|CA|$、$c=|AB|$, 则内心

$$I=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}.$$

证明 由角平分线定理, $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D, 且 $BD:DC=c:b$, 故

$$D=\frac{bB+cC}{b+c}.$$

又 $AI:ID=(b+c):a$(在 $\triangle ABD$ 中对 BI 再用一次角平分线定理), 于是

$$I=\frac{aA+(b+c)D}{a+b+c}=\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}.$$

表达式对三顶点对称, 各顶点乘以对边长, 故三条角平分线共点于 I. □

权重 a,b,c 恰为对边长度, 与奔驰定理中内心对应的面积比 $a:b:c$ 一致 (第1.2节). 若只求角平分线的方程而不求交点, 第3.10.4小节 的符号规则可以直接取用.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.196 求 $A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(0,3)$ 的内心与内切圆半径.

解 三边长 $a=|BC|=5$、$b=|CA|=3$、$c=|AB|=4$, 故

$$I=\frac{5(0,0)+3(4,0)+4(0,3)}{5+3+4}=\left(\frac{12}{12},\frac{12}{12}\right)=(1,1).$$

内切圆半径 r 等于 I 到 x 轴(边 AB)的距离, 即 $r=1$. 另作验证, 面积 $\frac{3\cdot 4}{2}=6$, 半周长 6, $r=\frac{6}{6}=1$, 一致.

3.12.6 欧拉线

外心、重心、垂心, 三个由不同定义给出的点, 竟永远共线. 这是初等几何中最著名的定理之一, 用坐标法证明几乎只有一行.

定理 3.34 (欧拉线) 设 $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心分别为 O,G,H, 则 O,G,H 共线, 且

$$\overrightarrow{GH}=2\overrightarrow{OG}.$$

这条直线称为三角形的**欧拉线**.

证明 取 O 为原点. 由垂心的向量表示, $H=A+B+C$; 由重心公式, $G=\frac{A+B+C}{3}$. 故

$$H=3G,$$

即 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$, 三点共线, 且 G 在线段 OH 上, $OG:GH=1:2$. □

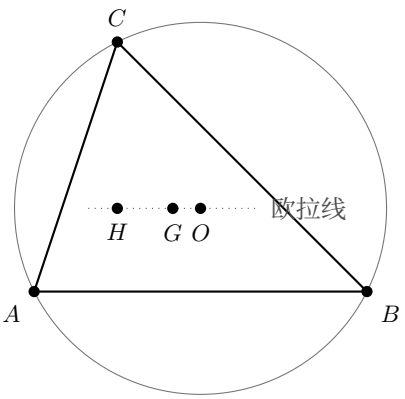


图 3.39 欧拉线: $A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(1,3)$ 的外心 $O(2,1)$、重心 $G(\frac{5}{3},1)$、垂心 $H(1,1)$ 共线

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

注 3.15 (九点圆)
欧拉线上还有一位成员. 三边中点、三高垂足、三顶点到垂心连线的中点, 九点共圆, 圆心 N 恰为 OH 的中点, 半径为外接圆半径的一半. 以外心为原点, $N=\dfrac{H}{2}=\dfrac{A+B+C}{2}$, 验证各点到 N 的距离都等于 $\dfrac{R}{2}$, 同样是直接的向量计算.

3.12.7 本节小结

- **平行四边形**.$A+C=B+D$; 第四顶点三种情形, 不可遗漏.
- **重心**.$G=\dfrac{A+B+C}{3}$; 对称性保证三线共点.
- **外心**. 距离平方相等 $\to$ 一次方程(中垂线), 两式联立.
- **垂心**. 两条高联立; 以外心为原点时 $H=A+B+C$.
- **内心**.$I=\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}$, 权重为对边长.
- **欧拉线**.O,G,H 共线, $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$; 九点圆圆心为 OH 中点.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

3.12.8 本节习题

3.67. 已知三点 $(0,0)$、$(2,1)$、$(1,3)$, 求使四点构成平行四边形的第四顶点(写出全部情形).

3.68. 求 $A(1,1)$、$B(5,1)$、$C(2,4)$ 的外接圆圆心与半径.

3.69. 求上题三角形的垂心, 并验证三条高确实共点.

3.70. 求 $A(0,0)$、$B(3,0)$、$C(0,4)$ 的内心与内切圆半径.

3.71. 设三角形的外心为 $O(2,1)$, 重心为 $G(\frac{5}{3},1)$, 求垂心 H 的坐标.

3.72. 证明: 对任意三角形, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, 其中 O 为外心, H 为垂心; 并说明该式与欧拉线的关系.

3.13 共圆点与共轴圆

圆的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 含三个待定系数, 故三个条件确定一个圆. 但处理圆的问题时, 求出方程往往不是最经济的路径. 四点共圆的判定、两圆的公共弦与根轴、三圆的根心与共轴圆系, 这些问题共同的代数基础只有一条. **两个圆方程相减, 二次项消去, 剩下一个一次式**. 本节的讨论都围绕这个一次式展开.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

3.13.1 直径式方程与四点共圆

以 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 为直径两端点的圆, 方程可以直接写出.

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0. \tag{3-36}$$

左端展开即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ ($P=(x,y)$), 由 Thales 定理 (第3.1节), 点 P 在该圆上当且仅当 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$. 直径式把直径所对圆周角为直角这一定理翻译成了方程.

一般地, 判定四点共圆, 我们采用标准代数程序. 圆的一般方程关于系数 D,E,F 是**线性**的, 代入三个点的坐标得三元一次方程组, 解出圆方程, 再把第四点代入检验.

例题 3.197 求证:四点 $A(-1,0)$、$B(1,0)$、$C(0,2)$、$D(0,-\frac{1}{2})$ 共圆.

解 设过 A,B,C 的圆为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 代入三点, 得

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

$$1-D+F=0,\qquad 1+D+F=0,\qquad 4+2E+F=0.$$

由前两式得 $D=0$, $F=-1$;代入第三式得 $E=-\frac{3}{2}$. 圆方程为

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}y-1=0.$$

代入 $D(0,-\frac{1}{2})$, 得 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-1=0$, 成立. 故四点共圆.

注 3.16 (几何知识先行)
上题若先观察, AB 与 CD 都过原点, 且 $|OA|\cdot|OB|=1=|OC|\cdot|OD|$(取有向长度时两侧符号相反), 由相交弦定理的逆定理立得四点共圆, 一个方程都不用解. 代数程序是可靠的底线, 几何观察则经常一步到位, 两者的配合见 第3.15节.

3.13.2 公共弦与根轴

设两圆方程中二次项系数都已化为 1, 得

知乎@余命数

$$S_1=x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,\qquad S_2=x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

两式相减, 得一次式

$$L(x,y)=(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0. \tag{3-37}$$

两圆相交时, 两个交点的坐标同时满足 $S_1=0$ 与 $S_2=0$, 故满足 $L=0$. 直线 (3-37) 就是**公共弦所在直线**. 两圆相切时, 它是过切点的公切线. 这条直线还有一个名字.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.35 (根轴) 设两圆不同心(此时 D_1-D_2 与 E_1-E_2 不同时为零). 直线 (3-37) 是对两圆**幂相等**的点的轨迹, 称为两圆的**根轴**.

证明 点 $P(x_0,y_0)$ 对圆 $S_i=0$ 的幂, 等于把 P 的坐标代入左端所得的值 $S_i(P)$ (第3.1节). 于是

$$S_1(P)=S_2(P)\iff S_1(P)-S_2(P)=0\iff L(P)=0,$$

即 P 在直线 (3-37) 上. □

根轴与连心线垂直.(3-37) 的法向量为 (D_1-D_2,E_1-E_2), 而两圆心为 $(-\frac{D_i}{2},-\frac{E_i}{2})$, 连心方向 $(\frac{D_2-D_1}{2},\frac{E_2-E_1}{2})$ 恰与之平行. 即使两圆不相交, 根轴依然存在, 幂相等的定义不依赖交点.

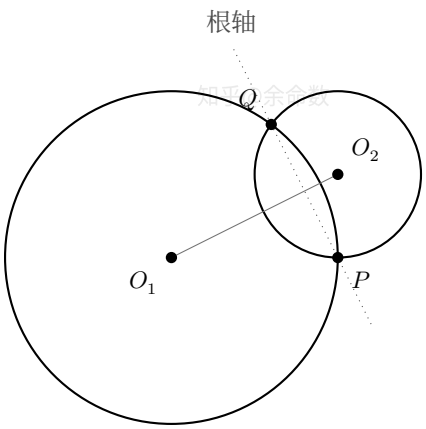


图 3.40　两圆的公共弦 PQ 所在直线即根轴, 与连心线 O_1O_2 垂直

例题 3.198 求圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 的公共弦所在直线方程及弦长.

解 两式相减, 得 $4x+2y-8=0$, 即

$$2x+y-4=0.$$

第一个圆圆心 $O_1(0,0)$, 半径 $R=2$; 圆心到该直线的距离

$$d=\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}<2,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故两圆确实相交. 由弦长公式 (第3.1节), 得

$$\text{弦长} = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

整个过程中没有求出任何一个交点坐标, 这是两式相减的价值.

3.13.3 根心

三个圆两两各有一条根轴, 共三条. 它们的位置关系, 用 第3.10.5小节 的线性组合判据一眼看穿.

定理 3.36 (根心定理) 三个圆 (圆心不共线) 两两之间的三条根轴交于一点, 称为三圆的**根心**. 根心对三个圆的幂相等.

证明 设三圆为 $S_1 = 0$、$S_2 = 0$、$S_3 = 0$. 三条根轴分别为

$$L_{12} = S_1 - S_2 = 0, \qquad L_{23} = S_2 - S_3 = 0, \qquad L_{13} = S_1 - S_3 = 0.$$

恒等式 $L_{13} = L_{12} + L_{23}$ 表明 L_{13} 是 L_{12} 与 L_{23} 的线性组合, 故 L_{13} 过前两者的交点 P. P 处 $S_1(P) = S_2(P) = S_3(P)$, 即根心对三圆等幂. □

根心定理常用于证明三线共点. 若三条线可看作某三个圆的根轴, 定理直接给出结论.

例题 3.199 求三圆 $x^2+y^2 = 4$、$x^2+y^2-4x-2y+4 = 0$、$x^2+y^2+2x-6y+6 = 0$ 的根心.

解 三条根轴为

$$L_{12}: 4x + 2y - 8 = 0, \quad L_{23}: -6x + 4y - 2 = 0, \quad L_{13}: -2x + 6y - 10 = 0.$$

联立 L_{12} 与 L_{23}, 即 $2x+y = 4$ 与 $3x-2y = -1$. 由 $y = 4-2x$ 代入得 $3x-8+4x = -1$、$x = 1$、$y = 2$. 代入 L_{13} 验证, 得 $-2 + 12 - 10 = 0$, 成立. 根心为 $(1, 2)$.

3.13.4 共轴圆系

过两圆交点的圆系 $S_1 + \lambda S_2 = 0$, 第3.3节 已给出. 从根轴的观点看, 这个圆系有更清楚的结构. 对任意 λ (除去使二次项消去的 $\lambda = -1$), 圆 $S_1 + \lambda S_2 = 0$ 与 $S_1 = 0$ 的根轴仍是

$$S_1 - \frac{S_1 + \lambda S_2}{1 + \lambda} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}(S_1 - S_2) = 0 \text{ 化简后与 } L = 0 \text{ 一致,}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

即圆系中每个成员都共享同一条根轴. 共享同一根轴的圆的全体, 称为**共轴圆系**. 用根轴 $L=0$ 直接写, 共轴圆系取更灵活的形式

$$S+\lambda L=0,$$

其中 $S=0$ 是系中任一已确定的圆. 系中还有两位退化成员. 根轴 $L=0$ 自身, 即 $\lambda\to\infty$ 的极限, 以及半径为零的**点圆**, 即系中半径最小的位置, 称为极限点. 它们都在其中. 至于同心圆, 圆心相同而半径各异, 可看作根轴退到无穷远处的极端情形.

例题 3.200　求过两圆 $x^2+y^2=4$ 与 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 的交点, 且经过点 $(0,1)$ 的圆.

解　设所求圆属于共轴圆系 $S_1+\lambda S_2=0$.

$$(x^2+y^2-4)+\lambda(x^2+y^2-4x-2y+4)=0.$$

代入 $(0,1)$, 得 $(1-4)+\lambda(1-2+4)=0$, 即 $-3+3\lambda=0$, $\lambda=1$. 所求圆为

$$2x^2+2y^2-4x-2y=0\quad\text{即}\quad x^2+y^2-2x-y=0.$$

(验证. 两圆交点满足 $S_1=S_2=0$, 故满足组合方程; $(0,1)$ 代入 $1-1=0$, 成立.)

注 3.17 (正交圆族)
与共轴圆系中每个圆都正交(交点处切线垂直)的圆, 恰好也组成一个共轴圆系, 其根轴是原系的连心线. 一族过两定点, 一族成极限点, 两族互相正交, 这是静电场中电场线与等势线的几何原型.

3.13.5 本节小结

- **直径式**.$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$, 即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.
- **四点共圆**. 三点定圆(关于 D,E,F 线性), 第四点代入; 或先用圆幂观察.
- **根轴**.$S_1-S_2=0$, 幂相等点的轨迹, 垂直于连心线; 相交时即公共弦所在直线, 相切时即公切线.
- **根心**. 三圆的三条根轴共点, $L_{13}=L_{12}+L_{23}$.
- **共轴圆系**.$S+\lambda L=0$, 共享根轴; 退化成员为根轴与点圆.

3.13.6 本节习题

3.73.　写出以 $(1,2),(3,-2)$ 为直径两端点的圆的方程, 并化为标准形式.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.74. 判断四点 $A(1,1)$、$B(3,1)$、$C(3,3)$、$D(1,3)$ 是否共圆；若共圆，求该圆方程.

3.75. 求两圆 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 与 $x^2+y^2+4x-1=0$ 的根轴，并验证它与连心线垂直.

3.76. 证明：两圆 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的根轴垂直于连心线.

知乎@余命数

3.77. 验证本节例题中三圆的三条根轴满足 $L_{13}=L_{12}+L_{23}$，并求根心对三圆的幂.

知乎@余命数

3.78. 求过两圆 $x^2+y^2=4$ 与 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 的交点，且半径最小的圆（提示：以公共弦为直径）.

知乎@余命数

3.14 轨迹方程

知乎@余命数

轨迹问题是解析几何的逆问题. 已知动点满足的几何条件，我们求它所描绘的曲线. 前面各节已零星见过它（第1.2节 的等和线，第3.6.1小节 的向量条件求轨迹），本节把相关方法整理清楚. 求轨迹的基本功是两步. **把几何条件翻译为坐标方程**，以及**检验所得方程不多不少恰好是轨迹**. 第一步有直接法、定义法、相关点法、交轨法、参数法五种常见路径；第二步是纯粹性与完备性的讨论，也最容易被忽略.

知乎@余命数

3.14.1 直接法

知乎@余命数

条件本身已经以距离、斜率、数量积等可以直接翻译的形式给出时，我们设动点 $M(x,y)$，把条件写成方程，化简即得. 这是轨迹问题的基准方法.

例题 3.201 动点 M 到两定点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$ 的距离的平方和等于 10. 求 M 的轨迹方程，并说明图形.

解 设 $M(x,y)$. 条件即

知乎@余命数

$$(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=10.$$

展开，得 $2x^2+2y^2+2=10$，即

知乎@余命数

$$x^2+y^2=4.$$

轨迹是以原点为圆心、半径 2 的圆.（一次项 $\pm 2x$ 相互抵消，这正是对称建系的收益.）

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.14.2 定义法

有时条件翻译到一半，我们会认出它正是某条圆锥曲线的定义. 到两定点距离之和为常数 ($>|F_1F_2|$) 是椭圆, 距离之差的绝对值为常数 ($<|F_1F_2|$) 是双曲线, 到定点与定直线距离相等是抛物线, 到定点距离为常数是圆. 认出定义, 方程的标准形直接写出, 剩下的只是定系数.

例题 3.202　动圆经过点 $F(2,0)$, 且与 y 轴相切. 求圆心 M 的轨迹方程.

解 设 $M(x,y)$. 动圆过 F, 半径为 $|MF|$; 动圆与 y 轴相切, 半径等于 M 到 y 轴的距离 $|x|$. 故

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x|,$$

两边平方, 得 $(x-2)^2+y^2=x^2$, 化简得

$$y^2=4(x-1).$$

轨迹是抛物线，顶点 $(1,0)$，开口向右. 其实题目条件正是抛物线的定义. 焦点 $F(2,0)$, 准线即 y 轴, 定义法认出这一点, 方程法算出的结果与之互相印证.

定义法的要点是**先识别, 后计算**. 条件中出现距离之和、距离之差、等距一类字眼时, 我们先想定义, 再动笔平方.

3.14.3 相关点法

动点 M 由另一主动点 P 带动, 而 P 在已知曲线上运动. 此时把 M 与 P 的坐标关系写出, 反解 P 的坐标用 M 的表示, 代入 P 的曲线方程, 即得 M 的轨迹. 此法也叫**转移法**或**代入法**, 第3.6.1小节 已给出向量形式的操作骨架, 这里看一个对称点式的例子.

例题 3.203　点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上运动, $A(2,0)$ 为定点, M 是 A 关于 P 的对称点. 求 M 的轨迹方程.

解 设 $M(x,y)$, $P(x_0,y_0)$. P 是 AM 的中点, 因此

$$x_0=\frac{x+2}{2},\qquad y_0=\frac{y}{2}.$$

由 $x_0^2+y_0^2=1$ 得

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1\implies(x+2)^2+y^2=4.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

轨迹是以 $(-2,0)$ 为圆心、半径 2 的圆（原圆在以 A 为中心、比例为 2 的位似下的像）.

3.14.4 交轨法

动点 M 是两条动直线的交点，两条直线各含同一个参数 t. 把两直线方程联立，消去 t，即得 M 的轨迹方程. 消参的手法因题而异. 解出 t 代入，或两式相乘、相除、平方相加，把 t 整体消去.

例题 3.204 设 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，动点 P 满足直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{4}$. 求 P 的轨迹方程.

解 设 $P(x,y)$，两条动直线即 PA 与 PB. 斜率条件给出

$$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{4}\quad(x\neq\pm2).$$

整理，得 $4y^2=-(x^2-4)$，即

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1\quad(x\neq\pm2).$$

轨迹是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，但要去掉 $(\pm2,0)$ 两点（该处斜率不存在，条件无意义）.

斜率之积为常数的条件正是椭圆与双曲线的第三定义. 常数为负得椭圆（去掉两顶点），常数为正得双曲线. 交轨法把这个几何事实直接算了出来. 当两动直线来自曲线系时，交轨法与 第3.3节 的曲线系原理相接. 交点满足 $f+\lambda g=0$，消去 λ 即轨迹.

3.14.5 参数法

为动点引进参数（角、斜率、时间），把 x,y 分别写成参数的函数，再消去参数. 参数选得贴合运动方式，消参就只是恒等变形.

例题 3.205 点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，M 是 P 到 x 轴的垂线段 PQ 的中点. 求 M 的轨迹方程.

解 设 $P=(2\cos\theta,\,2\sin\theta)$，则 $Q=(2\cos\theta,\,0)$，中点

$$M=(2\cos\theta,\,\sin\theta).$$

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

记 $M=(x,y)$, 由 $\cos\theta=\dfrac{x}{2}$, $\sin\theta=y$ 及 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, 得

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

圆沿竖直方向压缩为一半, 得到椭圆.

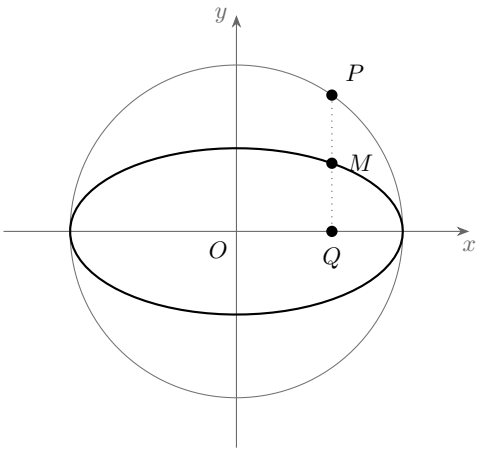


图 3.41　圆 $x^2+y^2=4$ 纵向压缩为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

3.14.6 纯粹性与完备性

求出方程, 工作只做了一半. 我们还必须回答两个问题.

- **纯粹性**. 检查方程的曲线上每一点是否都满足原条件, 推导中的平方、约分、斜率存在的假设, 都可能引入不满足条件的点, 要挖去;
- **完备性**. 检查满足条件的点是否都在求出的曲线上, 分类讨论中遗漏的情形(斜率不存在、绝对值脱号、参数取不到), 都可能丢失整段轨迹, 要补回.

例题 3.206 (斜率假设带来的挖点) 设 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, 动点 M 满足 $MA\perp MB$. 求 M 的轨迹.

解 设 $M(x,y)$. 若两斜率都存在, 条件为

$$\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=-1\implies x^2+y^2=1.$$

检验纯粹性. 点 $(\pm1,0)$ 满足方程, 但此时 MA 或 MB 的斜率不存在, M 与 A 或 B 重合, 谈不上垂直, 应挖去. 完备性上, M 与 A,B 重合以外的情形已被斜率写法覆盖(若 M 使 MA 竖直, 则 M 横坐标为 -1, 代入圆方程得 $M=(-1,0)=A$, 已排除).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故轨迹为圆 $x^2+y^2=1$ 去掉 $(\pm1,0)$ 两点.(这正是 Thales 定理的逆命题, 对照第3.1节 与 第3.13.1小节 的直径式. 直接用 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 写, 得到同一方程, 挖点讨论相同.)

例题 3.207 (绝对值脱号带来的补段) 动点 M 到两坐标轴的距离之和等于 2. 求 M 的轨迹.

解 设 $M(x,y)$, 条件为 $|x|+|y|=2$. 分象限脱去绝对值, 得

$$\begin{cases} x+y=2, & x\geq 0,\ y\geq 0,\\ -x+y=2, & x<0,\ y\geq 0,\\ -x-y=2, & x<0,\ y<0,\\ x-y=2, & x\geq 0,\ y<0. \end{cases}$$

轨迹是顶点为 $(\pm2,0),(0,\pm2)$ 的正方形边界. 若只写 $x+y=2$, 则丢了三段, 完备性不成立.

方程求出之后, 我们还应对着条件再走一遍, 条件里的每个限制(分母、绝对值、存在性)都应在轨迹上留下相应的刻痕.

3.14.7 轨迹方程例题

求轨迹方程的方法: 直接法、定义法、相关点法、交轨法、参数法、点差法, 以及结合向量、复数、立体几何等工具的轨迹问题.

例题 3.208 (直接法) 已知 M、N 两点坐标分别 $(-2,0),(2,0)$. 直线 MK、NK 相交于点 K, 且它们的斜率之和是 3, 则点 K 的轨迹方程为(　)

A. $3x^2-2xy-12=0(x\neq\pm2)$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$

B. $3y^2-2yx-12=0(x\neq\pm2)$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1(x\neq\pm2)$

解 答案: A. 设 $K(x,y)$, 则直线 KM 的斜率为 $k_{KM}=\frac{y}{x+2}$, 直线 KN 的斜率为 $k_{KN}=\frac{y}{x-2}$, 依据题意可知, $k_{KM}+k_{KN}=\frac{y}{x+2}+\frac{y}{x-2}=3$, 化简得: $3x^2-2xy-12=0$, 因为直线 KM、KN 的斜率存在, 所以 $x\neq\pm2$, 所以 $3x^2-2xy-12=0(x\neq\pm2)$, 故选: A.

例题 3.209 (定义法) (2024·浙江温州·一模)动点 $M(x,y)$ 到定点 $F(-4,0)$ 的距离与 M 到定直线 $l:x=-\frac{25}{4}$ 的距离的比等于 $\frac{4}{5}$, 则动点 M 的轨迹方程是(　)

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　　C. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$　　D. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$

解 答案：A. 根据题意可得 $\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{|x+\frac{25}{4}|}=\frac{4}{5}$，平方化简可得 $9x^2+25y^2=25\times 9$，进而得 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，故选：A.

例题 3.210 (相关点法) 设过点 $P(x,y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A、B 两点，点 Q 与点 P 关于 y 轴对称，O 为坐标原点. 若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，则点 P 的轨迹方程是__.

解 答案：$\frac{3}{2}x^2+3y^2=1\ (x>0,y>0)$. 设点 $P(x,y)$，则 $Q(-x,y)$，设 $A(a,0)$，$B(0,b)$，则 $a>0,b>0$，$\therefore\overrightarrow{BP}=(x,y-b)$，$\overrightarrow{PA}=(a-x,-y)$，$\because\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，$\therefore a=\frac{3}{2}x,b=3y$，$\therefore x>0,y>0$，又 $\because\overrightarrow{AB}=(-a,b)=\left(-\frac{3}{2}x,3y\right)$、$\overrightarrow{OQ}=(-x,y)$、$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，$\therefore\left(-\frac{3}{2}x\right)\cdot(-x)+3y\cdot y=1$，即 $\frac{3}{2}x^2+3y^2=1\ (x>0,y>0)$. 故答案为：$\frac{3}{2}x^2+3y^2=1\ (x>0,y>0)$.

例题 3.211 (交轨法) 已知 A,B 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点，点 M，N 为椭圆上的两个动点，满足线段 MN 与 x 轴垂直，则直线 MA 与 NB 交点的轨迹方程为__.

解 答案：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. 因为 A，B 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点，所以 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，设 MA 与 NB 的交点为 P、$P(x,y)$、$M(x_1,y_1)$、$N(x_1,-y_1)$，由 $k_{PA}=k_{MA},k_{PB}=k_{NB}$，得 $\frac{y}{x+2}=\frac{y_1}{x_1+2},\frac{y}{x-2}=\frac{-y_1}{x_1-2}$，

例题 3.212 (参数法) 方程 $x^2+y^2-4tx-2ty+3t^2-4=0$，其中 t 为参数，所表示的圆的圆心轨迹方程是(结果化为普通方程)

解 答案：$x-2y=0$. 圆 $x^2+y^2-4tx-2ty+3t^2-4=0$ 化为 $(x-2t)^2+(y-t)^2=2t^2+4$，它表示以 $(2t,t)$ 为圆心，$\sqrt{2t^2+4}$ 为半径的圆，设圆心坐标为 (x,y)，于是得 $\begin{cases}x=2t\\y=t\end{cases}$（$t$ 为参数），消去 t 得：$x-2y=0$，所以所求圆心轨迹方程是 $x-2y=0$.

例题 3.213 (点差法) 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，一组平行直线的斜率是 $\frac{3}{2}$，当它们与椭圆相交时，这些直线被椭圆截得的线段的中点轨迹方程是__.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

解 答案:$y=-\frac{3}{2}x\left(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right)$. 设这组平行直线的方程为 $y=\frac{3}{2}x+m$,联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\end{cases}$,整理得 $18x^2+12mx+4m^2-36=0$,由 $\Delta=144(18-m^2)>0$ 可得 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$, 则 $x_1+x_2=-\frac{2}{3}m$, 所以它们与椭圆交点的中点坐标为 $(-\frac{1}{3}m,\frac{1}{2}m)$, 即这些点均在轨迹 $y=-\frac{3}{2}x\left(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right)$ 上, 即直线被椭圆截得的线段的中点轨迹方程是 $y=-\frac{3}{2}x\left(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right)$. 故答案为: $y=-\frac{3}{2}x\left(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right)$.

例题 3.214 (立体几何与圆锥曲线的轨迹) 已知点 P 是正四面体 $A-BCD$ 内的动点, E 是棱 CD 的中点, 且点 P 到棱 AB 和棱 CD 的距离相等, 则点 P 的轨迹被平面 ABE 所截得的图形为(　)

A. 线段　　C. 双曲线的一部分

B. 椭圆的一部分　　D. 抛物线的一部分

知乎@余命数

解 答案: D. 在正四面体 $A-BCD$ 中, E 是棱 CD 的中点, 所以 $AE\perp CD$, $BE\perp CD$,又 $AE\cap BE=E$, $AE,BE\subset$ 平面 ABE,所以 $CD\perp$ 平面 ABE,又点 P 的轨迹被平面 ABE 所截, 即点 P 在平面 ABE 内, $\therefore$ 点 P 到棱 CD 的距离为 PE. 在平面 ABE 内过点 P 作 $PF\perp AB$,则 PF 为点 P 到棱 AB 的距离,又点 P 到棱 AB 和棱 CD 的距离相等,即 $PE=PF$,因此,在平面 ABE 内,动点 P 到棱 AB 和到定点 E 的距离相等. 由抛物线的定义得,动点 P 的轨迹是抛物线.

知乎@余命数

例题 3.215 (复数与圆锥曲线的轨迹) 已知 i 为虚数单位, 且 $z_0=\frac{1-3i}{1+2i}$, 复数 z 满足 $|z-z_0|=1$,则复数 z 对应点的轨迹方程为(　)

A. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$　　C. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

B. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　D. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

解 答案:C. $z_0=\frac{1-3i}{1+2i}=\frac{(1-3i)(1-2i)}{5}=-1-i$, 表示点 $(-1,-1)$, 故复数 z 的轨迹是以 $(-1,-1)$ 为圆心, 半径为 1 的圆. 故选:C

例题 3.216 (向量与圆锥曲线的轨迹) 已知 O 是平面上一定点, A、B、C 是平面上不共线的三个点, 动点 P 满足 $\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda(\vec{AB}+\vec{AC})$, $\lambda\in(0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的(　)

A. 重心　　C. 内心

B. 外心　　D. 垂心

知乎@余命数

解 答案:A. 由题意 $\vec{AP}=\lambda(\vec{AB}+\vec{AC})$, 当 $\lambda\in(0,+\infty)$ 时, 由于 $\lambda(\vec{AB}+\vec{AC})$ 表示 $\vec{BC}$ 边上的中线所在直线的向量, $\therefore$ 动点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的重心, 如图, 故选 A.

例题 3.217 (向量与圆曲线的轨迹) O 是平面内一定点, A,B,C 是平面内不共线三点, 动点 P 满足 $\vec{OP}=\vec{OA}+\lambda(\vec{AB}+\vec{AC})$, $\lambda\in[0,+\infty)$, 则 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的(　)

A. 外心　　C. 内心

B. 垂心　　D. 重心

解 答案:D. 由题意 $\lambda(\vec{AB}+\vec{AC})=\vec{OP}-\vec{OA}=\vec{AP}$, 而 $\vec{AB}+\vec{AC}$ 所在直线过 BC 中点, 即与 BC 边上的中线重合, 且 $\lambda\in[0,+\infty)$, 所以 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的重心, 故选:D

例题 3.218 (利用表达式求轨迹方程) (2024·全国模拟预测) 已知椭圆 C : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{2}{3}$, 左、右顶点分别为 A_1 和 A_2, M 是椭圆 C 上一点, 且 $\triangle MA_1A_2$ 面积的最大值为 $3\sqrt{5}$. (1) 求椭圆 C 的标准方程; (2) 记 O 为坐标原点, 当点 M 与椭圆 C 的顶点不重合时, 过点 M 分别作直线 OM, MF, 其中直线 MF 不过坐标原点, 且不与坐标轴平行, 直线 OM, MF 与椭圆 C 交于异于点 M 的 E,F 两点, 直线 A_1E 与直线 A_2F 相交于点 D, 直线 OD 与直线 MF 相交于点 N, 求点 N 的轨迹方程.

知乎@余命数

解 答案: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. (1) 由题可知, $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\times 2a\times b=3\sqrt{5}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=3\\ b=\sqrt{5}\\ c=2\end{cases}$, $\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

(2) 由 (1) 知 $A_1(-3,0),A_2(3,0)$, 设 $M(x_1,y_1)(x_1,y_1\neq 0),F(x_2,y_2)$, 则 $E(-x_1,-y_1)$, 设直线 MF 的方程为 $x=my+n(m\neq 0,n\neq 0)$, 由 $\begin{cases}x=my+n\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $(5m^2+9)y^2+10mny+5n^2-45=0$, $\therefore\Delta=(-10mn)^2-4\times(5m^2+9)(5n^2-45)=180(5m^2-n^2+9)>0$, $\therefore y_1+y_2=-\frac{10mn}{5m^2+9}$, $y_1y_2=\frac{5n^2-45}{5m^2+9}$, 且 $y_1y_2\neq 0$, $\therefore n\neq\pm 3$, 设点 $D(x_0,y_0)$, 由 D,E,A_1 三点共线得 $k_{DA_1}=k_{EA_1}$, 即 $\frac{y_0}{x_0+3}=\frac{y_1}{x_1-3}$,

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.219 (四心的轨迹方程) 设点 M、N 分别是不等边 $\triangle ABC$ 的重心与外心, 已知 $A(0,1)$、$B(0,-1)$, 且 $\vec{MN}=\lambda\vec{AB}$, 则动点 C 的轨迹 E__;

解 答案: $\frac{x^2}{3}+y^2=1(xy\neq 0)$. 设点 $C(x,y)$, 则 $\triangle ABC$ 的重心 $M\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)$, $\because\triangle ABC$ 是不等边三角形, $\therefore xy\neq 0$, 再设 $\triangle ABC$ 的外心 $N(n,0)$, $\because$ 已知 $\vec{MN}=\lambda\vec{AB}$, $\therefore MN\parallel AB$, $\therefore n=\frac{x}{3}$, $\therefore$ 点 N 是 $\triangle ABC$ 的外心, $\therefore|NA|=|NC|$, 即 $\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\frac{x}{3}-x\right)^2+y^2}$, 化简整理得轨迹 E 的方程是 $\frac{x^2}{3}+y^2=1(xy\neq 0)$. $\therefore$ 动点 C 的轨迹 E 是指焦点在轴上的标准位置的一个椭圆(去掉其顶点). 故答案为: $\frac{x^2}{3}+y^2=1(xy\neq 0)$.

例题 3.220 在平面直角坐标系中, 若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足向量 $\overrightarrow{OP}$ 在向量 $\overrightarrow{OA}$ 上的投影为 $-\sqrt{5}$, 则点 P 的轨迹方程为(　)

A. $x-2y+5=0$　　C. $x+2y+5=0$

B. $x+2y-5=0$　　D. $x-2y-5=0$

解 答案: C. 由已知可得, 向量 $\overrightarrow{OP}$ 在向量 $\overrightarrow{OA}$ 上的投影为 $|\overrightarrow{OP}|\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}\rangle=|\overrightarrow{OP}|\cdot\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{x+2y}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$, 整理可得 $x+2y+5=0$. 因此, 点 P 的轨迹方程为 $x+2y+5=0$. 故选: C.

例题 3.221 已知定点 $P(-4,0)$ 和定圆 $Q:x^2+y^2=8x$, 动圆 M 和圆 Q 外切, 且经过点 P, 求圆心 M 的轨迹方程

解 答案: 双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左支. 结合图象可得, $|MQ|-|MP|=4$, 可得 $a=2,c=4$, 则 $b=2\sqrt{3}$, M 的轨迹为双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左支. 故答案为双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左支.

例题 3.222 已知圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=25$, 圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$, 动圆 M 与圆 C_2 外切, 同时与圆 C_1 内切, 则动圆圆心 M 的轨迹方程为(　)

A. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$　　C. $\frac{x^2}{9}+y^2=1$

B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　D. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

解 答案: D. 如图, 由题意得: $|C_1M|=5-|MQ|$, $|C_2M|=1+|MP|$, 其中 $|MQ|=|MP|$, 所以 $|C_1M|+|C_2M|=5-|MQ|+1+|MP|=6>2=|C_1C_2|$, 由椭圆定义可知, 动圆圆心 M 的轨迹为以 C_1,C_2 为焦点的椭圆, 设 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 则

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$2a=6, c=1$, 解得: $a=3, b^2=a^2-c^2=9-1=8$, 故动圆圆心 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. 故选: D

例题 3.223　已知 $M(-2,0)$, P 是圆 $N: x^2-4x+y^2-32=0$ 上一动点, 线段 MP 的垂直平分线交 NP 于点 Q, 则动点 Q 的轨迹方程为__.

解　答案: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. 由题意, 可知圆 N 的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=36$, 圆心为 $N(2,0)$, 半径为 6.∵ 线段 MP 的垂直平分线交 NP 于点 Q, 如图, ∴$|QP|=|QM|$, ∴$|QM|+|QN|=|QP|+|QN|=|PN|=6>|MN|=4$, ∴ 点 Q 的轨迹是以 M, N 为焦点的椭圆, ∴$a=3$、$c=2$、$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5}$, ∴ 其轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. 故答案为: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

例题 3.224　已知定点 $R(1,0)$, 圆 $S: x^2+y^2+2x-15=0$, 过 R 点的直线 L_1 交圆于 M, N 两点, 过 R 点作直线 $L_2 \parallel SN$ 交 SM 于 Q 点, 求 Q 点的轨迹方程;

解　答案: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 因为 $S: x^2+y^2+2x-15=0$, 即 $(x+1)^2+y^2=16$, 所以 $S(-1,0)$, 半径为 $r=4$, 如图, 根据题意可知 $|SM|=|SN|=r=4$, 又 $RQ \parallel SN$, 所以 $\frac{|RQ|}{|SN|}=\frac{|QM|}{|SM|}$, 故 $|RQ|=|QM|$, 又 $R(1,0)$, 所以 $|QS|+|QR|=|SM|=4>|SR|=2$, 故动点 Q 的轨迹是以 S, R 为焦点, 长轴长为 4 的椭圆, 这里 $a=2, c=1$, 故 $a^2=4, b^2=4-1=3$, 所以 Q 点的轨迹方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

例题 3.225　设 O 为坐标原点, $F(2,0)$, 点 A 是直线 $x=-2$ 上一个动点, 连接 AF 并作 AF 的垂直平分线 l, 过点 A 作 y 轴的垂线交 l 于点 P, 则点 P 的轨迹方程为__.

解　答案: $y^2=8x$. 如图, 由垂直平分线的性质可得 $|PA|=|PF|$, 符合抛物线第一定义, 抛物线开口向右, 焦点坐标为 $F(2,0)$, 故 $p=4, 2p=8$, 点 P 的轨迹方程为 $y^2=8x$. 故答案为: $y^2=8x$

例题 3.226　已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2=16$, 直线 l 为圆 C 的切线, 记 $A(-2,0), B(2,0)$ 两点到直线 l 的距离分别为 d_1, d_2, 动点 P 满足 $|PA|=d_1$, $|PB|=d_2$, 则动点 P 的轨迹方程为(　)

A. $x^2+y^2=4$　　C. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1$

B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　D. $y^2=4x$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 答案: B. 如图, 分别过点 A,O,B 做直线 l 的垂线, 垂足分别为 A_1,O_1,B_1, 则 $AA_1 \parallel OO_1 \parallel BB_1, d_1=|AA_1|, d_2=|BB_1|$, 切点为 O_1, 因为 $A(-2,0), B(2,0)$, 所以 O 是 AB 的中点, 所以 OO_1 是梯形 ABB_1A_1 的中位线, 所以 $|OO_1|=\frac{|AA_1|+|BB_1|}{2}=\frac{d_1+d_2}{2}$, 又因为圆 C 的方程为 $x^2+y^2=16$, $r=4$, 所以 $|OO_1|=r=4$, 所以 $d_1+d_2=8$, 即 $|PA|+|PB|=8$, 所以动点 P 的轨迹是以 A,B 为焦点, 长轴长为 8 的椭圆, 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 则 $2a=8, c=2$, 所以 $a=4, a^2=16, b^2=a^2-c^2=12$, 所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 故选: B.

例题 3.227 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的动点, $PM\perp x$ 于点 M, 若 $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$, 则点 N 的轨迹方程为( )

A. $\frac{x^2}{2}+\frac{9y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{2}+\frac{4y^2}{9}=1$

B. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}=1$

解 答案: A. 由于点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上的动点, 设 $P(x_0,y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$, 又 $PM\perp x$ 于点 M, 则 $M(x_0,0)$; 设 $N(x,y)$, 由 $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$, 得 $(x-x_0,y-y_0)=\frac{1}{2}(x_0-x,-y)$, 则 $\begin{cases}x_0=x\\ y_0=\frac{3}{2}y\end{cases}$, 代入 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$, 得 $\frac{x^2}{2}+\frac{9y^2}{4}=1$, 即点 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{2}+\frac{9y^2}{4}=1$, 故选: A

3.14.8 本节小结

- **直接法**. 条件直接翻译, 对称建系省力.
- **定义法**. 先识别圆锥曲线定义, 再定系数, 避免盲目平方.
- **相关点法**. 反解主动点坐标, 代入已知曲线.
- **交轨法**. 两动直线联立消参; 与曲线系原理相接.
- **参数法**. 参数贴合运动, 消参用恒等式.
- **纯粹性与完备性**. 挖去增点, 补回漏段; 对条件重走一遍.

3.14.9 本节习题

3.79. 动点 M 到点 $F(3,0)$ 的距离等于它到直线 $x=-3$ 的距离. 求 M 的轨迹方程.

3.80. 动点 M 到 $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ 的距离之差的绝对值等于 2. 求 M 的轨迹方程.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.81.　点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上运动, M 是 P 与点 $(-1,0)$ 连线的中点. 求 M 的轨迹方程.

3.82.　$A(-1,0)$, $B(1,0)$ 为定点, 动直线 PA 与 PB 的斜率之积为 1. 求 P 的轨迹方程, 并说明需要挖去的点.

3.83.　点 $P=(\cos\theta,\,2\sin\theta)$, 消去参数 θ, 求 P 的轨迹方程.

3.84.　动点 M 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之积等于 1. 求 M 的轨迹, 并说明完备性上需要注意什么.

3.15 解析法证几何题

我们用坐标法既能解计算题, 也能证几何题. 第2.3节 已给出一种保底的建系程序, 把点置于原点、把线贴到轴上, 然后硬算到底. 保底之外还有更精巧的层次. 坐标系可以建得贴合图形的对称性; 题目只涉及平行与分比时, 我们甚至不必坚持两轴垂直;动笔之前还可以先用综合几何把问题化小.

3.15.1 建系的技艺

我们在 第2.3节 中把建系原则概括为三条, 即原点特殊化、轴线特殊化、利用对称性. 落实到证明题, 还有两件顺手的工具.

- **单位化**. 图形只确定到相似时, 把某条关键线段的长直接设为 1(或 2, 看中点是否出现), 消去一个尺度参数;
- **设而不求**. 长度、斜率尽量以平方形式出现, 不急于开方、不急于求出中间点的坐标.

例题 3.228　用坐标法证明:菱形的对角线互相垂直.

解　菱形首先是平行四边形. 取顶点 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, 设

$$A=(0,0),\quad B=(b,0),\quad D=(d_1,d_2),\quad C=B+D=(b+d_1,\,d_2).$$

菱形的含义是邻边相等, 即 $|AB|^2=|AD|^2$, 也就是

$$b^2=d_1^2+d_2^2.$$

两条对角线的方向向量分别为

$$\overrightarrow{AC}=(b+d_1,\,d_2),\qquad \overrightarrow{BD}=(d_1-b,\,d_2).$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

其数量积

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(b+d_1)(d_1-b)+d_2^2=d_1^2+d_2^2-b^2=0.$$

故 $AC\perp BD$.

整个证明没有出现一次根号. 等腰条件以平方形式进入, 又以平方形式消耗掉. 若条件与结论都以长度陈述, 则平方往往是更经济的中间语言.

3.15.2 斜坐标

有一类几何命题, 通篇只谈平行、分比、中点、共点、共线, 不涉及长度与角度. 对这类命题, 可以连两轴垂直的要求都放弃.

定义 3.9 (斜坐标系) 在平面上取一点 O 为原点, 取两个不共线的向量 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ 的方向为坐标轴, 并以它们的长度为各自轴上的单位长. 对任意点 P, 由

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$$

唯一确定的 (x,y) 称为 P 的**斜坐标**.

斜坐标保留了解析法的大部分代数结构.

- 定比分点公式照旧成立($P=(1-t)P_1+tP_2$, 坐标分别组合), 特别地, 中点坐标是两端坐标之半;
- 直线的方程仍是一次方程 $Ax+By+C=0$;
- 两直线平行 $\iff$ 一次项系数成比例.

失效的只有与度量有关的公式. 距离、垂直、角度都不能按直角坐标的公式计算. 这也划定了斜坐标的适用范围. **仿射性质**(平行、分比、共点、共线)的命题可以放心使用; 涉及度量的命题请回到直角坐标. 第1.2节 的等和线与重心坐标, 第3.3节 的仿射变换, 都与斜坐标同源.

例题 3.229 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 BC 上且 $BD:DC=1:2$, E 为 AC 的中点, AD 与 BE 交于 P. 求 $AP:PD$.

解 题目只涉及分比与共点, 我们取斜坐标系. 以 A 为原点, AB,AC 方向为两轴, 则

$$A=(0,0),\quad B=(1,0),\quad C=(0,1).$$

由分点公式, $D=\dfrac{2B+C}{3}=(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3})$, $E=(0,\dfrac{1}{2})$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设 P 在 AD 上, 即 $P=tD=(\frac{2t}{3},\frac{t}{3})$; 又 P 在 BE 上, 即 $P=(1-s)B+sE=(1-s,\frac{s}{2})$. 比较坐标, 得

$$\frac{2t}{3}=1-s,\qquad \frac{t}{3}=\frac{s}{2}.$$

由第二式 $s=\frac{2t}{3}$, 代入第一式得 $\frac{2t}{3}=1-\frac{2t}{3}$, 于是 $t=\frac{3}{4}$. 故

$$AP:PD=t:(1-t)=3:1.$$

注意坐标 $(1,0),(0,1)$ 中藏着单位化. $|AB|,|AC|$ 各取为所在轴的单位长; 两个单位甚至可以不等长. 正因为题目不问长度, 这种自由是合法的.

3.15.3 几何知识的应用

建系之后立刻硬算, 是解析法的下策. 上策是先用综合几何把问题化简, 再把剩下的部分交给坐标. 下列的对照可以说明差距.

例题 3.230　从圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 引两条切线, 切点为 T_1,T_2. 求直线 T_1T_2(切点弦)的方程.

解 硬算的路径是直接设出切点坐标, 由切点在圆上、半径垂直于切线列两组方程, 再消元. 过程不短.

先用几何知识. 因为 $\angle OT_1P=\frac{\pi}{2}$, 由 Thales 定理的逆 (第3.1节) 可知, T_1 在以 OP 为直径的圆上; 同理 T_2 也在其上. 于是 T_1T_2 是已知圆与以 OP 为直径的圆的**公共弦**. 两圆方程相减即可 (第3.13.2小节).

$$(x^2+y^2-r^2)-(x^2+y^2-x_0x-y_0y)=0,$$

即

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

三步以内得到答案, 与 第3.4.6小节 的替换法则一致.

几何知识在这里完成了两件工作. 它把切点转译为某圆上的点 (垂直 $\to$ 直径), 把切点弦转译为公共弦, 即两式相减. 解析法的长处恰恰来自这种几何与代数的配合; 盲目计算等于自断一臂.

3.15.4 牛顿线

完全四边形由四条直线(每三条不共点)组成, 它们两两相交得六个交点. 把其中四条边看成四边形的边, 则六个交点中有四边形的四个顶点与两组对边的交

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

点; 四边形的两条对角线, 加上两组对边交点的连线, 共三条线段, 称为完全四边形的三条**对角线**.

定理 3.37 (牛顿线) 完全四边形的三条对角线的中点共线. 这条直线称为**牛顿线**.

证明 结论只涉及中点与共线, 是仿射性质, 我们用斜坐标. 设四边形 $ABCD$ 中, 对边 AB, CD 交于 E, 对边 BC, AD 交于 F. 取 A 为原点, AB, AD 方向为两轴, 则

$$A=(0,0),\quad B=(1,0),\quad D=(0,1),\quad C=(u,v).$$

求两组对边的交点.E 在 AB ($y=0$) 与 CD 上, 算得 $E=(\dfrac{u}{1-v},0)$; F 在 AD ($x=0$) 与 BC 上, 算得 $F=(0,\dfrac{v}{1-u})$.

三条对角线的中点为

$$M_1=\frac{A+C}{2}=\Big(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\Big),\quad M_2=\frac{B+D}{2}=\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big),\quad M_3=\frac{E+F}{2}=\Big(\frac{u}{2(1-v)},\frac{v}{2(1-u)}\Big).$$

计算斜率, 得

$$k_{M_1M_2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{v}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{u}{2}}=\frac{1-v}{1-u},$$

$$k_{M_1M_3}=\frac{\frac{v}{2(1-u)}-\frac{v}{2}}{\frac{u}{2(1-v)}-\frac{u}{2}}=\frac{\frac{uv}{2(1-u)}}{\frac{uv}{2(1-v)}}=\frac{1-v}{1-u}.$$

两斜率相等且有公共点 M_1, 故 M_1, M_2, M_3 共线.(分母为零的情形对应图形退化, 另行检验, 结论不变.) □

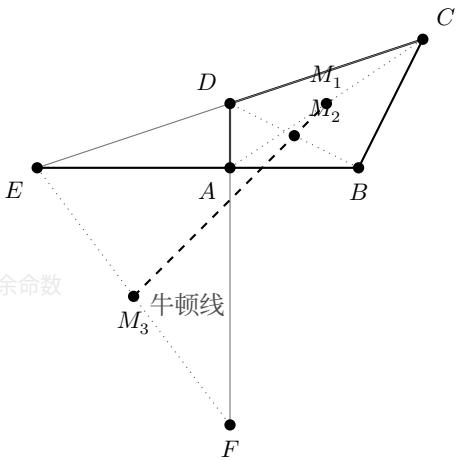


图 3.42 牛顿线:完全四边形三条对角线 AC、BD、EF 的中点 M_1, M_2, M_3 共线

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.15.5 竞赛名题选讲

本节的方法备齐之后, 我们可以看两道名题. 第一道展示曲线系的作用, 第二道展示建系与根轴的配合.

例题 3.231 (蝴蝶定理) 设 M 为圆中弦 PQ 的中点, 过 M 作两弦 AB, CD, 直线 AD, BC 分别交 PQ 于 X, Y. 求证: M 也是 XY 的中点.

解 取 M 为原点, PQ 所在直线为 x 轴, 设 $P=(-p,0)$, $Q=(p,0)$. 将圆的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 代入 P, Q, 得

$$p^2 \pm Dp + F = 0 \implies D=0,\ F=-p^2,$$

故圆为 $x^2+y^2+Ey-p^2=0$.

设 $AB: y=kx$, $CD: y=mx$, 斜率不存在的情形由对称性单独验证. 两直线合成的退化二次曲线

$$(y-kx)(y-mx)=0$$

经过 A, B, C, D 四点. 由二次曲线系原理 (第3.3节), 过这四点的任意二次曲线都属于

$$(y-kx)(y-mx)+\lambda(x^2+y^2+Ey-p^2)=0.$$

直线对 AD, BC 合成的退化二次曲线也在其中, 对应某个 λ_0. 它与 x 轴 ($y=0$) 的交点满足

$$kmx^2+\lambda_0(x^2-p^2)=0 \implies (km+\lambda_0)x^2=\lambda_0 p^2,$$

两根互为相反数 ($km+\lambda_0\neq 0$, 否则直线对过原点, 与构图矛盾). 即 X, Y 关于 M 对称, M 是 XY 的中点.

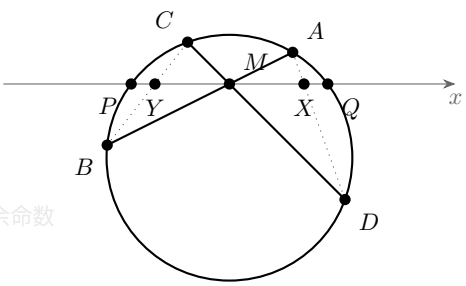


图 3.43　蝴蝶定理: M 是 PQ 的中点, 也是 XY 的中点

证明的要点只有一处. 弦 PQ 与直线对 AD, BC 在同一曲线系中, 它们与 x 轴的交点由同一个只含 x^2 项的方程控制, 故对称性自动成立. 若逐点求坐标, 则这道题会很辛苦.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

例题 3.232 (2000 年国际数学奥林匹克第 1 题) 两圆 Γ_1,Γ_2 交于 M,N 两点. 直线 ℓ 分别切 Γ_1,Γ_2 于 A,B, 且 M 比 N 更靠近 ℓ. 过 M 作 ℓ 的平行线, 分别再交 Γ_1,Γ_2 于 C,D. 直线 CA 与 DB 交于 E; 直线 AN 与 CD 交于 P, 直线 BN 与 CD 交于 Q. 求证: $EP=EQ$.

解 MN 是两圆的根轴 (第3.13.2小节). 设它交 ℓ 于 T.T 对两圆的幂相等, 而幂即切线长的平方, 故有

$$TA^2=TB^2\implies TA=TB,$$

即根轴经过 AB 的中点 T.

取 T 为原点, ℓ 为 x 轴, 并单位化 $TA=TB=1$, 设

$$A=(-1,0),\quad B=(1,0),\quad M=(u,v)\ (v\neq 0).$$

Γ_1 切 x 轴于 A, 圆心为 $(-1,r_1)$; 代入 M 得

$$(u+1)^2+(v-r_1)^2=r_1^2\implies (u+1)^2+v^2=2vr_1.$$

直线 CD 即 $y=v$.Γ_1 与 $y=v$ 的另一交点 C 满足

$$(x+1)^2=r_1^2-(v-r_1)^2=2vr_1-v^2=(u+1)^2,$$

故 $x=u$, 即 M 或 $x=-u-2$, 得 $C=(-u-2,\,v)$. 同理由 Γ_2 得 $D=(2-u,\,v)$.

直线 CA 方向为 $A-C=(u+1,-v)$, 过 $A(-1,0)$, 参数式 $(-1+s(u+1),\,-sv)$; 直线 DB 方向为 $B-D=(u-1,-v)$, 过 $B(1,0)$, 参数式 $(1+t(u-1),\,-tv)$. 交点处纵坐标给出 $s=t$, 横坐标给出

$$-1+s(u+1)=1+s(u-1)\implies 2s=2\implies s=1,$$

代回得 $E=(u,-v)$, 即 E 是 M 关于 x 轴的对称点.

N 在根轴 TM 上, 设 $N=(\lambda u,\lambda v)$. 直线 AN 交 CD $(y=v)$ 于

$$P=\Big(u+\frac{1}{\lambda}-1,\,v\Big),$$

直线 BN 交 CD 于

$$Q=\Big(u+1-\frac{1}{\lambda},\,v\Big).$$

PQ 的中点为

$$\Big(\frac{(u+\frac{1}{\lambda}-1)+(u+1-\frac{1}{\lambda})}{2},\,v\Big)=(u,\,v),$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

恰在过 E 且垂直于 CD 的直线 $x=u$ 上.$CD\parallel\ell$ 水平, 故 E 在 PQ 的垂直平分线上, 于是 $EP=EQ$.

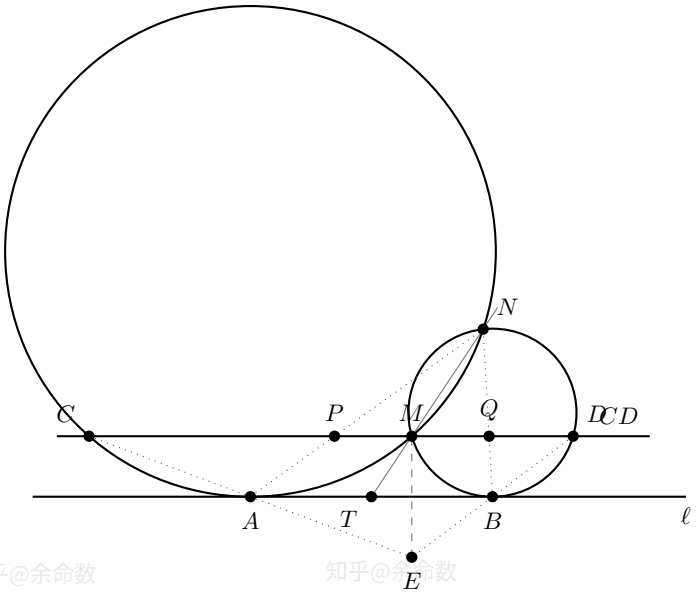


图 3.44　IMO 2000 第 1 题的建系:T 为原点,$TA=TB=1$

回顾全程. 根轴给出 $TA=TB$, 单位化把图形洗净, 四个关键点的坐标依次读出, 结论落在一条竖直线上. 每一步的计算量都不超过一次方程. 这是几何先行、建系随后的标准示范.

3.15.6　一道题的推广

好定理可以再生长. 以蝴蝶定理为例, 把 M 为 PQ 中点的条件放宽为 M 是 PQ 上任意一点, 看结论如何变化.

我们重走曲线系的计算. 设 $P=(-p,0)$, $Q=(q,0)$ $(p,q>0)$, M 仍为原点. 圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 过 P,Q, 得 $D=p-q$, $F=-pq$. 直线 $AB:y=kx$, $CD:y=mx$ 不变. 曲线系与 x 轴的交点满足

$$(km+\lambda)x^2+\lambda Dx+\lambda F=0,$$

设两根为 x_X,x_Y, 即 X,Y 的横坐标, 以 M 为原点看是有向线段. 由韦达定理得

$$\frac{1}{x_X}+\frac{1}{x_Y}=\frac{x_X+x_Y}{x_Xx_Y}=\frac{-\lambda D}{-\lambda F}=\frac{p-q}{pq}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}.$$

写成有向线段的等式, 即

$$\frac{1}{MX}+\frac{1}{MY}=\frac{1}{MQ}-\frac{1}{MP},$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这就是 **Candy 定理**. 当 M 为 PQ 中点时 MP, MQ 反向等长, 右端为零, 回到蝴蝶定理. 同一个曲线系, 同一个计算, 一般化几乎不增加成本. 对称的结论由此推广为调和的结论.

注 3.18 (机器证明)
本节的所有证明遵循同一模式. 我们先建系、设坐标、消元, 再验证多项式恒等式. 吴文俊先生把这一模式推向了机械化. 他将几何命题的条件与结论都代数化为多项式方程组, 再用特征列方法机械地判定前者是否蕴含后者, 于是大量平面几何定理获得了机器证明. 解析几何是这条机械化道路的基础.

3.15.7 本节小结

- **建系**. 对称取轴, 单位化消尺度, 条件与结论以平方形式往来, 不设多余的字母.
- **斜坐标**. 只涉仿射性质(平行、分比、共点、共线)时, 两轴方向与单位长皆可取; 直线仍为一次式, 分点公式照旧, 度量公式不可用.
- **几何先行**. 先用综合几何化简(垂直 $\to$ 直径, 切点弦 $\to$ 公共弦), 再把剩下的交给坐标.
- **牛顿线**. 完全四边形三对角线中点共线, 斜坐标下三次斜率计算.
- **名题**. 蝴蝶定理用曲线系(x 轴截距只含 x^2 项); IMO 2000/1 用根轴 + 单位化 ($TA = TB = 1$).
- **推广**. 中点改任意点, 蝴蝶定理生长为 Candy 定理, 同一计算多走半步.

3.15.8 本节习题

3.85. 用斜坐标重解: 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 BC 上且 $BD : DC = 2 : 1$, E 在 CA 上且 $CE : EA = 2 : 1$, AD 与 BE 交于 P. 求 $AP : PD$.

3.86. 用坐标法证明: 三角形两边中点的连线平行于第三边, 且等于第三边的一半.

3.87. 从点 $P(4, 1)$ 向圆 $x^2 + y^2 = 9$ 引两条切线. 求切点弦所在直线的方程与切线长.

3.88. 取 $A(0, 0)$、$B(2, 0)$、$C(3, 2)$、$D(0, 1)$, 求四边形 $ABCD$ 三条对角线中点的坐标, 并验证它们共线(对照本节牛顿线配图).

3.89. 说明: 当 M 为圆心时, 蝴蝶定理由图形的对称性立即成立, 无须曲线系.

3.90. 设 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 动点 P 满足直线 PA, PB 的斜率之积为 1. 求 P 的轨迹, 并说明这与蝴蝶定理的推广(中点改任意点)的共同思路.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.16 解析几何思想与方法论

我们在前十七节中依次讨论了向量与共线, 直线与圆, 二次曲线, 设点法, 设线法, 以及一次式与法线式、直线偶与齐次化、三角形的心、共圆点与共轴圆、轨迹方程、解析法证几何题等专题. 本节不再引入新公式, 转而梳理贯穿始终的几个问题. 坐标语言在说什么, 何时设点、何时设线, 以及设而不求与整体代换为什么有效. 我们还要给出题型对照与常见陷阱. 更深的射影观点见同卷 第5章 (选读), 极坐标与焦弦见同卷 第4章.

3.16.1 坐标翻译

解析几何用坐标语言**翻译**几何对象与几何关系.

- 点、直线、曲线 $\mapsto$ 坐标或方程 $F(x,y)=0$;
- 垂直、定比、相切 $\mapsto$ 点乘为零、分点公式、$\Delta=0$.

翻译是否省力, 取决于两件事. 一是坐标系选得是否贴合对称性, 二是参量选得是否匹配自由度.

3.16.1.0.1　自由度　一条曲线上的动点有 1 个自由度 (曲线方程消掉一个坐标); 平面上自由动点有 2 个自由度. 题中若出现弦的两端, 名义上四个坐标, 减去两条曲线约束剩两个自由度, 再由过定点、定斜率、定中点等条件补足. 设点法与设线法都是在为这 1 至 2 个自由度命名. 前者命名为 (x_0,y_0) 或 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 后者命名为 k,m.

3.16.1.0.2　与 第四卷第 19 章的呼应　先数自由度、再搭建解题框架的思想与数学思想专章一致. 解析几何只是这一原则在坐标语言下的具体化.

知乎@余命数

3.16.2 设点与设线的决策树

题面信号	优先路径
唯一动点在曲线上; 切线截距, 距离/面积最值	设点法·单动点 (第3.5节)
弦端坐标显式出现; 垂直, 定比, 中点轨迹	设点法·双动点 / 定比点差 (第3.4节–第3.6节)
显含角度, 离心角, 旋转对称	参数方程设点或旋转设点 (第3.5节)
弦长, 焦点弦, 中点横坐标, Δ 与韦达	设线法·联立与韦达 (第3.7节–第3.9节)
多条动直线, 斜率关系, 截距定值	设线法·形式选择 (第3.8节)
点对点约束难写成 k 的封闭式, 如 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$	先设点展开, 再借韦达回 k(混合)
过原点弦的斜率和/积定值, $OP\perp OQ$ 型条件	齐次化 (第3.11节)
角平分线, 点的侧向与区域, 距离符号讨论	一次式与法线式 (第3.10节)
求轨迹方程; 交点随参数运动	轨迹五法 (第3.14节)
四点共圆, 三圆公共弦, 圆幂定值	共圆点与共轴圆 (第3.13节)
纯几何命题的分比、共点、共线	解析证法与斜坐标 (第3.15节)
调和比, 极点极线, 交比	射影工具 (第5章)
焦半径, 焦弦, 半通径	极坐标 (第4章)

注 3.19 (没有唯一正确答案)
同一题常有两条通路. 判别标准如下.(1) 中间表达式是否对称; (2) 分支(斜率不存在等)是否好写; (3) 计算量是否可控. 大题中途换轨完全正常. 例如先以设线开局, 在需要点积时再设交点坐标.

3.16.3 设而不求与整体代换

两条看似相反的原则, 实则同源.

3.16.3.0.1 设而不求 弦的两端 P_1,P_2 的具体坐标往往不必解出. 韦达给出 x_1+x_2, x_1x_2; 点差给出中点与斜率的关系. 目标式若能写成对称多项式, 就应停在和与积的形式.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.16.3.0.2　整体代换　动点 (x_0,y_0) 在曲线 $F(x_0,y_0)=0$ 上时，目标式中出现的 x_0^2, y_0^2 组合应优先用 $F=0$ 整块替换，省去解出 $y_0=\pm\sqrt{\cdots}$ 再代入的弯路. 这是设点法消元的一般做法，也与设线法中用曲线方程消二次项的手法同源.

3.16.3.0.3　几条原则

能对称则对称，用韦达或点差；能整体则整体，借助曲线约束；选好直线形式以减少竖直枝讨论；最后再回代定义域与 Δ.

知乎@余命数

3.16.4　题型速查

题型	推荐骨架
轨迹方程	设点 $\to$ 关系反解 $\to$ 消参；或设线读中点；五法见 第3.14节
定值 / 定线	对称式化简；过定点用 t_1+t_2, t_1t_2
最值	单点参数函数 / 基本不等式 / 设线后对 k 求导
存在性 / 范围	$\Delta\geq 0$ + 参数范围；必要性探路
弦中点	点差（设点）或韦达（设线）
焦点弦	设线过焦点；焦半径 $a\pm ex$；极坐标加深

知乎@余命数

3.16.5　常见陷阱

1. **斜率不存在**. 点斜式 / 斜截式漏掉竖直直线；用一般式或 $x=ty+n$ 与 $y=kx+m$ 双轨覆盖 (第3.8节).
2. **联立后未检验** Δ. 求出 k 却对应无实交点.
3. **中点在曲线外**. 点差公式在弦不存在时无意义；先检验中点在曲线内部（椭圆）.
4. **离心角当极角**.$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 中 θ 不是极角 (第4章).
5. **双曲线两支 / 抛物线参数定义域**. 参数覆盖不全导致丢解.
6. **有向与无向**. 定比 λ 外分时符号；圆幂的有向乘积.
7. **过早求根**. 能用韦达却展开求根公式，则计算量剧增且易错.

3.16.6　本章工具链回顾

向量/共线 $\to$ 直线与圆 $\to$ 二次曲线 $\to$ $\begin{cases}\text{设点法 (sec06〜08)}\\ \text{设线法 (sec09〜11)}\end{cases}$ $\to$ 技巧专题 (sec12〜17) $\to$ 方法论

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

再往后, 射影几何把极点极线与交比变成比坐标更基本的不变量; 极坐标把焦点弦写成统一的 $\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$. 坐标法不会过时, 只是会嵌入更大的几何语言.

3.16.7 本节小结

- 解析几何 = 翻译 + 参量选择 + 对称化代数;
- 设点法与设线法是两大范式, 混合使用是常态;
- 设而不求、整体代换、形式选择, 三者决定计算量;
- 决策依据是题面信号与自由度.

3.16.8 本节习题

3.91. 对下列题型各选一种优先方法(设点 / 设线 / 参数 / 混合), 并各写一句理由: (1) 椭圆上一点的切线截距之积的最小值; (2) 过定点的弦长的最小值; (3) 以焦点弦为直径的圆过另一焦点.

3.92. 说明: 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中, 为何中点弦问题用点差往往比联立更短, 而焦点弦长用设线往往更短.

3.93. 抛物线 $y^2=2px$ 上 A,B 满足 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. 用本节决策树选择方法, 并证明 AB 过定点(可引用 第3.5.4小节).

3.94. 举一个必须讨论斜率不存在的反例, 若只用 $y=kx+m$ 而不讨论竖直情形, 会漏掉哪类几何结论?

3.95. 将以 PQ 为直径的圆过定点 F 这一条件翻译为坐标形式, 并说明它为何通常导致设点与韦达混合路径.

3.96. 开放题: 从本章任选一道你做过的大题, 画出其自由度计数与参量命名过程(不超过一页).

3.17 隐圆

隐圆问题是指题目中没有直接给出圆的方程, 但几何条件背后隐藏着圆的轨迹. 识别隐圆并写出其方程, 是解析几何中一类重要的转化技巧. 隐圆的常见定义有五种, 每种对应一类几何条件.

3.17.1 隐圆的五种定义

- **第一定义**: 到定点的距离等于定长的动点轨迹是圆.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- **第二定义**:到两定点 A,B 距离的平方和为定值 λ ($\lambda>\frac{1}{2}|AB|^2$) 的动点轨迹是圆(以两定点中点为圆心).
- **第三定义**:到两定点的夹角为 90° 的动点轨迹是圆(以两定点连线为直径).
- **第四定义**:对角互补的四边形顶点共圆;弦垂积为定值亦隐含圆.
- **第五定义**:到两定点距离之比为定值 ($\neq 1$) 的动点轨迹是圆(阿波罗尼斯圆).

识别隐圆的关键,是把题目的几何条件与上述五种定义对照,一旦匹配,便知动点在某个圆上运动,后续的范围、最值问题便转化为圆上的优化问题.

例题 3.233 (隐圆的第一定义) 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是单位向量,$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 若向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}|=1$,则 $|\vec{c}-\vec{b}|$ 的取值范围是(　)

A. $[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$　　C. $[0,2]$

B. $[1,\sqrt{2}+1]$　　D. $[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$

解 答案:D.

单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,即 $\vec{a}\perp\vec{b}$. 作 $\vec{OA}=\vec{a},\vec{OB}=\vec{b}$,以射线 OA,OB 分别作为 x,y 轴非负半轴建立平面直角坐标系,如图.

则 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$,设 $\vec{c}=(x,y)$,则 $\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}=(x-1,y+1)$. 由 $|\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}|=1$ 得

知乎@余命数

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1,$$

令 $\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=-1+\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$,即 $\vec{c}=(1+\cos\theta,-1+\sin\theta)$.

则

$$|\vec{c}-\vec{b}|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-2+\sin\theta)^2}=\sqrt{6-2(2\sin\theta-\cos\theta)}=\sqrt{6-2\sqrt{5}\sin(\theta-\varphi)},$$

其中锐角 φ 满足 $\begin{cases}\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$.

知乎@余命数

因此,当 $\sin(\theta-\varphi)=-1$ 时,$|\vec{c}-\vec{b}|_{\max}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1$;当 $\sin(\theta-\varphi)=1$ 时,$|\vec{c}-\vec{b}|_{\min}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$.

所以 $|\vec{c}-\vec{b}|$ 的取值范围是 $[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$. 故选:D.

例题 3.234 (隐圆的第一定义) 已知单位向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}=(0,2)$ 垂直,若向量 $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=1$,则 $|\vec{c}|$ 的取值范围为(　)

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

A. $[1,\sqrt{5}-1]$　　C. $[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$

B. $[\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}]$　　D. $[\frac{\sqrt{3}+1}{2},3]$

例题 3.235 (隐圆的第二定义) 在平面直角坐标系 xOy 中, $P(2,2),Q(-4,0)$ 为两个定点, 动点 M 在直线 $x=-1$ 上, 动点 N 满足 $NO^2+NQ^2=16$, 则 $\left|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}\right|$ 的最小值为 ____.

解 答案:5.

设点 $N(x,y)$, 由 $NO^2+NQ^2=16$ 得

$$x^2+y^2+(x+4)^2+y^2=16,$$

即 $x^2+y^2+4x=0$, 即 $(x+2)^2+y^2=4$, 所以 N 在以 OQ 为直径的圆上. 不妨设 $N(2\cos\theta-2,2\sin\theta)$, $M(-1,m)$, 则

$$\overrightarrow{PM}=(-3,m-2),\quad \overrightarrow{PN}=(2\cos\theta-4,2\sin\theta-2),$$

所以

$$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=(2\cos\theta-7,2\sin\theta+m-4).$$

则

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|^2&=(2\cos\theta-7)^2+(2\sin\theta+m-4)^2\\&=m^2-8m+69+4[(m-4)\sin\theta-7\cos\theta]\\&=(m-4)^2+53+4\sqrt{(m-4)^2+49}\sin(\theta-\varphi),\end{aligned}$$

其中 φ 为辅助角. 令 $\sqrt{(m-4)^2+49}=t,\sin(\theta-\varphi)=a$, 则 $t\geq 7,-1\leq a\leq 1$. 所以

$$|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|^2=t^2+4+4at.$$

令 $f(t)=t^2+4+4at=(t+2a)^2+4-4a^2$、$t\geq 7$、$-1\leq a\leq 1$,

例题 3.236 (圆的第三定义) 已知向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=4$、$|\vec{b}|=2\sqrt{2}$、$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值为__.

解 答案: $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

设 $\vec{OA}=\vec{a},\vec{OB}=\vec{b},\vec{OC}=\vec{c}$, 以 OA 所在的直线为 x 轴, O 为坐标原点建立平面直角坐标系. 因为 $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=2\sqrt{2},\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 所以 $A(4,0),B(2,2)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设 $C(x,y)$, 即 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(4,0),\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(2,2),\overrightarrow{OC}=\vec{c}=(x,y)$, 则

$$\vec{a}-\vec{c}=(4-x,-y),\quad \vec{b}-\vec{c}=(2-x,2-y).$$

由 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ 得

$$x^2-6x+8+y^2-2y=0,$$

即

$$(x-3)^2+(y-1)^2=2.$$

圆心坐标为 $D(3,1)$, 半径 $r=\sqrt{2}$.$|\vec{c}|$ 表示点 C 到坐标原点的距离, 即圆上的点到坐标原点的距离.

圆心 $D(3,1)$ 到原点的距离为 $d=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, 所以

$$|\vec{c}|_{\max}=d+r=\sqrt{10}+\sqrt{2}.$$

例题 3.237 (椭圆的第三定义) 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 若 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是__.

解 答案: $\sqrt{2}$.

向量 $\vec{a},\vec{b}$ 为单位向量, 且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, 不妨设 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$. 令 $\vec{c}=(x,y)$, 则

$$\vec{a}-\vec{c}=(1-x,-y),\quad \vec{b}-\vec{c}=(-x,1-y).$$

由 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ 得

$$-x(1-x)-y(1-y)=0,$$

即

$$x^2+y^2-x-y=0,$$

它表示以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为圆心, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆.

例题 3.238 (隐圆的第四定义) 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{e}$ 是平面向量, $|\vec{e}|=1$. 若非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b}^2-4\vec{b}\cdot\vec{e}+3=0$, 则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最小值是__.

解 答案: $\sqrt{3}-1$. 设 $\vec{a}=(x,y),\vec{e}=(1,0),\vec{b}=(m,n)$, 则由 $(\vec{a},\vec{e})=\frac{\pi}{3}$ 得 $\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}||\vec{e}|\cos\frac{\pi}{3},x=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, 可得 $y=$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

例题 3.239 (椭圆的第五定义) 古希腊著名数学家阿波罗尼奥斯发现, 已知平面内两个定点 A, B 及动点 P, 若 $\left|\frac{PB}{PA}\right| = \lambda(\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1)$, 则点 P 的轨迹是圆. 后来人们将这个圆以他的名字命名, 称为阿波罗尼奥斯圆(简称"阿氏圆"). 在平面直角坐标系中,已知 $O(0,0), Q(0,\sqrt{2})$, 直线 $l_1 : kx-y+k+3=0$, 直线 $l_2 : x+ky+3k+1=0$, 若 P 为 l_1, l_2 的交点, 则 $\frac{3}{2}|PO| + \frac{1}{2}|PQ|$ 的最小值为( )

A. $\frac{\sqrt{66}}{2}$

B. $6-3\sqrt{2}$

C. $9-3\sqrt{2}$

D. $\sqrt{66}$

解 答案: A. A

例题 3.240 如果圆 $(x-a)^2+(y-a)^2=8$ 上总存在两个点到原点的距离为 $\sqrt{2}$, 则实数 a 的取值范围是( )

A. $(-3,3)$

B. $(-1,1)$

C. $(-3,1)$

D. $(-3,-1)\cup(1,3)$

解 答案: D.

问题可转化为圆 $O : (x-a)^2+(y-a)^2=8$ 和圆 $O_1 : x^2+y^2=2$ 相交. 两圆圆心距

$$d = \sqrt{(a-0)^2+(a-0)^2} = \sqrt{2}|a|,$$

由 $R-r < |OO_1| < R+r$ 得 $2\sqrt{2}-\sqrt{2} < \sqrt{2}|a| < 2\sqrt{2}+\sqrt{2}$, 解得 $1 < |a| < 3$, 即 $a \in (-3,-1)\cup(1,3)$.

故选: D.

例题 3.241 设 $m \in R$, 过定点 A 的动直线 $x+2+m(y-7)=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 $|PA|+|PB|$ 的取值范围是( )

A. $[\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$

B. $[\sqrt{10}, 4\sqrt{5}]$

C. $[2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}]$

D. $[5, 5\sqrt{2}]$

解 答案: D.

由题意可知, 动直线 $x+2+m(y-7)=0$ 经过定点 $A(-2,7)$, 动直线 $mx-y-m+3=0$ 即 $m(x-1)-y+3=0$, 经过定点 $B(1,3)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

因为 $m\neq 0$ 时, 动直线 $x+2+m(y-7)=0$ 和动直线 $mx-y-m+3=0$ 的斜率之积为 -1, 始终垂直; $m=0$ 时也垂直, 所以两直线始终垂直. 又 P 是两条直线的交点, 所以 $PA\perp PB$, 从而

$$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=25.$$

设 $\angle ABP=\theta$, 则 $|PA|=5\sin\theta$, $|PB|=5\cos\theta$. 由 $|PA|\geqslant 0$ 且 $|PB|\geqslant 0$, 可得 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

所以

$$|PA|+|PB|=5(\sin\theta+\cos\theta)=5\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4}).$$

因为 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$, 从而 $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$, 因此 $5\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[5,5\sqrt{2}]$.

故选 D.

例题 3.242　设 $m\in\mathbb{R}$, 过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x,y)$, 则 $|PA|^2+|PB|^2$ 的值为(　)

A. 5　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. 10　　D. $\sqrt{17}$

解　答案: B.

由题意, 动直线 $x+my=0$ 经过定点 $(0,0)$, 则 $A(0,0)$, 动直线 $mx-y-m+3=0$ 变形得 $m(x-1)+(3-y)=0$, 则 $B(1,3)$.

由 $\begin{cases}x+my=0\\ mx-y-m+3=0\end{cases}$ 得 $P\left(\frac{m^2-3m}{m^2+1},\frac{3-m}{m^2+1}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}|PA|^2+|PB|^2&=\left(\frac{m^2-3m}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{3-m}{m^2+1}\right)^2\\&\quad+\left(\frac{m^2-3m}{m^2+1}-1\right)^2+\left(\frac{3-m}{m^2+1}-3\right)^2\\&=\frac{(m^2-3m)^2+(3-m)^2+(3m+1)^2+(3m^2+m)^2}{(m^2+1)^2}\\&=\frac{m^4-6m^3+9m^2+9-6m+m^2+9m^2+6m+1+9m^4+6m^3+m^2}{(m^2+1)^2}\\&=\frac{10m^4+20m^2+10}{(m^2+1)^2}=10.\end{aligned}$$

故选: B.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.243 （2024·江苏盐城·三模）已知 A,B,C,D 四点共面，$BC=2$，$AB^2+AC^2=20$，且 D 在射线 CA 上满足 $CD=3CA$，则 $|\overrightarrow{BD}|$ 的最大值为__.

解 答案：10.

设 $AC=m$，由题意可得 $DC=3m$，$AB=\sqrt{20-m^2}$，则

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\times BC}=\frac{m^2-8}{2m}.$$

$\triangle ABC$ 构成三角形，则 $\begin{cases}m+2>\sqrt{20-m^2}\\|m-2|<\sqrt{20-m^2}\end{cases}$，解得 $2<m<4$.

由余弦定理，

$$BD=\sqrt{BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C}=\sqrt{4+9m^2-2\times2\times3m\times\frac{m^2-8}{2m}}=\sqrt{52+3m^2}.$$

当 $m=4$ 时，$|\overrightarrow{BD}|$ 取得最大值为 10.

例题 3.244 已知圆 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=1$，点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，设 P 是圆 C 上的动点，令 $d=|PA|^2+|PB|^2$，则 d 的最小值为__.

解 答案：$14-4\sqrt{5}$.

设 $P(x_0,y_0)$，则

$$\begin{aligned}|PA|^2&=(x_0+1)^2+y_0^2,\\|PB|^2&=(x_0-1)^2+y_0^2,\\|PA|^2+|PB|^2&=(x_0-1)^2+y_0^2+(x_0+1)^2+y_0^2\\&=2x_0^2+2y_0^2+2=2(x_0^2+y_0^2)+2.\end{aligned}$$

当 $|OP|$ 取得最小值时，$|PA|^2+|PB|^2$ 取得最小值. 由圆 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=1$，则圆心 $C(-1,2)$，半径 $r=1$，易知

$$|OP|_{\min}=|OC|-r=\sqrt{1+4}-1=\sqrt{5}-1,$$

则 $d_{\min}=2(\sqrt{5}-1)^2+2=14-4\sqrt{5}$.

故答案为：$14-4\sqrt{5}$.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.245　已知圆 $C:(x+1)^2+(y-2)^2=4$, 点 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 设 P 是圆 C 上的动点, 令 $d=|PA|^2+|PB|^2$, 则 d 的最小值为__.

解　答案: $26-8\sqrt{5}$.

由 C 知 $C(-1,2)$, $r=2$. 设 $P(x_0,y_0)$、$|PA|=\sqrt{(x_0+2)^2+y_0^2}$、$|PB|=\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}$, 所以

$$d=|PA|^2+|PB|^2=(x_0+2)^2+y_0^2+(x_0-2)^2+y_0^2=2(x_0^2+y_0^2)+8.$$

因为 $|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, 所以当 $|OP|$ 取得最小值时, d 取得最小值. 由 $|OP|$ 的最小值为

$$|OC|-r=\sqrt{(-1)^2+2^2}-2=\sqrt{5}-2,$$

知乎@余命数

所以 d 的最小值为 $2(\sqrt{5}-2)^2+8=26-8\sqrt{5}$.

例题 3.246　正方形 $ABCD$ 与点 P 在同一平面内, 已知该正方形的边长为 1, 且 $|PA|^2+|PB|^2=|PC|^2$, 则 $|PD|$ 的取值范围为__.

解　答案: $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$.

知乎@余命数

如图,以 A 为坐标原点,建立平面直角坐标系,则 $A(0,0),B(1,0),C(1,1),D(0,1)$. 设点 $P(x,y)$, 则由 $|PA|^2+|PB|^2=|PC|^2$, 得

$$x^2+y^2+(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+(y-1)^2,$$

整理得

$$x^2+(y+1)^2=2,$$

知乎@余命数

即点 P 的轨迹是以点 $M(0,-1)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆.

圆心 M 到点 D 的距离为 $|DM|=2$, 所以 $|PD|_{\min}=2-\sqrt{2}$, $|PD|_{\max}=2+\sqrt{2}$, 所以 $|PD|$ 的取值范围是 $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$.

知乎@余命数

例题 3.247　已知点 $A(-m,0),B(m,0)$, 若圆 $C:x^2+y^2-6x-8y+24=0$ 上存在点 P, 使得 $PA\perp PB$, 实数 m 的最大值是(　)

A. 4　　C. 6

B. 5　　D. 7

解　答案: C.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

圆 $C:x^2+y^2-6x-8y+24=0$ 即为 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$, 其圆心为 $(3,4)$, 半径为 1. 设 AB 的中点为 M, 因为点 $A(-m,0),B(m,0)$, 所以 $M(0,0)$, 以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=m^2$.

$|CM|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 若圆 C 上存在点 P 使得 $PA\perp PB$, 则圆 C 与圆 M 有公共点, 即

$$||m|-1|\leqslant 5\leqslant |m|+1,$$

解得 $4\leqslant |m|\leqslant 6$, 所以实数 m 的最大值是 6.

故选: C.

例题 3.248 已知圆 $C:(x-1)^2+(y+3)^2=10$ 和点 $M(5,t)$, 若圆 C 上存在两点 A,B 使得 $MA\perp MB$, 则实数 t 的取值范围是__.

解 答案: $-5\leqslant t\leqslant -1$.

圆 $C:(x-1)^2+(y+3)^2=10$, 则半径为 $\sqrt{10}$, $C(1,-3)$. 如上图, 对于直线 $x=5$ 上任意一点 $M(5,t)$, 当 AM,BM 均为圆的切线时 $\angle AMB$ 最大. 由题意, $MA\perp MB$ 即 $\angle AMB=90^\circ$ 时, M 为满足条件的临界点, 此时

$$\left|\frac{AC}{|CM|}\right|=\sin\angle AMC\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当 M 在临界点之间移动时, 有 $\left|\frac{AC}{|CM|}\right|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{(5-1)^2+(t+3)^2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即 $(t+3)^2\leqslant 4$, 解得 $-5\leqslant t\leqslant -1$.

故答案为: $-5\leqslant t\leqslant -1$.

例题 3.249 设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$、$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$、$(\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c})=60^\circ$. 则 $|\vec{c}|$ 的最大值等于( )

A. 4　　C. $\sqrt{2}$

B. 2　　D. 1

解 答案: A.

因为 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$, 所以

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{1}{2},$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

即 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=120^\circ$.

如图所示，设 $\vec{OA}=\vec{a}$、$\vec{OB}=\vec{b}$、$\vec{OC}=\vec{c}$，则 $\vec{CA}=\vec{a}-\vec{c}$、$\vec{CB}=\vec{b}-\vec{c}$、$\angle AOB=120^\circ$. 所以 $\angle ACB=60^\circ$、$\angle AOB+\angle ACB=180^\circ$、$A,O,B,C$ 四点共圆. 不妨设为圆 M.

因为 $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，所以

$$|\vec{AB}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=12,$$

即 $|\vec{AB}|=2\sqrt{3}$. 由正弦定理可得 $\triangle AOB$ 的外接圆即圆 M 的直径为

$$2R=\frac{|\vec{AB}|}{\sin\angle AOB}=4.$$

知乎@余命数

所以当 $|\vec{OC}|$ 为圆 M 的直径时，$|\vec{c}|$ 取得最大值 4.

故选：A.

例题 3.250　(2024·天津·一模) 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$、$AB=2$、$CD=4$、$BC=AD=\sqrt{5}$、E 和 F 分别为 AD 与 BC 的中点，对于常数 λ，在梯形 $ABCD$ 的四条边上恰好有 8 个不同的点 P，使得 $\vec{PE}\cdot\vec{PF}=\lambda$ 成立，则实数 λ 的取值范围是

A. $\left(-\frac{5}{4},-\frac{9}{20}\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{4},\frac{11}{4}\right)$

B. $\left(-\frac{5}{4},-\frac{11}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{9}{20},-\frac{1}{4}\right)$

解　答案：D. 以 CD 的中点为坐标原点，CD 所在的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则 $A(-1,2)$、$B(1,2)$、$C(2,0)$、$D(-2,0)$、$E\left(-\frac{3}{2},1\right)$、$F\left(\frac{3}{2},1\right)$.

知乎@

例题 3.251　(2024·广东广州·一模) 在平面四边形 $ABCD$ 中，连接对角线 BD，已知 $CD=9$、$BD=16$、$\angle BDC=90^\circ$、$\sin A=\frac{4}{5}$，则对角线 AC 的最大值为__.

解　答案：27.

画出图像如下图所示. 由于 $\sin A=\frac{4}{5}$，$BD=16$ 为定值，故 A 在以 BD 为弦的圆上运动. 由正弦定理得

$$2R=\frac{16}{\frac{4}{5}}=20,\quad R=10,$$

故圆心的坐标为 $(8,-6)$.AC 的最大值即为 CA' 的值，也是 $CO+R$ 的值. 由两点间的距离公式有

$$CO+R=\sqrt{8^2+15^2}+10=27.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.252 （2024·江西赣州·模拟预测）阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德并称为亚历山大时期数学三巨匠，他对圆锥曲线有深刻而系统的研究，阿波罗尼斯圆是他的研究成果之一，指的是已知动点 M 与两定点 A,B 的距离之比为 $\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$，那么点 M 的轨迹就是阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆. 已知在平面直角坐标系中，圆 $O:x^2+y^2=1$ 上点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 和点 $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$M$ 为圆 O 上的动点，则 $2|MA|-|MB|$ 的最大值为（　）

A. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解 答案：B. 设 $M(x,y)$，令 $2|MA|=|MC|$，则 $\frac{|MA|}{|MC|}=\frac{1}{2}$，由题知圆 $x^2+y^2=1$ 是关于点 A,C 的阿波罗尼斯圆，且 $\lambda=\frac{1}{2}$，

3.17.2 本节小结

- 隐圆的识别：将几何条件与五种定义对照，找出隐藏的圆心和半径.
- 第一定义看等距，第二定义看平方和，第三定义看直角，第四定义看对角互补，第五定义看距离比.
- 识别隐圆后，范围与最值问题转化为圆上的优化问题.

3.17.3 本节习题

3.97. 动点 P 满足 $|PA|^2+|PB|^2=20$，其中 $A(-1,0)$，$B(1,0)$. 求 P 的轨迹方程，并指出圆心与半径.

3.98. 动点 P 满足 $\angle APB=90^\circ$，其中 $A(0,0)$，$B(4,0)$. 求 P 的轨迹方程.

3.99. 动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，其中 $A(0,0)$，$B(3,0)$. 求 P 的轨迹方程（阿波罗尼斯圆）.

3.18 直线与圆的综合应用

第3.1节 建立了直线与圆的基本理论，本节讨论其综合应用. 这类问题的特征是把距离、切线、弦长等基本工具与各种距离定义（切比雪夫距离、曼哈顿距离、闵氏距离）、包络线、阿波罗尼斯圆、反演点等进阶概念结合，考察在复杂情境下灵活调用基本工具的能力.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.18.1 距离的创新定义

除欧氏距离外, 切比雪夫距离 $d_C(P,Q)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$、曼哈顿距离 $d_M(P,Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$、闵氏距离 $d_p(P,Q)=(|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p)^{1/p}$ 等在特定问题中会出现. 识别距离定义后, 把圆上的动点代入距离公式求最值.

3.18.2 圆的包络线

一族圆的包络线是与该族每个圆都相切的曲线. 常见的有: 圆心在定直线上、半径随圆心变化的圆族的包络线是两条平行线; 圆心在定圆上、半径等于到定圆的圆心距的圆族的包络线是一个点.

3.18.3 阿波罗尼斯圆与反演

到两定点距离之比为定值 $\lambda\neq 1$ 的动点轨迹是圆, 称为阿波罗尼斯圆. 反演变换把圆映射为圆或直线, 是处理圆系问题的有力工具.

例题 3.253 (距离的创新定义) 数学家华罗庚曾说, "数缺形时少直观, 形少数时难入微". 事实上, 很多代数问题可以转化为几何问题加以解决, 例如, 与 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 相关的代数问题, 可以转化为点 $A(x,y)$ 与点 $B(a,b)$ 之间距离的几何问题, 结合上述观点, 求求得方程 $\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+5}=6$ 的解是(　)

A. $\frac{3\sqrt{62}}{4}$　　C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

B. $\pm\frac{3\sqrt{62}}{4}$　　D. $\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$

解 答案: D.

因为 $\sqrt{x^2+4x+5}=\sqrt{(x+2)^2+1}=\sqrt{[x-(-2)]^2+(1-0)^2}$, 所以 $\sqrt{x^2+4x+5}$ 可以转化为 $M(x,1)$ 到 $N(-2,0)$ 的距离. 同理, $\sqrt{x^2-4x+5}$ 可以转化为 $M(x,1)$ 到 $P(2,0)$ 的距离.

由 $\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2-4x+5}=6$, $M(x,1)$ 到两定点 $N(-2,0)$ 和 $P(2,0)$ 的距离之和为 6, 即 $M(x,1)$ 在以 $N(-2,0)$ 和 $P(2,0)$ 为焦点的椭圆上. 设椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0),$$

则 $2a=6$, 即 $a=3$. 又 $a^2-b^2=4$, 所以 $b^2=5$, 椭圆方程为

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$$

由 $y=1$, 得 $\frac{x^2}{9}+\frac{1}{5}=1$, 解得 $x=\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

故选：D.

知乎@余命数

例题 3.254 (距离的创新定义) 人脸识别中检测样本之间相似度主要应用距离的测试，常用测量距离的方式有曼哈顿距离和余弦距离. 若三维空间有两个点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则曼哈顿距离为：$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$，余弦相似度为：$\cos(A,B)=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\times\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\times\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$，余弦距离为 $1-\cos(A,B)$. 若 $A(-1,2),B\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，则 A,B 之间的余距离为（　）

例题 3.255 (切比雪夫距离) 在平面直角坐标系中，定义 $d(A,B)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$ 为两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 的“切比雪夫距离”，又设点 P 及 l 上任意一点 Q，称 $d(P,Q)$ 的最小值为点 P 到直线 l 的“切比雪夫距离”记作 $d(P,l)$；给出下列四个命题：(1) 对任意三点 A,B,C，都有 $d(C,A)+d(C,B)\geqslant d(A,B)$；(2) 已知点 $P(3,1)$ 和直线 $l:2x-y-1=0$，则 $d(P,l)=\frac{4}{3}$；(3) 到原点的切比雪夫距离等于 1 的点的轨迹是正方形；其中真命题的是（　）

A. (1)(2)　　C. (1)(3)

B. (2)(3)　　D. (1)(2)(3)

知乎@余命数 知乎@余命数

解 答案：D.

(1) 对任意三点 A,B,C，若它们共线，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，如图，结合三角形的相似可得 $d(C,A),d(C,B),d(A,B)$ 为 AN,CM,AK，或 CN,BM,BK，则 $d(C,A)+d(C,B)\geqslant d(A,B)$；若 B,C 或 A,C 对调，可得 $d(C,A)+d(C,B)\geqslant d(A,B)$；若 A,B,C 不共线，且三角形 C 为锐角或钝角，如图，由矩形 $CMNK$ 或矩形 $BMNK$，$d(C,A)+d(C,B)\geqslant d(A,B)$. 则对任意的三点 A,B,C，都有 $d(C,A)+d(C,B)\geqslant d(A,B)$，故 (1) 正确.

(2) 设点 Q 是直线 $y=2x-1$ 上一点，且 $Q(x,2x-1)$，可得 $d(P,Q)=\max\{|x-3|,|2-2x|\}$. 由 $|x-3|\geqslant|2-2x|$，解得 $-1\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}$，即有 $d(P,Q)=|x-3|$，当 $x=\frac{5}{3}$ 时，取得最小值 $\frac{4}{3}$；由 $|x-3|\leqslant|2-2x|$，解得 $x>\frac{5}{3}$ 或 $x<-1$，即有 $d(P,Q)=|2x-2|$，$d(P,Q)$ 的范围是 $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$，无最值. 综上可得，$P,Q$ 两点的切比雪夫距离的最小值为 $\frac{4}{3}$，故 (2) 正确.

(3) 由题，到原点 O 的切比雪夫距离为 1 的点 $P(x,y)$ 满足 $d(O,P)=\max\{|x|,|y|\}=1$，即 $|x|\geqslant|y|$ 或 $|x|\leqslant|y|$，显然点 P 的轨迹为正方形，故 (3) 正确.

故选：D.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.256 (曼哈顿距离) 在平面直角坐标系中, 定义 $d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ 为两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 的“曼哈顿距离”, 又设点 P 及直线 l 上任意一点 Q, 称 $d(P,Q)$ 的最小值为点 P 到直线 l 的“切比雪夫距离”, 记作 $d(P,l)$, 给出下列三个命题:(1) 对任意三点 A、B、C, 都有 $d(C,A)+d(C,B)\geqslant d(A,B)$;

例题 3.257 (曼哈顿距离、折线距离、直角距离问题) (多选题)曼哈顿距离是十九世纪的赫尔曼·闵可夫斯基所创词汇, 用以标明两个点在标准坐标系上的绝对轴距总和, 其定义如下:在直角坐标平面上任意两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 的曼哈顿距离 $d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$, 则下列结论正确的是(　)

A. 若点 $P(2,4),Q(-2,1)$, 则 $d(P,Q)=7$

B. 若点 $M(-1,0),N(1,0)$, 则在 x 轴上存在点 P, 使得 $d(P,M)+d(P,N)=1$

C. 若点 $M(2,1)$, 点 P 在直线 $x-2y+6=0$ 上, 则 $d(P,M)$ 的最小值是 3

例题 3.258 (闵氏距离问题) (2024·全国·模拟预测) 闵氏距离 (Minkowski distance) 是衡量数值点之间距离的一种非常常见的方法, 设点 A、B 坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2), 则闵氏距离 $D_p(A,B)=(|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p)^{1/p}(p\in N^*)$. 若点 A、B 分别在 $y=e^x$ 和 $y=x-1$ 的图像上, 则 $D_p(A,B)$ 的最小值为(　)

A. $2^{1/p}$　　C. $e^{1/p}$

B. 2^p　　D. e^p

解 答案:A.

设 $A(x_1,e^{x_1}),B(x_2,x_2-1)$, 因为点 A、B 分别在函数 $y=e^x$ 和 $y=x-1$ 的图象上, 所以

$$D_p(A,B)=(|x_1-x_2|^p+|e^{x_1}-x_2+1|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 2^{\frac{1-p}{p}}\,|(x_1-x_2)-(e^{x_1}-x_2+1)|=2^{\frac{1-p}{p}}\,|x_1-e^{x_1}-1|,$$

当且仅当 $|x_1-x_2|=|e^{x_1}-x_2+1|$ 时等号成立.

设 $g(x)=|x-e^x-1|,h(x)=x-e^x-1$, 则 $h'(x)=1-e^x$. 令 $h'(x)\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 0$, $h'(x)<0\Rightarrow x>0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x)_{\max}=h(0)=-2$, 即 $h(x)\leqslant -2$, 所以 $g(x)=|h(x)|=-h(x)\geqslant 2$, 即

$$D_p(A,B)\geqslant 2^{\frac{1}{p}},$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

所以 $D_p(A,B)$ 的最小值为 $2^{\frac{1}{p}}$.

故选:A.

例题 3.259 (闵氏距离问题) (2024·高三·安徽阜阳·期末) 闵可夫斯基距离又称为闵氏距离, 是两组数据间距离的定义. 设两组数据分别为 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 这两组数据间的闵氏距离定义为 $d_{AB}(q)=[\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|^q]^{\frac{1}{q}}$, 其中 q 表示阶数. 现有下列四个命题: (1) 若 $A=(1,2,3,4),B=(0,3,4,5)$, 则 $d_{AB}(1)=4$; (2) 若 $A=(a,a+1),B=(b-1,b)$, 其中 $a,b\in R$, 则 $d_{AB}(1)=d_{AB}(2)$; (3) 若 $A=(a,b),B=(c,d)$, 其中 $a,b,c,d\in R$, 则 $d_{AB}(1)\geqslant d_{AB}(2)$; (4) 若 $A=(a,a^2),B=(b,b-1)$, 其中 $a,b\in R$, 则 $d_{AB}(2)$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. 其中所有真命题的个数是(　)

例题 3.260 (圆的包络线问题) (多选题) 设有一组圆 $C_k:(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4(k\in\mathbb{N}^*)$, 下列四个命题中真命题的是

A. 存在一条定直线与所有的圆均相切

B. 存在一条定直线与所有的圆均相交

C. 存在一条定直线与所有的圆均不相交

D. 所有的圆均不经过原点

解 答案:BD.

知乎@余命数

圆心为 $C_k(k-1,3k)$, 半径为 $r_k=\sqrt{2}k^2$.$C_1(0,3)$、$r_1=\sqrt{2}$、$C_2(1,6)$、$r_2=4\sqrt{2}$,

$$|C_1C_2|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}<4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2},$$

圆 C_1 与圆 C_2 内含, 因此不可能有直线与这两个圆都相切, 从而 A 错误.

圆心在直线 $y=3(x+1)$ 上, 此直线与所有圆都相交, B 正确.

若 $k\to\infty$, 则所有直线都与圆相交, C 错.

将 $(0,0)$ 代入圆方程得 $(k-1)^2+9k^2=2k^4$, 即 $10k^2-2k+1=2k^4$, 左边奇数右边偶数, 无整数解, 故原点不在任一圆上, D 正确.

故选:BD.

知乎@余命数

例题 3.261 (圆的包络线问题) (多选题) 设有一组圆 $C_k:(x-1)^2+(y-k)^2=k^4(k\in\mathbb{N}^*)$, 下列四个命题正确的是

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

A. 存在 k_0 使圆与 x 轴相切
B. 存在一条直线与所有的圆均相交
C. 存在一条直线与所有的圆均不相交
D. 所有的圆均不经过原点

解 答案：ABD.

圆心为 $(1,k)$，半径为 k^2.

选项 A：当 $k=k^2$ 即 $k=1$ 时，圆为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，与 x 轴相切，正确.

选项 B：直线 $x=1$ 过所有圆心，故与所有圆相交，正确.

选项 C：圆 k 与圆 $k+1$ 圆心距 $d=1$，半径差 $R-r=2k+1>1$，$k\to\infty$ 时所有直线均相交，故错误.

选项 D：将 $(0,0)$ 代入得 $1+k^2=k^4$，无 $k\in\mathbb{N}^*$ 满足，故所有圆不过原点，正确.

故选：ABD.

例题 3.262 (阿波罗尼斯圆问题、反演点问题、阿波罗尼斯球问题) 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德被称为亚历山大时期数学三巨匠，阿波罗尼斯发现，平面内到两个定点 A,B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda>0$，且 $\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆，此圆被称为“阿波罗尼斯圆”. 在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0),B(4,0)$，点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$. 设点 P 的轨迹为曲线 C，则下列说法正确的是(　　)

A. C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$
B. 点 A,B 都在曲线 C 内部
C. 当 A,B,P 三点不共线时，则 $\angle APO=\angle BPO$
D. 若 $D(2,2)$，则 $|PB|+2|PD|$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$

解 答案：ACD.

设 $P(x,y)$(P 不与 A,B 重合). 由 $A(-2,0),B(4,0)$，有 $|PA|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$，$|PB|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$. $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，即

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}=\frac{1}{2},$$

化简得 $(x+4)^2+y^2=16$，所以点 P 的轨迹曲线 C 是以 $C(-4,0)$ 为圆心，半径 $r=4$ 的圆，如图所示.

对于 A 选项，由曲线 C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$，选项 A 正确.

对于 B 选项，由 $BC=8$，点 B 在曲线 C 外，选项 B 错误.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对于 C 选项, 由 $|OA|=2,|OB|=4$, 有 $\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{1}{2}=\frac{|PA|}{|PB|}$, 则当 A、B、P 三点不共线时, 由三角形内角平分线定理知, PO 是 $\triangle APB$ 内角 $\angle APB$ 的角平分线, 所以 $\angle APO=\angle BPO$, 选项 C 正确.

对于 D 选项, 由 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$, 得 $|PB|=2|PA|$, 则

$$|PB|+2|PD|=2|PA|+2|PD|=2(|PA|+|PD|)\geq 2|AD|=2\times\sqrt{(-2-2)^2+(0-2)^2}=4\sqrt{5},$$

当且仅当 P 在线段 AD 上时, 等号成立, 则 $|PB|+2|PD|$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$, 选项 D 正确.

例题 3.263 (圆中的垂直问题) 已知直线 $l_1:x-3y+1=0$, 直线 l_2 过点 $(1,0)$ 且与直线 l_1 相互垂直, 圆 $C:x^2+y^2-4x-2y-3=0$, 若直线 l_2 与圆 C 交于 M,N 两点, 则 $|MN|=$

解 答案: $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

由直线 $l_1:x-3y+1=0$, 可得斜率 $k_1=\frac{1}{3}$. 因为 $l_1\perp l_2$ 且直线 l_2 过点 $(1,0)$, 所以直线 l_2 的斜率为 $k_2=-3$, l_2 的方程为 $3x+y-3=0$.

又由圆 $C:x^2+y^2-4x-2y-3=0$, 即 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=8$, 可得圆 C 的圆心坐标为 $C(2,1)$, 半径为 $r=2\sqrt{2}$.

则圆心 C 到直线 l_2 的距离为

$$d=\frac{|2\times 3+1-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}},$$

所以弦长

$$|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

故答案为: $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

例题 3.264 (圆中的垂直问题) 已知 AC, BD 为圆 $O:x^2+y^2=9$ 的两条相互垂直的弦, 垂足为 $M(2,2)$, 则 $|AC|\cdot|BD|$ 的最大值为

解 答案: 20.

设圆心 $O(0,0)$ 到 AC, BD 的距离分别为 m,n. 因为 AC, BD 相互垂直, 所以

$$m^2+n^2=|OM|^2=8.$$

由垂径定理得 $|AC|=2\sqrt{9-m^2}$, $|BD|=2\sqrt{9-n^2}$, 则

$$|AC|\cdot|BD|=4\sqrt{9-m^2}\cdot\sqrt{9-n^2}=4\sqrt{81-9(m^2+n^2)+m^2n^2}=4\sqrt{9+m^2n^2}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 $m^2+n^2=8\geq 2mn$，得 $mn\leq 4$，当且仅当 $m=n=2$ 时等号成立，故 $(|AC|\cdot|BD|)_{\max}=20$.

故答案为：20.

例题 3.265 (圆的存在性问题) 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=80$，点 P 在直线 $l:y=kx+7(k\in\mathbb{R})$ 上. 若存在过点 P 的直线与圆 C 相交于 A,B 两点，且 $|AB|=16,\overrightarrow{AP}=\frac{5}{11}\overrightarrow{PB}$，则 k 的取值范围是__.

解 答案：$(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$.

圆 $C:(x-1)^2+y^2=80$ 圆心 $C(1,0)$，半径为 $4\sqrt{5}$. 设弦 AB 中点为 Q，连接 CP,CQ，由 $|AB|=16,\overrightarrow{AP}=\frac{5}{11}\overrightarrow{PB}$，可得点 P 在弦 AB 上，且 $|AP|=5$、$|BP|=11$、$|PQ|=3$. 又圆心 C 到弦 AB 所在直线的距离为

$$|CQ|=\sqrt{80-8^2}=4,$$

知乎@余命数

则

$$|CP|=\sqrt{|CQ|^2+|PQ|^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

则点 P 在以 C 为圆心半径为 5 的圆上运动，又点 P 在直线 $l:y=kx+7\,(k\in\mathbb{R})$ 上，则直线 l 与以 C 为圆心半径为 5 的圆有公共点，则

知乎@余命数

$$\frac{|k+7|}{\sqrt{1+k^2}}\leq 5,$$

解之得 $k\geq\frac{4}{3}$ 或 $k\leq-\frac{3}{4}$，所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$.

例题 3.266 (圆的存在性问题) 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-4)^2=r^2(r>0)$，$A(-3,0),B(-1,0)$，若 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，则 r 的取值范围为__.

解 答案：$[4,6]$.

知乎@余命数

因为点 $A(-3,0),B(-1,0)$，而点 P 满足 $\angle APB=90^\circ$，则点 P 的轨迹是以线段 AB 为直径的圆 M（除点 A,B 外），圆 $M:(x+2)^2+y^2=1\,(y\neq 0)$，半径 $r_1=1$. 又点 P 在圆 $C:(x-1)^2+(y-4)^2=r^2\,(r>0)$ 上，圆 C 的圆心 $C(1,4)$，半径为 r，

$$|CM|=\sqrt{(-2-1)^2+4^2}=5.$$

依题意，圆 M 与圆 C 有公共点，因此

$$|r-r_1|\leq|MC|\leq r+r_1,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

即 $|r-1| \leq 5 \leq r+1$, 解得 $4 \leq r \leq 6$.

例题 3.267 费马点是指三角形内部到三角形三个顶点距离之和最小的点, 当三角形三个内角均小于 120° 时, 费马点与三个顶点连线正好三等分费马点所在的周角, 即该点所对三角形三边的张角相等, 均为 120°. 根据以上性质, 已知 $A(-2,0)$、$B(2,0)$、$C(0,4)$、P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 记 $f(P)=|PA|+|PB|+|PC|$, 则 $f(P)$ 的最小值为( )

A. $2\sqrt{3}$　　C. $4+\sqrt{3}$

B. $4+2\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

解 答案:B.

设 $O(0,0)$ 为坐标原点, 由 $A(-2,0)$、$B(2,0)$、$C(0,4)$, 知 $|AC|=|BC|=2\sqrt{5}$, 且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 因此费马点 M 在线段 OC 上. 设 $M(0,h)$, 如图, 则 $\triangle MAB$ 为顶角是 120° 的等腰三角形, 故

$$h=|OB|\tan 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

所以

$$f(P)\geq f(M)=|MA|+|MB|+|MC|=4h+4-h=4+2\sqrt{3},$$

则 $f(P)$ 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$.

故选: B.

例题 3.268 以三角形边 BC、CA、AB 为边向形外作正三角形 BCA'、CAB'、ABC', 则 AA'、BB'、CC' 三线共点, 该点称为 $\triangle ABC$ 的正等角中心, 当 $\triangle ABC$ 的每个内角都小于 120° 时, 正等角中心点 P 满足以下性质: (1)$\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$; (2) 正等角中心是到该三角形三个顶点距离之和最小的点 (也即费马点). 由以上性质得 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 的最小值为

解 答案:$2+\sqrt{3}$.

根据题意, 在平面直角坐标系中, 令点 $A(0,1)$、$B(0,-1)$、$C(2,0)$, 则 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 表示坐标系中一点 (x,y) 到点 A、B、C 的距离之和. 因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $AC=BC$, 所以 C' 点在 x 轴负

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

半轴上, CC' 与 x 轴重合. 令 $\triangle ABC'$ 的费马点为 $P(a,b)$, 则 P 在 CC' 上, $b=0$. 因为 $\triangle ABC'$ 是锐角三角形, 由性质 (1) 得 $\angle APC=120°$, 所以 $\angle APO=60°$, 所以

$$\frac{1}{a}=\sqrt{3},\quad a=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore P\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ 到 A、B、C 的距离分别为 $PA=PB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $PC=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ 的最小值即为费马点 P 到点 A、B、C 的距离之和, 则

$$PA+PB+PC=2+\sqrt{3}.$$

故答案为: $2+\sqrt{3}$.

例题 3.269　已知平面上的线段 l 及点 P, 任取 l 上一点 Q, 线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段 l 的距离, 记作 $d(P,l)$. 请你写出到两条线段 l_1,l_2 距离相等的点的集合 $\Omega=\{P|d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$, 其中 $l_1=AB,l_2=CD$; A,B,C,D 是下列两组点中的一组. 对于下列两种情形, 只需选做一种, 满分分别是 (1) 3 分; (2) 5 分.(1) $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,0)$; (2) $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,-2)$. 你选择第__ 种情形, 到两条线段 l_1,l_2 距离相等的点的集合 $\Omega=$__

解　答案: (1)y 轴; (2)y 轴非负半轴, 抛物线 $y^2=4x(-2\leqslant y\leqslant 0)$, 直线 $y=-x-1(x>1)$.

根据题意从两组点的坐标中选一组, 根据所给的四个点的坐标, 写出两条直线的方程, 从直线方程中看出这两条直线之间的平行关系, 得到要求的结果.

对于 (1), $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,0)$, 利用两点式写出两条直线的方程 $AB:x=1,CD:x=-1$, 到两条线段 l_1,l_2 距离相等的点的集合 $\Omega=\{P|d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$, 根据两条直线的方程可知两条直线之间的关系是平行, $\therefore$ 到两条线段 l_1,l_2 距离相等的点的集合为 $\Omega=\{(x,y)|x=0\}$.

对于 (2), $A(1,3),B(1,0),C(-1,3),D(-1,-2)$: 根据第一组作出的结果, 观察第二组数据的特点, 连接得到线段以后, 可以得到到两条线段距离相等的点是 y 轴的非负半轴, 抛物线 $y^2=4x(-2\leqslant y\leqslant 0)$, 直线 $y=-x-1(x>1)$, 故满足条件的集合 $\Omega=\{(x,y)|x=0\text{ 且 }y\geqslant 0\}\cup\{(x,y)|y^2=4x,0\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 0\}\cup\{(x,y)|y=-x-1,x>1\}$.

例题 3.270　(2) 已知点 $P(3,1)$ 和直线 $l:2x-y-1=0$, 则 $d(P,l)=\frac{4}{3}$; (3) 定义 $O(0,0)$, 动点 $P(x,y)$ 满足 $d(P,O)=1$, 则动点 P 的轨迹围成平面图形的面积是 4; 其中真命题的个数(　)

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

A. 0　　C. 2

B. 1　　D. 3

解 答案:B.

由新定义表示出三点 A,B,C 两两之间的切比雪夫距离, 然后根据绝对值的性质判断 (1), 由新定义计算出 $d(P,l)$, 判断 (2); 根据新定义求出 P 的轨迹方程, 确定其轨迹, 求得轨迹围成的图形面积判断 (3).

(1) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$, 则 $d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$, $d(A,C)+d(B,C)=|x_1-x_3|+|y_1-y_3|+|x_2-x_3|+|y_2-y_3|$, 显然 $|x_1-x_3|+|x_2-x_3|\geq|(x_1-x_3)-(x_2-x_3)|=|x_1-x_2|$, 同理 $|y_1-y_3|+|y_2-y_3|\geq|y_1-y_2|$, $\therefore d(C,A)+d(C,B)\geq d(A,B)$, (1) 正确.

(2) 设 $P(x,y)$ 是直线 l 上任一点, 则 $y=2x-1$,

$$d(P,l)=|x-3|+|y-1|=|x-3|+|2x-2|=\begin{cases}3x-5,x\geq 3\\ x+1,1\leq x<3\\ 5-3x,x<1\end{cases}$$

上是减函数, $\therefore x=1$ 时, $d(P,l)_{\min}=|1-3|+|2-2|=2$, (2) 错.

(3) 由 $d(P,O)=1$ 得 $|x|+|y|=1$, 易知此曲线关于 x 轴, y 轴, 原点都对称, 它是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形, 其构成图形面积为 $S=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$, (3) 错.

故选: B.

例题 3.271 (2024·上海·二模)在平面直角坐标系中, 定义 $d(A,B)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$ 为两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 的"切比雪夫距离", 又设点 P 及 l 上任意一点 Q, 称 $d(P,Q)$ 的最小值为点 P 到直线 l 的"切比雪夫距离", 记作 $d(P,l)$, 给出下列三个命题: (1) 对任意三点 A、B、C, 都有 $d(C,A)+d(C,B)\geq d(A,B)$; (2) 已知点 $P(3,1)$ 和直线 $l:2x-y-1=0$, 则 $d(P,l)=\frac{4}{3}$; (3) 定点 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$, 动点 $P(x,y)$ 满足 $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a(2c>2a>0)$, 则点 P 的轨迹与直线 $y=kx$ 有且仅有 2 个公共点, 其中 k 为常数. 其中真命题的个数是

A. 0　　C. 2

B. 1　　D. 3

解 答案: C. 设 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C)$, 由题意可得: $d(C,A)+d(C,B)=\max\{|x_A-x_C|,|y_A-y_C|\}+\max\{|x_B-x_C|,|y_B-y_C|\}\geq|x_A-x_C|+|x_B-x_C|\geq$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$|x_A-x_B|$, 同理可得: $d(C,A)+d(C,B)\geq|y_A-y_B|$, 则: $d(C,A)+d(C,B)\geq\max\{|x_A-x_B|,|y_A-y_B|\}=d(A,B)$. 命题 (1) 成立; 设点 Q 是直线 $y=2x-1$ 上一点, 且 $Q(x,2x-1)$, 可得 $d(P,Q)=\max\{|x-3|,|2-2x|\}$,

例题 3.272　(2024·高三·上海浦东新·期中) 在平面直角坐标系中, 定义 $d(A,B)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$ 为两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 的"切比雪夫距离", 又设点 P 及 l 上任意一点 Q, 称 $d(P,Q)$ 的最小值为点 P 到直线 l 的"切比雪夫距离", 记作 $d(P,l)$, 给出四个命题, 正确的是__.(1) 对任意三点 A、B、C, 都有 $d(C,A)+d(C,B)\geqslant d(A,B)$; (2) 到原点的切比雪夫距离等于 1 的点的轨迹是正方形; (3) 已知点 $P(3,1)$ 和直线 $l:2x-y-1=0$, 则 $d(P,l)=\frac{4}{3}$; (4) 定点 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$, 动点 $P(x,y)$ 满足 $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$. $(2c>2a>0)$, 则点 P 的轨迹与直线 $y=k$ 有且仅有 2 个公共点, 其中 k 为常数.

解　答案: (1)(2)(3)(4). (1) 对任意三点 A、B、C, 若它们共线, 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$, 如下图, 结合三角形相似可得 $d(C,A)=AN$ 或 CN, $d(C,B)=CM$ 或 BM, $d(A,B)=AK$ 或 BK, 则 $d(C,A)+d(C,B)=d(A,B)$; 若 B、C 或 A、C 对调, 可得 $d(C,A)+d(C,B)>d(A,B)$; 若 A、B、C 不共线, 且 $\triangle ABC$ 中 C 为锐角或钝角, 由矩形 $CMNK$ 或矩形 $BMNK$, ……由 $|x-3|\geqslant|2-2x|$, 解得 $-1\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}$, 即有 $d(P,Q)=|x-3|$, 当 $x=\frac{5}{3}$ 时取得最小值 $\frac{4}{3}$; 由 $|x-3|<|2-2x|$, 解得 $x>\frac{5}{3}$ 或 $x<-1$, 即有 $d(P,Q)=|2x-2|$, $d(P,Q)$ 的范围是 $(3,+\infty)\cup(\frac{4}{3},+\infty)=(\frac{4}{3},+\infty)$, 无最小值. 综上可得, P,Q 两点的切比雪夫距离的最小值为 $\frac{4}{3}$. 说法 (2) 正确; 定点 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$, 动点 $P(x,y)$ 满足 $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$ $(2c>2a>0)$, 则 $|\max\{|x+c|,|y|\}-\max\{|x-c|,|y|\}|=2a$, 显然上述方程所表示的曲线关于原点对称, 故不妨设 $x\geqslant0,y\geqslant0$.(1) 当 $\begin{cases}|x+c|\geqslant y\\|x+c|-|x-c||=2a\end{cases}$, 得 $\begin{cases}x=a\\0\leqslant y\leqslant a-c\end{cases}$;

(2) 当 $\begin{cases}|x+c|\leqslant y\\|x-c|\leqslant y\end{cases}$, ……; (3) 当 $\begin{cases}|x+c|\geqslant y\\|x+c|-y=2a,a<x\\|x-c|<y\end{cases}$, ……则点 P 的轨迹是如图所示的以原点为中心的两支折线. 结合图象可知, 点 P 的轨迹与直线 $y=k$ (k 为常数) 有且仅有 2 个公共点, 命题 (3) 正确. 综上可得命题 (1)(2)(3) 均正确, 真命题的个数是 3. 本题选择 D 选项.

3.18.4 本节小结

- 距离的创新定义: 识别距离类型, 代入圆上动点求最值.
- 包络线: 分析圆族参数变化, 找出与所有圆相切的曲线.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 阿波罗尼斯圆:距离比为定值 $\neq 1$ 时,轨迹是圆.
- 反演:保角保圆,把圆系问题转化为更简单的图形.

3.18.5 本节习题

3.100. 动点 $P(x,y)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上,求切比雪夫距离 $d_C(P,O)$ 的最大值,其中 O 为原点.

3.101. 求圆心在 x 轴上、半径等于圆心到原点距离的圆族的包络线.

3.102. 动点 P 满足 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$、$A(0,0)$、$B(4,0)$. 求阿波罗尼斯圆的方程.

3.19 垂直弦问题

垂直弦问题是圆锥曲线中一类特殊的定点与定值问题. 当弦的两端在曲线上运动且满足某种垂直条件(内接直角三角形、两条互相垂直的弦)时,弦所在直线或弦中点所在直线往往过某个定点,或其范围有确定的最值.

3.19.1 内接直角三角形的斜边过定点

椭圆、双曲线、抛物线内接直角三角形的斜边必过某个定点. 设直角顶点在曲线上,两条直角边斜率之积为 -1,联立曲线方程后,斜边方程中的参数被消去,从而得到定点.

3.19.2 两条互相垂直的弦中点所在直线过定点

椭圆、双曲线、抛物线中,过同一个定点 T 的两条互相垂直的弦,其中点所在直线过某个定点. 设两条弦的斜率之积为 -1,分别求出中点坐标,中点连线的方程中参数被消去,得到定点.

3.19.3 范围与最值

内接直角三角形和两条互相垂直的弦中点都有相应的范围与最值问题,通常结合弦长公式、韦达定理和不等式求解.

例题 3.273 (椭圆内接直角三角形的斜边必过定点) 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左右焦点分别 F_1,F_2,若 __,请把以下两个条件中任选一个补充在横线上作答(若都选择,则按照第一个解答给分)(1) 四点 $F_1(1,2)$、$F_2(-\sqrt{2},0)$、$P_1\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$P_4\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 中,恰有三点在椭圆 C 上. (2) 椭圆 C 经过 $Q(-1,y_0)$,$QF_1\perp x$ 轴,且 $\sin\angle QF_2F_1=\frac{1}{3}$. (1) 求椭圆 C 的方程;(2) 设

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

点 D 为椭圆 C 的上顶点,过点 D 作两条互相垂直的直线分别交椭圆于 A、B 两点,过 D 作直线 AB 的垂线垂足为 M,判断 y 轴上是否存在定点 N,使得 $|MN|$ 为定值? 请证明你的结论.

解 【解答】(1) 若选 (1):因为 $F_1(1,2), F_2(-\sqrt{2},0), P_3\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 中有三点在椭圆上,由于 P_3, P_4 关于原点对称,所以 P_3, P_4 均在椭圆上,

例题 3.274 (双曲线内接直角三角形的斜边必过定点) 在平面直角坐标系 xOy 中,动点 P 与定点 $F(2,0)$ 的距离和它到定直线 $l: x=\frac{3}{2}$ 的距离之比是常数 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,记 P 的轨迹为曲线 E. (1) 求曲线 E 的方程;(2) 设过点 $A(\sqrt{3},0)$ 两条互相垂直的直线分别与曲线 E 交于点 M, N(异于点 A),求证:直线 MN 过定点.

解 (1) 设 $P(x,y)$,因为 P 与定点 $F(2,0)$ 的距离和它到定直线 $l: x=\frac{3}{2}$ 的距离之比是常数 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-\frac{3}{2}|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

例题 3.275 (抛物线内接直角三角形的斜边必过定点) 已知过抛物线 $E: y^2=2px(p>0)$ 的焦点,斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点,且 $|AB|=9$. (1) 求抛物线 E 的方程;(2) 设过点 $O(0,0)$ 且互相垂直的两条直线与抛物线 E 分别交于点 M, N,证明:直线 MN 过定点.

解 答案:(1) $y^2=8x$ (2) 定点 $(8,0)$.

(1) 抛物线 $E: y^2=2px$ 的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$,则直线 AB 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-\frac{p}{2})$. 由

$$\begin{cases} y^2=2px \\ y=2\sqrt{2}(x-\frac{p}{2}) \end{cases}$$

消去 y 并整理得 $x^2-\frac{5}{4}px+\frac{p^2}{4}=0$, 显然 $\Delta>0$. 设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=\frac{5}{4}p$,因此

$$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{9}{4}p=9,$$

解得 $p=4$,所以抛物线 E 的方程为 $y^2=8x$.

(2) 显然直线 MN 不垂直于 y 轴, 设直线 MN 的方程为 $x=my+t$, 点 $M(x_3,y_3), N(x_4,y_4)$. 由

$$\begin{cases} x=my+t \\ y^2=8x \end{cases}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

消去 x 得 $y^2-8my-8t=0$, 当 $\Delta'=64m^2+32t>0$ 时, $y_3y_4=-8t$. 由 $OM\perp ON$, 得

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_3x_4+y_3y_4=\frac{(y_3y_4)^2}{64}+y_3y_4=\frac{(-8t)^2}{64}-8t=t^2-8t=0,$$

显然 $t\neq 0$, 因此 $t=8$, 满足 $\Delta'>0$, 则直线 MN: $x=my+8$, 过定点 $(8,0)$, 所以直线 MN 过定点.

例题 3.276 (椭圆两条互相垂直的弦中点所在直线过定点) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2, 抛物线 $y^2=4x$ 与椭圆有相同的焦点, 点 P 为抛物线与椭圆在第一象限的交点, 且 $|PF_1|=\frac{7}{3}$. (1) 求椭圆的方程; (2) 过 F 作两条斜率不为 0 且互相垂直的直线分别交椭圆于 A,B 和 C,D, 线段 AB 的中点为 M, 线段 CD 的中点为 N, 证明: 直线 MN 过定点, 并求出该定点的坐标.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2) 定点坐标为 $\left(\frac{4}{7},0\right)$.

(1) 抛物线焦点坐标为 $(1,0)$, 故 $a^2-b^2=1$. 设 $|PF_2|=t$, 由抛物线定义得点 P 到直线 $x=-1$ 的距离为 t.$\therefore\cos\angle PF_1F_2=\frac{3t}{7}$, 由余弦定理, 得

$$\cos\angle PF_1F_2=\frac{4+\frac{49}{9}-t^2}{2\times 2\times\frac{7}{3}}=\frac{3t}{7}.$$

整理, 得 $9t^2+36t-85=0$, 解得 $t=\frac{5}{3}$ 或 $t=-\frac{17}{3}$ (舍去). 由椭圆定义, 得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$、$\therefore a=2,b=\sqrt{3}$、$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设 $l_{AB}:x=my+1\,(m\neq 0)$, 联立

$$\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow(3m^2+4)y^2+6my-9=0,$$

即 $y_A+y_B=\frac{-6m}{3m^2+4}$, $\therefore y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3m}{3m^2+4}$, 代入直线方程得 $x_M=\frac{4}{3m^2+4}$, $\therefore M\left(\frac{4}{3m^2+4},\frac{-3m}{3m^2+4}\right)$. 同理可得 $N\left(\frac{4m^2}{4m^2+3},\frac{3m}{4m^2+3}\right)$、$\therefore k_{MN}=\frac{7m}{4m^2-4}$、$\therefore$

$$l_{MN}:y+\frac{3m}{3m^2+4}=\frac{7m}{4m^2-4}\left(x-\frac{4}{3m^2+4}\right).$$

令 $y=0$, 得

$$x=\frac{4}{3m^2+4}+\frac{12m^2-12}{7(3m^2+4)}=\frac{12m^2+16}{7(3m^2+4)}=\frac{4}{7},$$

所以直线 MN 过定点 $\left(\frac{4}{7},0\right)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

例题 3.277 (双曲线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点) 已知双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $x-\sqrt{3}y=0$, 焦点到渐近线的距离为 1. (1) 求 E 的方程; (2) 过双曲线 E 的右焦点 F 作互相垂直的两条弦(斜率均存在)AB、CD. 两条弦的中点分别为 P、Q, 那

例题 3.278 (抛物线两条互相垂直的弦中点所在直线过定点) 已知一个边长为 $8\sqrt{3}$ 的等边三角形的一个顶点位于原点,另外两个顶点在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上. (1) 求抛物线 C 的方程; (2) 过点 $T(0,p)$ 作两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2, l_1 交抛物线 C 于 A、B 两点, l_2 交抛物线 C 于 D, E 两点, 若线段 AB 的中点为 M, 线段 DE 的中点为 N, 证明: 直线 MN 过定点.

解 (1) 由对称性可知等边三角形的顶点 $(4\sqrt{3},12)$ 在 $C:x^2=2py(p>0)$ 上, 代入得 $48=24p$, 解得 $p=2$, 所以抛物线方程为 $x^2=4y$.

(2) 由题意知 l_1 和 l_2 斜率均存在, $T(0,2)$, 设直线 l_1 方程为 $y=kx+2$, 则直线 l_2 方程为 $y=-\frac{1}{k}x+2$. 由

知乎@余命数

$$\begin{cases}x^2=4y\\ y=kx+2\end{cases}$$

联立得 $x^2-4kx-8=0,\Delta=16k^2+32>0$. 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=4k$, $y_1+y_2=4k^2+4$, 故 $M(2k,2k^2+2)$, 同理得 $N\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+2\right)$, 故直线 MN 方程为

$$y-(2k^2+2)=\frac{2k^2-\frac{2}{k^2}}{2k+\frac{2}{k}}(x-2k)=\left(k-\frac{1}{k}\right)(x-2k).$$

例题 3.279 (内接直角三角形范围与最值问题) 设椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点为 F_1,F_2, P 为椭圆上任意一点, 点 P 到原点最大距离为 2; 若 $M(3,1)$ 到椭圆右顶点距离为 $\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆的方程

(2) 设椭圆的上、下顶点分别为 A、B, 过 A 作两条互相垂直的直线交椭圆于 C、D, 问直线 CD 是否经过定点? 如果是, 请求出定点坐标, 并求出 $\triangle BCD$ 面积的最大值. 如果不是, 请说明理由.

解 答案: $\frac{y^2}{4}+x^2=1$. (1): 点 P 到原点最大距离为 2, 故 $a=2$, $\therefore M(3,1)$ 到椭圆右顶点距离为 $\sqrt{5}$, $\therefore(3-b)^2+1=5$, 解得: $b=1$ 或 5(舍去 5), $\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(2) 设 $CD: y=kx+t$, 联立 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$, 得: $(4+k^2)x^2+2ktx+t^2-4=0$, $\therefore x_1+x_2=-\frac{2kt}{4+k^2}, x_1x_2=\frac{t^2-4}{4+k^2}$ $\therefore AC\perp AD, \therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, 即 $(x_1,y_1-2)\cdot(x_2,y_2-2)$ $=x_1x_2+(y_1-2)(y_2-2)=x_1x_2+(kx_1+t-2)(kx_2+t-2)$

例题 3.280 (两条互相垂直的弦中点范围与最值问题) 如图, 抛物线 $\Gamma: y^2=2px(p>0)$, $M(2,1)$ 是抛物线内一点, 过点 M 作两条斜率存在且互相垂直的动直线 l_1, l_2, 设 l_1 与抛物线 Γ 相交于点 A, B, l_2 与抛物线 Γ 相交于点 C, D, 当 M 恰好为线段 AB 的中点时, $|AB|=2\sqrt{6}$. (1) 求抛物线 Γ 的方程; (2) 求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的最小值.

解 (1) 解法一: 设直线 $AB: x-2=m(y-1), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$; 联立 $\begin{cases}x=my-m+2\\y^2=2px\end{cases}$, 得 $y^2-2pmy+2pm-4p=0$, 所以 $y_1+y_2=2pm, y_1y_2=2pm-4p$. 又因为 $M(2,1)$ 是 AB 的中点, 所以 $\frac{y_1+y_2}{2}=pm=1$, 又 $|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{16p-4}=2\sqrt{6}$.

例题 3.281 过 M 点作两条互相垂直的直线 MA、MB 与椭圆交于 A、B 两点, 证明直线 AB 过定点, 并求 $\triangle DAB$ 面积的最大值.

解 答案: 直线 AB 过定点 $(-\frac{6}{5},0)$, $\triangle DAB$ 面积的最大值为 $\frac{64}{25}$.

(1) 由已知可得: $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a^2=1+c^2$, 解得: $a=2, c=\sqrt{3}$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 易知点 $M(-2,0)$, 设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则 $y_1^2=\frac{4-x_1^2}{4}$. 若直线 $AB\perp y$ 轴, 则 $x_2=-x_1, y_2=y_1$, 所以

$$k_{MA}k_{MB}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{-x_1+2}=\frac{y_1^2}{4-x_1^2}=\frac{\frac{4-x_1^2}{4}}{4-x_1^2}=\frac{1}{4},$$

不合乎题意. 设 AB 的直线方程为 $x=ty+m$, 联立

$$\begin{cases}x=ty+m\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$$

整理得 $(t^2+4)y^2+2mty+m^2-4=0$, $\Delta=4m^2t^2-4(t^2+4)(m^2-4)=16(t^2+4-m^2)>0$. 由韦达定理可得

$$y_1+y_2=-\frac{2mt}{t^2+4},\quad y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

因为 $\angle AMB=\frac{\pi}{2}$，且 $\overrightarrow{MA}=(x_1+2,y_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2+2,y_2)$，所以

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2)(x_2+2)+y_1y_2=(ty_1+m+2)(ty_2+m+2)+y_1y_2=0,$$

即 $(t^2+1)y_1y_2+t(m+2)(y_1+y_2)+(m+2)^2=0$. 代入韦达定理，整理得

$$5m^2+16m+12=0,$$

解得 $m=-\frac{6}{5}$ 或 $m=-2$(舍去)，所以直线 AB 的方程为 $x=ty-\frac{6}{5}$. 此时

$$y_1+y_2=\frac{12t}{5(t^2+4)},\quad y_1y_2=\frac{-64}{25(t^2+4)},$$

则

$$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}\cdot\left|2+\frac{6}{5}\right|\cdot|y_1-y_2|=\frac{8}{5}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{32}{25}\cdot\frac{\sqrt{25t^2+64}}{t^2+4}.$$

令 $\sqrt{25t^2+64}=u(u\geq 8)$，则

$$S_{\triangle DAB}=\frac{32}{25}\cdot\frac{u}{\frac{u^2-64}{25}+4}=\frac{32u}{u^2+36}=\frac{32}{u+\frac{36}{u}}.$$

由对勾函数单调性知，函数 $y=u+\frac{36}{u}$ 在 $[8,+\infty)$ 上为增函数，则 $u+\frac{36}{u}\geq 8+\frac{36}{8}=\frac{25}{2}$，所以

$$S_{\triangle DAB}\leq\frac{32}{\frac{25}{2}}=\frac{64}{25},$$

当且仅当 $u=8$，即 $t=0$ 时等号成立，此时 $S_{\triangle DAB}$ 最大值为 $\frac{64}{25}$.

例题 3.282　已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 经过点 $P(2,1)$，且双曲线 C 的右顶点到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (1) 求双曲线 C 的方程；(2) 过点 P 分别作两条互相垂直的直线 PA，PB 与双曲线 C 交于 A，B 两点(A，B 两点均与点 P 不重合)，设直线 AB：$y=kx+m\ (k\neq 0)$，试求 k 和 m 之间满足的关系式.

解　答案：(1) $\frac{x^2}{2}-y^2=1$；(2) $m=-6k-3$ 或 $m=-2k+1$(舍去).

(1) 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 经过点 $P(2,1)$，则 $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$. 右顶点为 $(a,0)$，不妨取渐近线为 $y=-\frac{b}{a}x$，即 $bx+ay=0$，则

$$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

从而可解得 $a^2=2,b^2=1$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 联立

$$\begin{cases}\frac{x^2}{2}-y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$$

消 y 得 $(1-2k^2)x^2-4kmx-2m^2-2=0$, 则 $1-2k^2\neq 0$, $\Delta=16k^2m^2-4(1-2k^2)(-2m^2-2)=8(m^2+1-2k^2)>0$, 且

$$x_1+x_2=\frac{4km}{1-2k^2},\quad x_1\cdot x_2=\frac{-2(m^2+1)}{1-2k^2}.$$

因为 $PA\perp PB$, 所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$, 代入化简得

$$(k^2+1)x_1x_2+[k(m-1)-2](x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0,$$

整理得 $12k^2+8km+m^2+2m-3=0$, 即 $(6k+m+3)(2k+m-1)=0$, 解得 $m=-6k-3$ 或 $m=-2k+1$. 当 $m=-2k+1$ 时, $MN:y=kx+m=k(x-2)+1$ 过点 $P(2,1)$, 与条件不符, 舍去, 所以 $m=-6k-3$, 即为 k 和 m 之间满足的关系式.

例题 3.283 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$, O 是坐标原点, F 是 C 的焦点, M 是 C 上一点, $|FM|=4$, $\angle OFM=120^\circ$. (1) 求抛物线 C 的标准方程; (2) 设点 $Q(x_0,2)$ 在 C 上, 过 Q 作两条互相垂直的直线 QA,QB, 分别交 C 于 A, B 两点(异于 Q 点). 证明: 直线 AB 恒过定点.

解 答案: (1) $y^2=4x$ (2) 证明见解析. (1) 由 $|FM|=4,\angle OFM=120^\circ$, 可得 $M\left(\frac{p}{2}+2,\pm 2\sqrt{3}\right)$, 代入 $C:12=2p\left(\frac{p}{2}+2\right)=p^2+4p$. 解得 $p=2$ 或 $p=-6$(舍), 所以抛物线的方程为: $y^2=4x$. (2) 解: 由题意可得 $Q(1,2)$, 直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 AB 的方程为 $x=my+n$, 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 由 $\begin{cases}y^2=4x\\ x=my+n\end{cases}$, 得 $y^2-4my-4n=0$, 从而 $\Delta=16m^2+16n>0$, 则 $\begin{cases}y_1+y_2=4m\\ y_1y_2=-4n\end{cases}$. 所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2n=4m^2+2n$, $x_1x_2=(my_1+n)(my_2+n)=m^2y_1y_2+mn(y_1+y_2)+n^2=n^2$, $\because\overrightarrow{QA}\perp\overrightarrow{QB}$, $\therefore\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)=0$, 故 $x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=0$,

例题 3.284 在 (2) 条件下, 当 M、N、F 三点可构成三角形时, 求 $S_{\triangle MNF}$ 的取值范围.

解 答案: $(0,\frac{36}{49}]$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 (2) 知 $M\left(\frac{-8k^2}{3+4k^2},\frac{6k}{3+4k^2}\right)$, $N\left(\frac{-8}{3k^2+4},\frac{-6k}{3k^2+4}\right)$, 所以

$$|MF|=\sqrt{\left(\frac{-8k^2}{3+4k^2}+2\right)^2+\left(\frac{6k}{3+4k^2}\right)^2}=\frac{6\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2},$$

$$|NF|=\sqrt{\left(\frac{-8}{3k^2+4}+2\right)^2+\left(\frac{-6k}{3k^2+4}\right)^2}=\frac{6\sqrt{k^2+k^4}}{3k^2+4}.$$

由于 $MF\perp NF$, 故

$$S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}|MF||NF|=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}\cdot\frac{6\sqrt{k^2+k^4}}{3k^2+4}=\frac{18(k^2+1)|k|}{(3+4k^2)(3k^2+4)}.$$

由于 $k\neq 0$, 根据奇偶性不妨只考虑 $k>0$, 则 $S_{\triangle MNF}=\frac{18(k^2+1)k}{(3+4k^2)(3k^2+4)}$. 记 $f(k)=\frac{(k^2+1)k}{(3+4k^2)(3k^2+4)}$, $k>0$, 则

$$f'(k)=-\frac{(k^2-1)(12k^4+23k^2+12)}{(3+4k^2)^2(3k^2+4)^2}.$$

对于 $12k^4+23k^2+12$ 可知 $\Delta=23^2-4\times 144<0$, 故 $12k^4+23k^2+12>0$. 当 $0<k<1$ 时 $f'(k)>0$, $f(k)$ 在 $(0,1)$ 单调递增; 当 $k>1$ 时 $f'(k)<0$, $f(k)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减. 故 $f(k)$ 在 $k=1$ 取最大值, $f(1)=\frac{2}{49}$, 故此时面积最大值为 $S_{\triangle MNF}=18f(1)=\frac{36}{49}$. 当 $k\to+\infty$ 时, $f(k)\to 0$, 故 $S_{\triangle MNF}\in(0,\frac{36}{49}]$.

例题 3.285　已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点 P 到椭圆 M 两个焦点 F_1,F_2 的距离之和为 4, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (1) 求椭圆 M 的标准方程; (2) 设 A 为 M 的左顶点, 过 A 点作两条互相垂直的直线 AC,AD 分别与 M 交于 C,D 两点, 证明: 直线 CD 经过定点, 并求这个定点的坐标.

解　答案: (1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; (2) 定点为 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

(1) 由椭圆定义知 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$, 解得 $a=2$. 又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\therefore c=\sqrt{3}$、$\therefore b^2=a^2-c^2=1$、$\therefore$ 椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 由 (1) 知 $A(-2,0)$. 当直线 CD 斜率存在时, 设 $CD:y=kx+m$、$C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$, 由

$$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,则 $\Delta=16(1+4k^2-m^2)>0$,解得 $m^2<1+4k^2$,
$\therefore$

$$x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2},\quad x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}.$$

$\because k_{AC}\cdot k_{AD}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-1,\therefore y_1y_2=-x_1x_2-2(x_1+x_2)-4$,即 $(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=-x_1x_2-2(x_1+x_2)-4,\therefore$

$$(k^2+1)x_1x_2+(mk+2)(x_1+x_2)+m^2+4=0,$$

即 $\frac{(k^2+1)(4m^2-4)}{1+4k^2}-\frac{8km(mk+2)}{1+4k^2}+m^2+4=0$,整理可得 $5m^2-16km+12k^2=(5m-6k)(m-2k)=0,\therefore m=\frac{6}{5}k$ 或 $m=2k$. 当 $m=2k$ 时,直线 $CD:y=kx+2k=k(x+2)$ 恒过 A 点,不合题意;当 $m=\frac{6}{5}k$ 时,直线 $CD:y=kx+\frac{6}{5}k=k\left(x+\frac{6}{5}\right),\therefore CD$ 恒过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$. 当直线 CD 斜率不存在且恒过 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$ 时,即 $CD:x=-\frac{6}{5}$,由

$$\begin{cases}x=-\frac{6}{5}\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$$

得 $y=\pm\frac{4}{5},\therefore k_{AC}\cdot k_{AD}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{6}{5}+2}\times\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{6}{5}+2}=-1$,满足题意. 直线 CD 恒过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

例题 3.286 已知抛物线 G: $x^2=2py(p>0)$ 焦点为 F, R 为 G 上的动点, $K(1,2)$ 位于 G 的上方区域,且 $|RK|+|RF|$ 的最小值为 3. (1) 求 G 的方程; (2) 过点 $P(0,2)$ 作两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2, l_1 交 G 于 A,B 两点, l_2 交 G 于 C, D 两点,且 M, N 分别为线段 AB 和 CD 的中点. 直线 MN 是否恒过一个定点? 若是,求出该定点坐标;若不是,说明理由.

解 答案:(1) $x^2=4y$;(2) 是,定点为 $(0,4)$.

(1) 抛物线 G:$x^2=2py(p>0)$ 焦点为 $F(0,\frac{p}{2})$,准线为 $l:y=-\frac{p}{2}$,设 R 到 l 的距离为 d. 因为 $K(1,2)$ 位于 G 的上方区域,根据抛物线的定义可知

$$|RK|+|RF|=|RK|+d\geq 2+\frac{p}{2}$$

(当且仅当 $RK\perp l$ 时取等号),又 $|RK|+|RF|$ 的最小值为 3,所以 $2+\frac{p}{2}=3$,解得 $p=2$,所以抛物线 G:$x^2=4y$.

(2) 依题意直线 l_1 和 l_2 的斜率均存在且不为 0,设直线 l_1 的方程为 $y=kx+2$,则直线 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+2$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$. 联立方程得

$$\begin{cases}y=kx+2\\ x^2=4y\end{cases}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

消去 y 并整理得 $x^2-4kx-8=0$, 则 $\Delta=(-4k)^2+32=16k^2+32>0$, 则 $x_1+x_2=4k, x_1x_2=-8$, 所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$. 因为 M 为 AB 的中点, 所以 $M(2k,2k^2+2)$, 同理 $N(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+2)$, 所以直线 MN 的方程为

$$y-(2k^2+2)=\frac{2k^2+2-(\frac{2}{k^2}+2)}{2k+\frac{2}{k}}(x-2k)=(k-\frac{1}{k})(x-2k),$$

整理得 $y=(k-\frac{1}{k})x+4$, 所以直线 MN 恒过点 $(0,4)$.

知乎@余命数

例题 3.287　过点 $K(0,-1)$ 作抛物线 $G:x^2=2py(p>0)$ 在第一象限部分的切线, 切点为 A, F 为 G 的焦点, O 为坐标原点, $\triangle OAF$ 的面积为 1. (1) 求 G 的方程; (2) 过点 $P(0,2)$ 作两条互相垂直的直线 l_1 和 l_2, l_1 交 G 于 C, D 两点, l_2 交 G 于 P,Q 两点, 且 M,N 分别为线段 CD 和 PQ 的中点. 直线 MN 是否恒过一个定点? 若是, 求出该定点坐标; 若不是, 说明理由.

解　答案: (1) $x^2=4y$; (2) 恒过定点 $(0,4)$.

知乎@余命数

(1) 由题, $y'=\frac{x}{p}$, 设切点 $A(x_0,y_0)$, 则切线方程为 $y-y_0=\frac{x_0}{p}(x-x_0)$, $x_0^2=2py_0$.$K(0,-1)$ 的坐标代入, 得 $-1-y_0=\frac{x_0}{p}(-x_0)$, 解得 $y_0=1$. 由于 $x_0>0$, 所以 $x_0=\sqrt{2p}$, 由 $\triangle OAF$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot\sqrt{2p}=1,$$

知乎@余命数

解得 $p=2$, 所以 G 的方程为 $x^2=4y$.

(2) 由题意可知, 直线 l_1 和 l_2 斜率都存在且均不为 0, 设直线 l_1 的方程为 $y=kx+2$, 则直线 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+2$. 联立方程组

$$\begin{cases}y=kx+2\\x^2=4y\end{cases}$$

知乎@余命数

消去 y 并整理得 $x^2-4kx-8=0$, 则 $\Delta=(-4k)^2+32=16k^2+32>0$. 设 $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=4k, x_1\cdot x_2=-8$, 所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$. 因为 M 为 CD 中点, 所以 $M(2k,2k^2+2)$, 同理可得 $N\left(-\frac{2}{k},\frac{2}{k^2}+2\right)$, 所以直线 MN 的方程为

$$y-(2k^2+2)=\frac{2k^2+2-\left(\frac{2}{k^2}+2\right)}{2k+\frac{2}{k}}\cdot(x-2k)=\left(k-\frac{1}{k}\right)\cdot(x-2k),$$

整理得 $y=\left(k-\frac{1}{k}\right)x+4$, 所以直线 MN 恒过定点 $(0,4)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 3.288 72(2024·贵州·模拟预测)已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线的距离为 $\frac{1}{2}$. (1) 求抛物线 C 的方程;(2) 过点 F 任意作互相垂直的两条直线 l_1,l_2 分别交曲线 C 于点 A,B 和 M,N, 设线段 AB,MN 的中点分别为 P,Q, 求证:直线 PQ 恒过一个定点.

解 答案:(1) $y^2=4x$;(2) 定点 $E(3,0)$.

(1) 因为抛物线的焦点 F 为 $(\frac{p}{2},0)$, 双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$, 即 $x\pm\sqrt{3}y=0$, 则

$$\frac{\left|\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(\pm\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2},$$

解得 $p=2$, 故抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2) 设 A,B 两点坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 则点 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 由题意可设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq0)$, 由

$$\begin{cases}y^2=4x\\ y=k(x-1)\end{cases}$$

得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$, $\Delta=(2k^2+4)^2-4k^4=16k^2+16>0$. 因为直线 l_1 与曲线 C 交于 A,B 两点, 所以 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$, $y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=\frac{4}{k}$, 所以点 P 的坐标为 $(1+\frac{2}{k^2},\frac{2}{k})$. 由题知, 直线 l_2 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 同理可得点 Q 的坐标为 $(1+2k^2,-2k)$. 当 $k\neq\pm1$ 时, 有 $1+\frac{2}{k^2}\neq1+2k^2$, 此时直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\frac{\frac{2}{k}+2k}{1+\frac{2}{k^2}-1-2k^2}=\frac{k}{1-k^2}$, 所以直线 PQ 的方程为 $y+2k=\frac{k}{1-k^2}(x-1-2k^2)$, 整理得 $yk^2+(x-3)k-y=0$, 于是直线 PQ 恒过定点 $E(3,0)$. 当 $k=\pm1$ 时, 直线 PQ 的方程为 $x=3$, 也过定点 $E(3,0)$.

例题 3.289 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$, 过右焦点 F 作两条互相垂直的弦 AB,CD, 设 AB,CD 中点分别为 M,N.
(1) 写出椭圆右焦点 F 的坐标及该椭圆的离心率;(2) 证明:直线 MN 必过定点, 并求出此定点坐标;(3) 若弦 AB,CD 的斜率均存在, 求 $\triangle FMN$ 面积的最小值.

解 答案:(1) $F(1,0),e=\frac{\sqrt{3}}{3}$;(2) $(\frac{3}{5},0)$;(3) 0(下确界,斜率趋于无穷或零时趋近于 0). (1) 由椭圆的方程 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$, 可得 $a^2=3,b^2=2$, 可得 $c^2=a^2-b^2=3-2=1$, 所以 $c=1$, 即右焦点 F 的坐标为 $(1,0)$, 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(2) 证明: 当直线 AB, CD 的斜率存在且不为 0 时, 设直线 AB 的方程为 $x = my+1$,设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 联立 $\begin{cases} x = my+1 \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$,整理可得:$(2m^2+3)y^2+4my-4=0$, 可得 $y_1+y_2 = -\frac{4m}{2m^2+3}$, $x_1+x_2 = m(y_1+y_2)+2 = \frac{6}{2m^2+3}$,

知乎@余命数

例题 3.290　已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右顶点分别为 A, B, 上顶点为 D, 坐标原点 O 到直线 AD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (1) 求椭圆的方程; (2) 过 A 点作两条互相垂直的直线 AP, AQ 与椭圆交于 P, Q 两点, 求 $\triangle BPQ$ 面积的最大值.

解　答案: (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (1) 由已知可得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ ab = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$ 解得, $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$, $a^2 = b^2 + c^2$. 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (2) 设 PQ 的直线方程为 $x = ty + m$、$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$, 联立方程 $\begin{cases} x = ty+m, \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$ 整理得 $(t^2+4)y^2 + 2mty + m^2 - 4 = 0$.

知乎@余命数

例题 3.291　已知抛物线 E 的顶点在原点, 焦点为 $F(2, 0)$, 过焦点且斜率为 k 的直线交抛物线于 P, Q 两点, (1) 求抛物线方程; (2) 若 $|FP| = 2|FQ|$, 求 k 的值; (3) 过点 $T(t, 0)$ 作两条互相垂直的直线分别交抛物线 E 于 A, B, C, D 四点, 且 M, N 分别为线段 AB, CD 的中点, 求 $\triangle TMN$ 的面积最小值.

解　答案: (1) $y^2 = 8x$; (2) $k = \pm 2\sqrt{2}$. (1)·抛物线 E 的顶点在原点, 焦点为 $F(2, 0)$, $\therefore$ 抛物线方程为:$y^2 = 8x$;

(2) 由题意知:$k \neq 0$, 可设直线 $PQ: x = \frac{1}{k}y + 2$、$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$;

$\because |FP| = 2|FQ|$, $\therefore y_1 = -2y_2$, 即 $\frac{y_1}{y_2} = -2$,

由 $\begin{cases} x = \frac{1}{k}y + 2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$ 得:$y^2 - \frac{8}{k}y - 16 = 0$, $\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{8}{k} \\ y_1 y_2 = -16 \end{cases}$

$\therefore \frac{(y_1+y_2)^2}{y_1 y_2} = \frac{y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2}{y_1 y_2} = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + 2 = -\frac{4}{k^2}$, 即 $-\frac{4}{k^2} = -2 - \frac{1}{2} + 2$,

解得:$k^2 = 8$, $\therefore k = \pm 2\sqrt{2}$;

(3) 由题意知:直线 AB, CD 的斜率均存在,

不妨设 $AB: x = my + t$、$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$、$D(x_4, y_4)$;

则 $CD: x = -\frac{1}{m}y + t$;

由 $\begin{cases} x = my + t \\ y^2 = 8x \end{cases}$ 得:$y^2 - 8my - 8t = 0$,则 $\Delta = 64m^2 + 32t > 0$,即 $2m^2 + t > 0$;

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$\therefore y_1+y_2=8m、y_1y_2=-8t、\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2t=8m^2+2t,$$

例题 3.292 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 $\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$ 在圆上. (1) 求 E 的方程; (2) 过点 $K(-1,0)$ 作互相垂直的两条直线 l_1 与 l_2, 设 l_1 交 E 于 A,B 两点, l_2 交 E 于 C,D 两点, AB,CD 的中点分别为 M,N. 探究: $\triangle OMN$ 与 $\triangle KMN$ 的面积之比是否为定值? 若是, 请求出定值; 若不是, 请说明理由.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; (2) 是, 定值为 4. (1) 由题意 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$, 解得 $a=2,b=1$, 则 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (2) 设 $l_1:\triangle OMN$ 与 $\triangle KMN$ 面积之比为定值, 定值为 4, 理由如下: 设直线 $AB:x=my-1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 讨论: (1) 当 $m\neq 0$, 且 $m\neq\pm1$ 时, 联立 $\begin{cases}x=my-1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$, 可得 $(m^2+4)y^2-2my-3=0$, $\Delta=16m^2+48>0$, 则 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+4}$, 所以 $y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m}{m^2+4},x_M=my_M-1=m\cdot\frac{m}{m^2+4}-1=\frac{-4}{m^2+4}$ 所以 $M\left(\frac{-4}{m^2+4},\frac{m}{m^2+4}\right)$, 设 $CD:x=\frac{-1}{m}y-1$, 同理可得 $N\left(\frac{-4m^2}{4m^2+1},\frac{-m}{4m^2+1}\right)$ 所以 $k_{MN}=\frac{\frac{-m}{4m^2+1}-\frac{m}{m^2+4}}{\frac{-4m^2}{4m^2+1}-\frac{-4}{m^2+4}}=\frac{5}{4}\frac{m}{m^2-1}(m\neq0$ 且 $m\neq\pm1)$, 所以直线 $MN:y-\frac{m}{m^2+4}=\frac{5}{4}\frac{m}{m^2-1}\left(x+\frac{4}{m^2+4}\right)$, 即 $y=\frac{m}{m^2-1}\left(\frac{5}{4}x+1\right)$, 所以直线 MN 恒过定点 $T\left(-\frac{4}{5},0\right)$; (2) 当 $m=\pm1$ 时, 不妨设直线 $l_1:y=x+1;l_2:y=-x-1$, 可发现 $MN\perp x$ 轴, 且 MN 过 $T\left(-\frac{4}{5},0\right)$,

3.19.4 本节小结

- 内接直角三角形: 斜边过定点, 用斜率之积 -1 联立曲线方程消参.
- 过同一点的两条互相垂直的弦: 中点连线过定点, 分别求中点后消参.
- 范围与最值: 结合弦长公式与韦达定理, 用不等式求极值.

3.19.5 本节习题

3.103. 设椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 内接直角三角形 PAB 的直角顶点 P 在椭圆上, $PA\perp PB$. 证明斜边 AB 过定点, 并求该定点.

3.104. 设椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上过点 $T(1,0)$ 的两条弦 AB,CD 互相垂直(斜率之积为 -1). 求 AB 中点与 CD 中点连线所过定点的坐标.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

3.20 斜率和差商积

圆锥曲线中, 直线与曲线交于两点后, 两点处的切线斜率, 或相关斜率的和、差、商、积往往有确定的值或范围. 设直线方程, 联立曲线, 用韦达定理表示出两个交点的坐标, 再把目标斜率表达式代入, 消参后得到定值或范围.

3.20.1 斜率和

设直线与圆锥曲线交于 A, B 两点, 求曲线在 A, B 处的切线斜率之和. 用韦达定理表示 x_1+x_2, x_1x_2, 代入斜率之和的表达式, 消参后通常得到定值.

3.20.2 斜率差

斜率差的处理方法与斜率和类似, 用韦达定理代入后消参.

3.20.3 斜率积

斜率积是圆锥曲线第三定义的延伸: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 P 与两个顶点 $A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$ 连线的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$. 一般情形下, 斜率积为定值或与某个参数相关.

3.20.4 斜率商

斜率商问题把斜率之比作为目标, 用韦达定理代入后, 消参得到定值或范围.

例题 3.293 (斜率和问题) (2024·山东淄博·二模)已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且四个顶点所围成的菱形的面积为 4. (1) 求椭圆 Γ 的方程;

例题 3.294 (斜率差问题) 已知椭圆 $M:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, A, B, C 分别为椭圆的左顶点、上顶点和右顶点, F_1 为左焦点, 且 $\triangle ABF_1$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 若 P 是椭圆 M 上不与顶点重合的动点, 直线 AB 与直线 CP 交于点 Q, 直线 BP 交 x 轴于点 N. (1) 求椭圆 M 的标准方程; (2) 求证: $2k_{QN}-k_{QC}$ 为定值, 并求出此定值, 其中 k_{QN}, k_{QC} 分别为直线 QN 和直线 QC 的斜率.

解 答案:(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

(1) 由题意得 $\begin{cases} e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(a-c)b=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$，又 $c^2=a^2-b^2$，解得 $\begin{cases} a=2 \\ c=1 \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$，所以椭圆 M 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 方法一：直线 $AB:y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2)$，设直线 $PC:x=my+2$（$m\neq 0$ 且 $m\neq\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，注：$P$ 不为椭圆顶点）. 由

$$\begin{cases} x=my+2 \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+2) \end{cases}$$

得 $y_Q=\frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}m}$，则 $x_Q=my_Q+2=\frac{4+2\sqrt{3}m}{2-\sqrt{3}m}$，所以 $Q\left(\frac{4+2\sqrt{3}m}{2-\sqrt{3}m},\frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}m}\right)$. 由

$$\begin{cases} x=my+2 \\ 3x^2+4y^2-12=0 \end{cases}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

得 $(3m^2+4)y^2+12my=0\Rightarrow y_P=\frac{-12m}{3m^2+4}$，$x_P=my_P+2=\frac{-6m^2+8}{3m^2+4}$，所以 $P\left(\frac{-6m^2+8}{3m^2+4},\frac{-12m}{3m^2+4}\right)$. 由 B,P,N 三点共线得 $k_{BP}=k_{BN}$，即 $\frac{y_P-\sqrt{3}}{x_P}=-\frac{\sqrt{3}}{x_N}$，解得 $x_N=\frac{2(2-\sqrt{3}m)}{\sqrt{3}m+2}$，故 $k_{QN}=\frac{\sqrt{3}m+2}{4m}$. 于是

$$2k_{QN}-k_{QC}=\frac{\sqrt{3}m+2}{2m}-\frac{1}{m}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

知乎@余命数

为定值.

例题 3.295 (斜率积问题) （2024·河北保定·三模）设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<\sqrt{7})$ 的左、右顶点和椭圆 $F:\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{7}=1$ 的左、右焦点均为 E,F.P 是 C 上异于 E,F 的一个动点. 已知直线 EP 交直线 $l_1:x=\sqrt{7}$ 于点 A，直线 FP 交直线 $l_2:x=-\sqrt{7}$ 于点 B. 直线 AB 与椭圆 F 交于点 M,N，O 为坐标原点. (1) 若 b 为定值，证明：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 为定值；(2) 若直线 OM,ON 的斜率之积恒为 $-\frac{1}{2}$，求 b.

解 (1) 证明：易知 $E(-\sqrt{7},0),F(\sqrt{7},0)$，设 $P(m,n)$，则 $\frac{m^2}{7}+\frac{n^2}{b^2}=1$，即 $m^2=7-\frac{7n^2}{b^2}$. 直线 $PE:y=\frac{n}{m+\sqrt{7}}(x+\sqrt{7})$，联立 $l_1:x=\sqrt{7}$，则 $A\left(\sqrt{7},\frac{2\sqrt{7}n}{m+\sqrt{7}}\right)$，所以 $\overrightarrow{OA}=\left(\sqrt{7},\frac{2\sqrt{7}n}{m+\sqrt{7}}\right)$. 直线 $PF:y=\frac{n}{m-\sqrt{7}}(x-\sqrt{7}),l_2:x=-\sqrt{7}$，则 $B\left(-\sqrt{7},-\frac{2\sqrt{7}n}{m-\sqrt{7}}\right)$. 所以 $\overrightarrow{OB}=\left(-\sqrt{7},-\frac{2\sqrt{7}n}{m-\sqrt{7}}\right)$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-7-\frac{28n^2}{m^2-7}=-7+4b^2$；

(2) 求直线 $AB:y=kx+t$，则 $B(-\sqrt{7},t-\sqrt{7}k)$，$A(\sqrt{7},t+\sqrt{7}k)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-7+t^2-7k^2=-7+4b^2$，即 $t^2-7k^2=4b^2$，令直线 AB 与椭圆 F 联立

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\begin{cases} y=kx+t, \\ \frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{7}=1, \end{cases}$ 消去 y, 整理得 $(2k^2+1)x^2+4ktx+2t^2-14=0$, 需满足 $\Delta>0$,

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=-\frac{4kt}{2k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{2t^2-14}{2k^2+1}$,

例题 3.296 (斜率商问题) 已知 $\odot O:x^2+y^2=4$, 圆心 O 是原点, 点 $B(1,0)$, 以线段 AB 为直径的圆内切于 $\odot O$, 动点 A 的轨迹记为曲线 C. (1) 求曲线 C 的方程; (2) 若直线 $l:x=4$, 点 $Q(1,\frac{3}{2})$, 直线 m 过点 B 与曲线 C 交于 M,N 两点, 与直线 l 交于点 K. (1) 若 $|MN|=\frac{10}{3}$, 求直线 m 的斜率; (2) 若记直线 QM,QN,QK 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3, 问 $\frac{k_1-k_2}{k_2-k_3}$ 是否为定值? 如果是, 请求出定值; 如果不是, 请说明理由.

解 (1) 设 AB 的中点为 P, 切点为 T, 连接 OP,PT, 取 B 关于 y 轴的对称点 D, 连接 AD, 则 $|AD|=2|OP|$, 故 $|AB|+|AD|=2|OP|+2|PB|=2|OP|+2|PT|=2(|OP|+|PT|)=4>|BD|=2$, 所以点 A 的轨迹是以 B,D 为焦点, 长轴长为 4 的椭圆, 其中 $a=2,c=1$, 则 $b=\sqrt{3}$, 则曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2) 设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$, 依题意, 直线 m 的斜率必定存在, 设 $l_1:x=ty+1(t\neq 0)$, $\begin{cases} x=ty+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$, 可得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$, $\Delta>0$ 恒成立, 则有 $y_1+y_2=\frac{-6t}{3t^2+4}$, $y_1y_2=\frac{-9}{3t^2+4}$, (1) 若 $|MN|=\frac{10}{3}$, 则有 $|MN|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(t^2+1)}{3t^2+4}=\frac{10}{3}$,

例题 3.297 积为 4. (1) 求椭圆的标准方程; (2) 四边形 $ABCD$ 的顶点在圆上, 且对角线 AC,BD 过原点 O, 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 满足 $x_1x_2=4y_1y_2$. (1) 求证: 直线 AB 和直线 BC 的斜率之和为定值; (2) 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

解 答案: (1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; (2)(1) 0; (2) 4.

(1) 由题意 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2ab=4$, 又 $a^2=b^2+c^2$, 解得 $a^2=4,b^2=1$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 如图所示.

(1) 设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$, 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 联立

$$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$, $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)\times 4(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$, 则

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2} \\ x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2} \end{cases}$$

$$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-4k^2}{1+4k^2}.$$

$\because x_1x_2=4y_1y_2, \therefore \frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}=4\times\frac{m^2-4k^2}{1+4k^2}$, 整理得 $4k^2=1, \therefore k=\pm\frac{1}{2}$. 又

$$k_{BC}=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=k+\frac{2m}{x_2+x_1}=k+\frac{2m}{\frac{-8km}{1+4k^2}}=-\frac{1}{4k},$$

$\therefore k_{AB}+k_{BC}=k-\frac{1}{4k}+\frac{4k^2-1}{4k}=0$, 所以直线 AB 和直线 BC 的斜率之和为定值 0.

(2) 由 (1), 不妨取 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$, 则 $x_1+x_2=2m, x_1x_2=2(m^2-1)$. 设原点到直线 AB 的距离为 d, 则

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \\ &=\frac{|m|}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{|m|}{2}\sqrt{4m^2-4\cdot 2(m^2-1)}=\sqrt{m^2(2-m^2)}. \end{aligned}$$

又 $\sqrt{m^2(2-m^2)}\le\frac{m^2+2-m^2}{2}=1$, 所以 $S_{\triangle AOB}\le 1$, 当且仅当 $m^2=1$ 时取等号. $S_{四边形ABCD}=4S_{\triangle AOB}\le 4$, 即四边形 $ABCD$ 的面积的最大值为 4.

例题 3.298 (1) 求椭圆 Γ 的方程;

解 答案: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 由条件 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 四个顶点所围成的菱形面积为 $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2ab=4$, 又 $a^2=b^2+c^2$, 解得 $a=2$、$b=1$、$c=\sqrt{3}$, 故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$;

例题 3.299 (2) 已知直线 $x=1$ 与 x 轴交于点 M, 过点 M 的直线 AB 与 Γ 交于 A, B 两点, 点 P 为直线 $x=1$ 上任意一点, 设直线 AB 与直线 $x=4$ 交于点 N, 记 PA, PB, PN 的斜率分别为 k_1, k_2, k_0, 求证: $k_1+k_2=2k_0$.

解 答案: $k_1+k_2=2k_0$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),P(1,t)$,若直线 AB 与 x 轴不重合时,设直线 AB 的方程为 $x=my+1$,点 $N\left(4,\frac{3}{m}\right)$,$k_0=\frac{t-\frac{3}{m}}{-3}$. 代入椭圆方程整理得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$,显然 $\Delta>0$,则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$,所以

$$\begin{aligned}k_1+k_2&=\frac{t-y_1}{1-x_1}+\frac{t-y_2}{1-x_2}=\frac{(t-y_1)(1-x_2)+(t-y_2)(1-x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)}\\&=\frac{(t-y_1)(-my_2)+(t-y_2)(-my_1)}{(-my_1)(-my_2)}=\frac{-t(y_1+y_2)+2y_1y_2}{my_1y_2}\\&=\frac{-t\cdot\frac{-2m}{m^2+4}+2\cdot\frac{-3}{m^2+4}}{m\cdot\left(\frac{-3}{m^2+4}\right)}=\frac{2mt-6}{-3m}=2\cdot\frac{t-\frac{3}{m}}{-3}=2k_0.\end{aligned}$$

若直线 AB 与 x 轴重合时,则 $B(-2,0),A(2,0),N(4,0)$,此时 $k_1+k_2=\frac{t}{3}+\frac{t}{-1}=-\frac{2}{3}t$,而 $k_0=-\frac{1}{3}t$,故 $k_1+k_2=2k_0$.

例题 3.300　(2) 若点 P 为 x 轴正半轴上的任意一点,过点 P 作直线交抛物线于 A,B 两点,点 P 关于原点的对称点 M,连接 MA 交抛物线于点 N,求证:$k_{AP}+k_{NP}=0$.

解　答案:$k_{AP}+k_{NP}=0$.

(1) 设直线 l 方程为 $y=\frac{4}{3}(x-\frac{p}{2})$,$G(x_1,y_1),H(x_2,y_2)$,由抛物线的性质可知 $|FG|+|FH|=x_1+x_2+p=\frac{25}{4}$,$\therefore x_1+x_2=\frac{25}{4}-p$. 联立

$$\begin{cases}y=\frac{4}{3}(x-\frac{p}{2})\\y^2=2px\end{cases}$$

消 y 得 $16x^2-34px+4p^2=0$、$\Delta=(34p)^2-64\times4p^2=900p^2>0$、$\therefore x_1+x_2=\frac{34p}{16}=\frac{25}{4}-p$,解得 $p=2$,$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$,焦点 $F(2,0)$.

(2) 设 $P(m,0)$,则 $M(-m,0)$、$A(x_3,y_3)$、$N(x_4,y_4)$,直线 AM 的方程为 $x=ty-m$. 联立

$$\begin{cases}x=ty-m\\y^2=2px\end{cases}$$

消 x 得 $y^2-2pty+2pm=0$、$\Delta=4p^2t^2-8pm>0$、$\therefore y_3+y_4=2pt,y_3y_4=2pm$. 而

$$k_{AP}+k_{NP}=\frac{y_3}{x_3-m}+\frac{y_4}{x_4-m}=\frac{x_3y_4+x_4y_3-m(y_3+y_4)}{x_3x_4-m(x_3+x_4)+m^2},$$

又知

$$x_3y_4+x_4y_3-m(y_3+y_4)=(ty_3-m)y_4+(ty_4-m)y_3-m(y_3+y_4)=2ty_3y_4-2m(y_3+y_4)=4ptm-4ptm=0,$$

知乎@余命数　知乎@余命数

所以 $k_{AP}+k_{NP}=0$.

例题 3.301 （2024·江西鹰潭·二模）设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $P(2,-1)$，且离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $m:x=3$ 垂直 x 轴交 x 轴于 T，过 T 的直线 l 交椭圆 E 于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 两点，连接 PA,PB,PT.(1) 求椭圆 E 的方程；

解 答案：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. 由题意知 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{6},b=c=\sqrt{3}$ 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$；

知乎@余命数

例题 3.302 (2) 设直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2.(i) 求 k_1+k_2 的值；

解 答案：2.

易知 $T(3,0),k_{PT}=1,k_1=\frac{y_1+1}{x_1-2},k_2=\frac{y_2+1}{x_2-2}$，设直线 l 的方程为 $m(x-2)+n(y+1)=1$，由直线 l 过 $T(3,0)$ 知 $m+n=1$. 联立方程

$$\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\\ m(x-2)+n(y+1)=1\end{cases}$$

得 $(2-4n)(y+1)^2+(4n-4m)(x-2)(y+1)+(1+4m)(x-2)^2=0$，变形得

$$(2-4n)\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2+(4n-4m)\frac{y+1}{x-2}+1+4m=0,$$

即 $k_1+k_2=\frac{4n-4m}{4n-2}=\frac{4n-4(1-n)}{4n-2}=\frac{8n-4}{4n-2}=2$.

例题 3.303 （2024·重庆渝中·模拟预测）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，点 $A\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在 C 上. (1) 求椭圆 C 的方程；(2) 过点 $T(4,0)$ 的直线 l 交圆 C 于异于点 A 的 P,Q 两点，过点 P 作 x 轴的垂线与直线 AQ 交于点 M，设直线 AP,AQ 的率分别为 k_1,k_2. 证明：(i) k_1+k_2 为定值；(ii) 直线 AT 过线段 PM 的中点.

解 答案：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；$k_1+k_2=-1$；直线 AT 过 PM 中点.

知乎关注@余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(1) 由题可知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ a^2=b^2+c^2\\ \frac{1}{a^2}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)(i) (1) 当直线 l 的斜率为 0 时，则不妨设 $P(2,0),Q(-2,0)$，所以 $k_1+k_2=\frac{\frac{3}{2}}{1-2}+\frac{\frac{3}{2}}{1-(-2)}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$ 为定值.

(2) 当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 $l:x=my+4\,(m\neq 0)$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，联立直线 l 与椭圆 C 的方程

$$\begin{cases}x=my+4\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$$

消去 x 整理得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$，则 $\Delta>0$、$y_1+y_2=-\frac{24m}{3m^2+4}$、$y_1y_2=\frac{36}{3m^2+4}$，所以 $my_1y_2=-\frac{3}{2}(y_1+y_2)$. 于是

$$k_1+k_2=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\cdots=-1.$$

综上，$k_1+k_2=-1$ 为定值.

(ii) 设线段 PM 的中点为 $N(x_N,y_N)$，$M(x_1,y_M)$，易得 $\begin{cases}x_N=x_1\\ y_N=\frac{y_1+y_M}{2}\end{cases}$，可得直线 AQ 的方程为 $y=k_2(x-1)+\frac{3}{2}$，则 $y_M=k_2(x_1-1)+\frac{3}{2}$. 又 $y_1=k_1(x_1-1)+\frac{3}{2}$ 且 $k_1+k_2=-1$，故

$$y_N=\frac{1}{2}\left[k_1(x_1-1)+\frac{3}{2}+k_2(x_1-1)+\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[-(x_1-1)+3\right]=-\frac{x_1}{2}+2=-\frac{x_N}{2}+2,$$

即 N 在直线 $AT:y=-\frac{1}{2}x+2$ 上，因此直线 AT 过线段 PM 的中点.

例题 3.304　(2024·四川成都·模拟预测) 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>1)$ 的焦点为 F，过点 $P(1,-1)$ 作抛物线 C 的两条切线，切点分别为 M,N，$|FM|+|FN|=5$. (1) 求抛物线 C 的方程；(2) 过点 P 作两条倾斜角互补的直线 l_1,l_2，l_1 交抛物线 C 于 A,B 两点，l_2 交抛物线 C 于 C,D 两点，连接 AD,BC,AC,BD，设 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2，求 k_1+k_2 的值；(3) 设 $\angle DBC=\lambda\angle DAC$，求 λ 的值.

解　答案：(1) $x^2=4y$；(2) 0. (1) 设切点 $M\left(x_1,\frac{x_1^2}{2p}\right),N\left(x_2,\frac{x_2^2}{2p}\right)$，因为 $x^2=2py$，所以 $y=\frac{x^2}{2p}$，$y'=\frac{x}{p}$. 以点 M 为切点的切线的斜率为 $\frac{x_1}{p}$，以点 M 为切点的切线的方程为 $y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$，$\therefore$ 切线过点 $P(1,-1)$，所以 $-1-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(1-x_1)$，

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\therefore x_1^2-2x_1-2p=0$, 同理 $x_2^2-2x_2-2p=0$, 所以 x_1,x_2 为方程 $x^2-2x-2p=0$ 的两根, $\therefore |FM|+|FN|=\frac{x_1^2}{2p}+\frac{p}{2}+\frac{x_2^2}{2p}+\frac{p}{2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2p}+p$、$\therefore p^2-3p+2=0$、$(p-1)(p-2)=0$、$\because p>1$、$\therefore p=2$、$\therefore$ 抛物线方程为 $x^2=4y$. (2) 设 l_1 方程为 $y+1=k(x-1)$,联立 l_1 和抛物线方程,得 $\begin{cases}y=kx-(k+1)\\x^2=4y\end{cases}$、$\therefore x^2-4kx+4(k+1)=0$、$\Delta=(-4k)^2-16(k+1)=16(k^2-k-1)>0$, 解得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 设 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C),D(x_D,y_D)$, $\therefore x_A+x_B=4k$, 同理 $x_C+x_D=-4k$.$\therefore k_{AC}+k_{BD}=k_1+k_2=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}+\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{x_C^2-x_A^2}{4}\cdot\frac{1}{x_C-x_A}+\frac{x_D^2-x_B^2}{4}\cdot\frac{1}{x_D-x_B}$, $\therefore k_{AC}+k_{BD}=k_1+k_2=\frac{x_C+x_A}{4}+\frac{x_D+x_B}{4}=\frac{(x_A+x_B)+(x_C+x_D)}{4}=0$. (3) $|PA|\cdot|PB|=\sqrt{1+k^2}|x_A-1|\cdot|x_B-1|$,

例题 3.305 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知定点 $A(1,0)$, 点 M 在 x 轴上运动, 点 N 在 y 轴上运动, 点 P 为坐标平面内的动点, 且满足 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{NA}=0$, $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{PO}$. (1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;(2) 点 Q 为圆 $(x+2)^2+y^2=1$ 上一点, 由 Q 向 C 引切线, 切点分别为 S、T, 记 k_1,k_2 分别为切线 QS,QT 的斜率, 当 Q 运动时, 求 $\left|\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right|$ 的取值范围.

解 答案:(1) $y^2=4x$;(2) $[2,2\sqrt{3}]$.

(1) 设 $N(0,b)$、$M(a,0)$、$P(x,y)$. 因为 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{NA}=0$,所以 $(a-x,-y)\cdot(1,-b)=0$, 即 $a-x+by=0$. 因为 $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{PO}$, 所以 $(a,0)=(0,2b)+(-x,-y)$, 所以 $x=-a,y=2b$, 所以 $y^2=4x$.

(2) 设 $Q(x_0,y_0)$, $x_0\in[-3,-1]$. 由题意知切线斜率存在, 设为 k, 切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$. 联立

$$\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0)\\y^2=4x\end{cases}$$

化简得 $ky^2-4y+4y_0-4kx_0=0,\Delta=16-16k(y_0-kx_0)=0$,即 $x_0k^2-y_0k+1=0$、$\therefore k_1+k_2=\frac{y_0}{x_0}$、$k_1k_2=\frac{1}{x_0}$、$\therefore$

$$\left|\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{k_1k_2}\right|=\frac{\sqrt{y_0^2-4x_0}}{|x_0|}\cdot|x_0|=\sqrt{y_0^2-4x_0}.$$

将 $y_0^2=1-(x_0+2)^2$ 代入得

$$\left|\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right|=\sqrt{1-(x_0+2)^2-4x_0}=\sqrt{-x_0^2-8x_0-3},\quad x_0\in[-3,-1].$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

令 $f(x)=-x^2-8x-3$, 对称轴为 $x=-4$, 在 $[-3,-1]$ 上单调递减, $f(-3)=12$、$f(-1)=4$、∴ 取值范围为 $[2,2\sqrt{3}]$.

例题 3.306　设 M、N 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上的两点, M 与 N 的中点的纵坐标为 4, 直线 MN 的斜率为 $\frac{1}{2}$. (1) 求抛物线 C 的方程; (2) 已知点 $P(1,2)$, A、B 为抛物线 C(除原点外)上的不同两点, 直线 PA、PB 的斜率分别为 k_1,k_2, 且满足 $\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}=2$, 记抛物线 C 在 A、B 处的切线交于点 $S(x_s,y_s)$, 线段 AB 的中点为 $E(x_E,y_E)$, 若 $y_s=\lambda y_E$, 求 λ 的值.

解　答案:(1) $y^2=4x$ (2) $\lambda=1$.

(1) 设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$. 又 M、N 都在抛物线 C 上, 即 $y_1^2=2px_1,y_2^2=2px_2$. 由两式相减得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=2p(x_1-x_2)$, ∵ 直线 MN 的斜率为 $\frac{1}{2}$, ∴ $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$. 两边同除以 x_1-x_2, 且由已知得 $y_1+y_2=8$, 所以 $8\cdot\frac{1}{2}=2p$, 即 $p=2$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2) 设 $A(\frac{y_3^2}{4},y_3)$、$B(\frac{y_4^2}{4},y_4)$、$S(x_s,y_s)$. 因为

$$\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}=\frac{\frac{y_3^2}{4}-1}{y_3-2}-\frac{\frac{y_4^2}{4}-1}{y_4-2}=\frac{y_3-y_4}{4},$$

所以 $\frac{y_3-y_4}{4}=2$, 所以 $y_3-y_4=8$. 设直线 SA 的斜率为 k, 则直线 $SA:y-y_3=k(x-\frac{y_3^2}{4})$, 由

$$\begin{cases}y-y_3=k(x-\frac{y_3^2}{4})\\ y^2=4x\end{cases}$$

消 x 得 $\frac{ky^2}{4}-y+y_3-\frac{y_3^2}{4}=0$. 由 $\Delta=0$, 得 $(\frac{ky_3}{2}-1)^2=0$, 即 $k=\frac{2}{y_3}$. 所以直线 $SA:y-y_3=\frac{2}{y_3}(x-\frac{y_3^2}{4})$, 同理得直线 $SB:y-y_4=\frac{2}{y_4}(x-\frac{y_4^2}{4})$. 联立以上两个方程解得 $y_s=\frac{y_3+y_4}{2}$, 又 $y_E=\frac{y_3+y_4}{2}$, 所以 $y_s=y_E$, 所以 $\lambda=1$.

例题 3.307　(3) 若过 A_1,A_2 作抛物线 C 的切线 PA_1,PA_2, 交点 P 在直线 $x=-1$ 上, 求 $\triangle A_1OA_2$ 面积的最小值.

解　答案: $\sqrt{3}$. (1) 设 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2)$, 由题意知, 设直线 $A_1A_2:x=my+t(t>0,m>0)$, 又直线 A_1A_2 与 x 正半轴交于 A_3, 与 y 负半轴交于 A_4, 则 $A_3(t,0),A_4(0,-\frac{t}{m})$. 联立 $\begin{cases}y^2=2x\\ x=my+t\end{cases}$, 整理得 $y^2-2my-2t=0$, 所以 $y_1+y_2=2m,y_1y_2=-2t$, 则 $x_1+x_2=my_1+t+my_2+t=m(y_1+y_2)+2t=2m^2+2t$,

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$x_1x_2=\frac{1}{4}(y_1y_2)^2=t^2$,若$\angle A_1OA_2\geq 90^\circ$,则$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=x_1x_2+y_1y_2=t^2-2t<0$,解得$t\in(0,2)$,又$A_3(t,0)$,则$A_3$横坐标的取值范围为$(0,2)$;

(2) 因为G为重心,所以$G\left(\frac{x_1+x_2}{3},\frac{y_1+y_2}{3}\right)$,由(1)可得$G\left(\frac{2m^2+2t}{3},\frac{2m}{3}\right)$,设$A_3(x_3,y_3),A_4(x_4,y_4)$,又直线$A_1A_2$与$x$正半轴交于$A_3$,与$y$负半轴交于$A_4$,则$y_3=0,x_4=0$,由直线$A_1A_2:x=my+t(t>0,m>0)$,则$k_1=\frac{1}{m},A_3(t,0),A_4\left(0,-\frac{t}{m}\right)$,所以$k_2=\frac{\frac{2m}{3}-0}{\frac{2m^2+2t}{3}-t}=\frac{2m}{2m^2-t}$,由$k_2=2k_1$,则$\frac{2m}{2m^2-t}=\frac{2}{m}$,即$m^2=t$,又$\lambda=\frac{|A_1A_2|}{|A_3A_4|}=\frac{\sqrt{(y_1-y_2)^2-4y_1y_2}}{y_3-y_4}=\frac{\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}{0-\left(-\frac{t}{m}\right)}=\frac{\sqrt{(2m)^2-4(-2t)}}{0-\left(-\frac{t}{m}\right)}=\frac{m\sqrt{4m^2+8t}}{t}=\frac{m\sqrt{4m^2+8m^2}}{m^2}=2\sqrt{3}$,因此$|A_1A_2|=|A_3A_4|$时,$\lambda$为定值.

(3) 设过点$M(x_0,y_0)(x_0eq0,y_0eq0)$的切线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$,则联立方程$\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0)\\y^2=2x\end{cases}$,化简可得$ky^2-2y+2y_0-2kx_0=0$,因为直线与抛物线相切,则$\Delta=4-4k(2y_0-2kx_0)=0$,得$2kx_0k^2-2y_0k+1=0$,而$M(x_0,y_0)$为抛物线上一点,则$y_0^2=2x_0$,代入可得$y_0^2k^2-2y_0k+1=0$,得$k=\frac{1}{y_0}$,$y-y_0=\frac{1}{y_0}(x-x_0)$,则$y\cdot y_0=x-x_0+y_0^2$,即$y_0y=x+x_0$,即过点$M$的切线方程为$y_0y=x+x_0$.因此过$A_1(x_1,y_1)$的切线$PA_1:y_1y=x+x_1$,过$A_2(x_2,y_2)$的切线$PA_2:y_2y=x+x_2$,又切线$PA_1$与切线$PA_2$的交点$P$在直线$x=-1$上,可设$P(-1,n)$,

例题 3.308 如图,已知椭圆$C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$与顶点$A(0,-2)$,经过点$E(0,1)$且斜率存在的直线$l$交椭圆于$Q,N$两点,点$B$与点$Q$关于坐标原点对称,连接$AB,AN$.求证:存在实数$\lambda$使得$k_{AN}=\lambda k_{AB}$恒成立.

解 答案:$\lambda=3$.

设$y=kx+1$,由

$$\begin{cases}y=kx+1,\\2x^2+3y^2-12=0,\end{cases}$$

可得$(2+3k^2)x^2+6kx-9=0$.设$N(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,则

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{6k}{2+3k^2},\\x_1x_2=-\frac{9}{2+3k^2}.\end{cases}$$

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

$x_1y_2+x_2y_1=x_1(kx_2+1)+x_2(kx_1+1)=2kx_1x_2+x_1+x_2$、$2kx_1x_2=3(x_1+x_2)$、$\therefore x_1y_2+x_2y_1=4(x_1+x_2)$. 又 N,E,Q 三点共线, 则 $\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{y_1-1}{x_1}$, 即 $x_2y_1-x_1y_2=x_2-x_1$, $\therefore\begin{cases}x_1y_2=\frac{5}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2,\\ x_2y_1=\frac{3}{2}x_1+\frac{5}{2}x_2.\end{cases}$ $\therefore A(0,-2),B(-x_2,-y_2)$, 则

$$\lambda=\frac{k_{AN}}{k_{AB}}=\frac{(y_1+2)x_2}{(y_2-2)x_1}=\frac{x_2y_1+2x_2}{x_1y_2-2x_1}=\frac{\frac{3}{2}x_1+\frac{9}{2}x_2}{\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2}=3,$$

$\therefore$ 存在实数 $\lambda=3$, 使得 $k_{AN}=3k_{AB}$ 恒成立.

例题 3.309　(2024·全国·模拟预测) 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点, 抛物线 C 与圆 E 在第一象限的公共点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$, $|PF|=\frac{5}{3}$.
(1) 求抛物线 C 与椭圆 E 的标准方程;
(2) 若 A_1,A_2 分别是椭圆 E 的左、右顶点, M,N 是椭圆 E 上不同于 A_1,A_2 的两点, 直线 A_1M 的斜率是直线 A_2N 的斜率的 3 倍, 证明: 直线 MN 过定点, 并求出定点的坐标.

解　答案: (1) $y^2=4x$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2) $(1,0)$. (1) 由抛物线的定义知 $|PF|=\frac{p}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, $\therefore p=2$, $\therefore$ 抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$, $\because$ 抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$,

例题 3.310　已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(3,0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 过点 $P(3,2)$ 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点. (1) 若 C 的上顶点为 B, 直线 BM,BN 的斜率分别为 k_1,k_2, 求 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 的值; (2) 过点 M 且垂直于 x 轴的直线交直线 AN 于点 Q, 证明: 线段 MQ 的中点在定直线上.

解　答案: (1) -3 (2) 证明见解析. (1) 由题意知 $\begin{cases}a=3\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$, 解得 $a=3$、$b=2$、$c=\sqrt{5}$, 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, 显然直线 l 的斜率存在, 设直线 l 的方程为: $y=k(x-3)+2$、$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$, 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=k(x-3)+2\end{cases}$, 得 $(4+9k^2)x^2+18k(2-3k)x+81k^2-108k=0$, 由方程 $(4+9k^2)x^2+18k(2-3k)x+81k^2-108k=0$ 的判别式 $\Delta>0$, 可得 $k>0$, 所以 $x_1+x_2=-\frac{18k(2-3k)}{4+9k^2}$, $x_1x_2=\frac{81k^2-108k}{4+9k^2}$, 易得 $B(0,2)$, 所以 $k_1=\frac{y_1-2}{x_1}=\frac{kx_1-3k}{x_1}$, $k_2=\frac{y_2-2}{x_2}=\frac{kx_2-3k}{x_2}$, 所以 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{kx_1-3k}+\frac{x_2}{kx_2-3k}=$

$\frac{x_1(x_2-3)+x_2(x_1-3)}{k(x_1-3)(x_2-3)}=\frac{2x_1x_2-3(x_1+x_2)}{k(x_1x_2-3(x_1+x_2)+9)}=\frac{2\cdot\frac{81k^2-108k}{4+9k^2}+\frac{54k(2-3k)}{4+9k^2}}{k\left(\frac{81k^2-108k}{4+9k^2}+\frac{54k(2-3k)}{4+9k^2}+9\right)}=-3$, (2) 证明：设线段 MQ 的中点为 (x_0,y_0), 又 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

例题 3.311 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B, 离心率为 e, 且 $|AB|=\frac{8\sqrt{3}}{3}e=4$. (1) 求椭圆 C 的标准方程；(2) 设点 P,Q 为椭圆上异于 A,B 的两动点, 记直线 AP 的斜率为 k_1, 直线 QB 的斜率为 k_2, 已知 $k_1=7k_2$. 直线 PQ 与 x 轴相交于点 M, 求 $\triangle APM$ 的面积的最大值.

解 答案：(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2) $\frac{1}{4}$.

(1) 因为 $|AB|=\frac{8\sqrt{3}}{3}e=4$, 所以

$$\begin{cases}\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{c}{a}=4,\\ 2a=4,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2) 由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得点 $A(-2,0),B(2,0)$, 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$, 直线 AP：$x=t_1y-2$, 直线 $BQ:x=t_2y+2$. 联立

$$\begin{cases}x=t_1y-2,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$$

消去 x 得 $(t_1^2+4)y^2-4t_1y=0$, 解得 $y_1=\frac{4t_1}{t_1^2+4}$. 同理联立

$$\begin{cases}x=t_2y+2,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$$

消去 x 得 $(t_2^2+4)y^2+4t_2y=0$, 解得 $y_2=-\frac{4t_2}{t_2^2+4}$. 因为 $k_{AP}=7k_{BQ}$, 且 $k_{AP}=\frac{1}{t_1},k_{BQ}=\frac{1}{t_2}$, 所以 $t_2=7t_1$, 此时 $y_2=-\frac{4t_2}{t_2^2+4}=-\frac{28t_1}{49t_1^2+4}$. 设 $M(x_0,0)$, 由 P,M,Q 三点共线, 所以 $\frac{x_1-x_0}{y_1}=\frac{x_2-x_0}{y_2}$, 则

$$\begin{aligned}x_0&=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}=\frac{(t_2y_2+2)y_1-(t_1y_1-2)y_2}{y_1-y_2}=\frac{(t_2-t_1)y_1y_2+2(y_1+y_2)}{y_1-y_2}\\&=\frac{(7t_1-t_1)\left(-\frac{112t_1^2}{(t_1^2+4)(49t_1^2+4)}\right)+2\left(\frac{4t_1}{t_1^2+4}-\frac{28t_1}{49t_1^2+4}\right)}{\frac{4t_1}{t_1^2+4}-\left(-\frac{28t_1}{49t_1^2+4}\right)}\end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$=\frac{-24\times 28t_1^3+8t_1(49t_1^2+4)-56t_1(t_1^2+4)}{4t_1(49t_1^2+4)+28t_1(t_1^2+4)}$$
$$=\frac{-84t_1^2-48}{56t_1^2+32}=-\frac{12(7t_1^2+4)}{8(7t_1^2+4)}=-\frac{3}{2},$$

所以 $M\left(-\frac{3}{2},0\right)$. 所以

$$S_{\triangle APM}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}|y_1|=\frac{1}{4}\cdot\frac{4|t_1|}{t_1^2+4}=\frac{1}{|t_1|+\frac{4}{|t_1|}}\leq\frac{1}{4},$$

当且仅当 $|t_1|=\frac{4}{|t_1|}$, 即 $|t_1|=2$ 时等号成立. 所以 $S_{\triangle APM}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

例题 3.312　已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 A, B 在椭圆上运动. 当直线 AB 过椭圆右焦点并垂直于 x 轴时, $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ (O 为坐标原点). (1) 求椭圆 C 的标准方程; (2) 延长 OA 到 M, 使得 $OM=3OA$, 且 MB 与椭圆 C 交于点 Q, 若直线 OA, OB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$, 求 $\frac{BM}{BQ}$ 的值.

解　答案: (1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; (2) 5.

(1) 由题意可得

$$\begin{cases}a^2=b^2+c^2\\ \frac{1}{2}\times\frac{2b^2}{a}\times c=\frac{3}{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

解得 $a=2$、$b=\sqrt{3}$、$c=1$, 所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$Q(x_3,y_3)$、$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BQ}$, 则 $M(3x_1,3y_1)$、$(3x_1-x_2,3y_1-y_2)=\lambda(x_3-x_2,y_3-y_2)$、$\therefore$

$$\begin{cases}x_3=\frac{3}{\lambda}x_1+\frac{\lambda-1}{\lambda}x_2,\\ y_3=\frac{3}{\lambda}y_1+\frac{\lambda-1}{\lambda}y_2,\end{cases}$$

$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{3}{4}$, $\therefore\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}=0$, 且 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$、$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$、$\frac{x_3^2}{4}+\frac{y_3^2}{3}=1$、$\therefore$

$$\frac{(\frac{3}{\lambda}x_1+\frac{\lambda-1}{\lambda}x_2)^2}{4}+\frac{(\frac{3}{\lambda}y_1+\frac{\lambda-1}{\lambda}y_2)^2}{3}=1,$$

整理可得

$$\frac{9}{\lambda^2}\left(\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}\right)+\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\left(\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}\right)+\frac{6(\lambda-1)}{\lambda^2}\left(\frac{x_1x_2}{4}+\frac{y_1y_2}{3}\right)=1,$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$\therefore \frac{9}{\lambda^2}+\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}=1$, 即 $\lambda=5$, 故 $\frac{BM}{BQ}=5$.

知乎@余命数

3.20.5 本节小结

- 斜率和、差、商、积: 设线联立, 韦达定理表示交点坐标, 代入目标斜率表达式消参.
- 斜率积与圆锥曲线第三定义相关, 椭圆上一点与两个顶点连线的斜率积为 $-\frac{b^2}{a^2}$.
- 消参后通常得到定值; 若有参数剩余, 则求范围与最值.

3.20.6 本节习题

3.105. 设直线 $y=kx+1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于 A,B 两点. 求椭圆在 A,B 处切线斜率之和, 用 k 表示.

知乎@余命数

3.106. 设椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上两点 A,B 满足 $OA\perp OB$(O 为原点). 求 $k_{OA}\cdot k_{OB}$ 的值.

知乎@余命数

3.21 圆幂与反演

知乎@余命数

切割线定理与相交弦定理从两个角度处理点与圆的位置关系. 把两者统一起来, 就得到圆幂定理. 以圆幂为工具, 进一步引入反演变换, 即一种把圆内与圆外互相对换的几何变换, 它将直线与圆相互转化, 是纯几何证明的有力工具. 根轴与根心的代数处理见 第3.13节, 本节从几何角度补充.

知乎@余命数

3.21.1 圆幂定理

定义 3.10 (点对圆的幂) 设 $\odot O$ 的半径为 R, 平面上一点 P 到圆心 O 的距离为 $d=OP$. 称

$$\mathrm{Pow}_{\odot O}(P)=d^2-R^2 \tag{3-38}$$

为点 P 对 $\odot O$ 的**幂**.

知乎@余命数

圆外的点幂为正, 圆内的点幂为负, 圆上的点幂为零.

定理 3.38 (圆幂定理) 过点 P 引直线与 $\odot O$ 相交于 A、B 两点(相切时 A 与 B 重合), 则

$$PA \cdot PB = \left|\mathrm{Pow}_{\odot O}(P)\right| \tag{3-39}$$

此乘积与直线方向无关, 仅与点 P 和 $\odot O$ 有关.

证明 设直线 AB 交 $\odot O$ 于 A、B, M 为 AB 中点, 则 $OM \perp AB$. 由 $OA = R$ 及 $OP = d$,

$$MA = \sqrt{R^2 - OM^2}, \quad PM = \sqrt{d^2 - OM^2}$$

当 P 在圆外时, $PA \cdot PB = (PM + MA)(PM - MA) = PM^2 - MA^2 = d^2 - R^2$.
当 P 在圆内时, $PA \cdot PB = (MA - PM)(MA + PM) = MA^2 - PM^2 = R^2 - d^2$.
两种情形合并为 $PA \cdot PB = |d^2 - R^2|$. □

推论 3.1 (切割线定理) P 在 $\odot O$ 外, PT 为切线, PAB 为割线, 则 $PT^2 = PA \cdot PB$.

推论 3.2 (相交弦定理) 弦 AB 与 CD 交于圆内点 P, 则 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

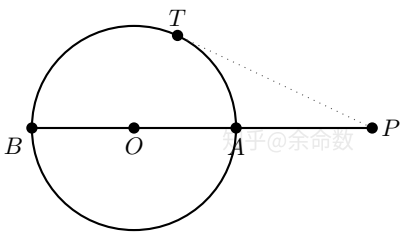


图 3.45　圆幂定理, 割线 PAB 与切线 PT 满足 $PA \cdot PB = PT^2$

例题 3.313 (圆幂定理求弦长) P 是圆 $x^2 + y^2 = 25$ 外一点, $P = (7, 1)$. 过 P 引圆的割线, 交圆于 A、B. 求 $PA \cdot PB$.

解 圆心 $O = (0, 0)$, 半径 $R = 5$.$OP^2 = 49 + 1 = 50$, $R^2 = 25$. 由圆幂定理 (3-39),

$$PA \cdot PB = OP^2 - R^2 = 50 - 25 = 25$$

知乎@余命数
知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.21.2 反演变换

圆幂定理把点与圆的关系浓缩成一个数. 反演变换从这个数出发, 让点 P 与其像 P' 满足 $OP\cdot OP'=R^2$, 即圆幂取定值 R^2. 反演把圆内与圆外对换, 又保持角度, 因而能把交错的圆与直线配置化成简单的.

定义 3.11 (反演变换) 设 $\odot O$ 的半径为 R, P 为平面上异于 O 的点. 在射线 OP 上取点 P' 使 $OP\cdot OP'=R^2$, 则称 P' 为 P 关于 $\odot O$ 的**反演像**, $\odot O$ 称为**反演圆**, O 称为**反演中心**. 映射 $P\mapsto P'$ 称为关于 $\odot O$ 的反演变换.

反演变换把反演圆上的点保持不动, 把圆内点映到圆外, 把圆外点映到圆内.

定理 3.39 (反演的基本性质) 反演变换具有以下性质:

1. **对合性**: 反演的逆变换仍是同一反演, 即 $P''=P$.
2. **保角性**: 反演保持两条曲线在交点处的夹角大小, 但方向反转.
3. **距离公式**: 反演一般不保持距离, 但满足

$$P'Q'=\frac{R^2}{OP\cdot OQ}\cdot PQ \tag{3-40}$$

证明 仅证距离公式. 设 $\angle POQ=\theta$. 由 $OP'=R^2/OP, OQ'=R^2/OQ$,

$$P'Q'^2=OP'^2+OQ'^2-2OP'\cdot OQ'\cos\theta=\frac{R^4}{OP^2}+\frac{R^4}{OQ^2}-\frac{2R^4\cos\theta}{OP\cdot OQ}$$

$$=\frac{R^4}{OP^2\cdot OQ^2}\left(OQ^2+OP^2-2OP\cdot OQ\cos\theta\right)=\frac{R^4}{OP^2\cdot OQ^2}\cdot PQ^2$$

开方即得 (3-40). □

定理 3.40 (反演下的像)

1. 过反演中心的直线, 反演后仍为该直线 (点在射线上互换).
2. 不过反演中心的直线, 反演后为过反演中心的圆.
3. 不过反演中心的圆, 反演后为不过反演中心的圆.
4. 过反演中心的圆, 反演后为不过反演中心的直线.
5. 与反演圆正交的圆, 反演后仍为自身.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 仅证第 2 条. 设直线 l 不过 O, O 到 l 的垂足为 H, $OH=h>0$. l 上点 P 的反演像 P' 满足 $OP'=R^2/OP$. 设 $\angle POH=\alpha$, 则 $OP=h/\cos\alpha$, 故 $OP'=R^2\cos\alpha/h$. 这是以 O 为原点、直径 R^2/h(沿 OH 方向)的圆的极坐标方程, 即 P' 在以 OH' 为直径的圆上, 其中 H' 是 H 的反演像, $OH'=R^2/h$. □

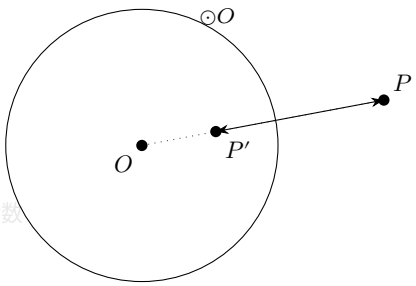


图 3.46　反演变换, $OP\cdot OP'=R^2$

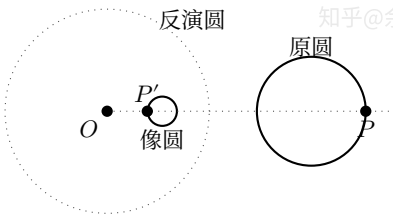


图 3.47　不过反演中心的圆, 反演后仍为圆; 离中心近的像离中心远

例题 3.314 (反演求轨迹) 求直线 $x=2$ 关于单位圆 $x^2+y^2=1$ 的反演像.

解 直线 $x=2$ 不过反演中心 $O=(0,0)$. 直线上点 $P=(2,t)$ 的反演像 $P'=\frac{P}{|P|^2}=\frac{(2,t)}{4+t^2}$. 设 $P'=(x',y')$, 则 $x'=\frac{2}{4+t^2}$, $y'=\frac{t}{4+t^2}$. 消去 t. 由 $t=2y'/x'$, 代入 $x'=\frac{2}{4+4y'^2/x'^2}$ 得 $x'(4+4y'^2/x'^2)=2$, 即 $4x'^2+4y'^2=2x'$, 亦即

$$\left(x'-\frac{1}{4}\right)^2+y'^2=\frac{1}{16}$$

反演像为圆 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}$, 圆心 $(1/4,0)$, 半径 $1/4$, 过反演中心.

3.21.3 根轴与根心的几何意义

第3.13节 从圆方程相减的代数角度引入了根轴与根心. 这里从圆幂的几何角度重新审视.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 3.41 (根轴的几何刻画) 设两圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 不同心. 它们的根轴就是对两圆幂相等的点的轨迹, 是一条垂直于连心线 O_1O_2 的直线. 两圆相交时, 根轴是公共弦; 相切时, 根轴是过切点的公切线.

证明 点 P 在根轴上当且仅当 $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$. 以 O_1O_2 为 x 轴建系, $O_1 = (0,0)$、$O_2 = (d,0)$、$P = (x,y)$, 则 $x^2 + y^2 - r_1^2 = (x-d)^2 + y^2 - r_2^2$, 化简得 $x = (d^2 + r_1^2 - r_2^2)/(2d)$, 是垂直于 O_1O_2 的直线. 两圆相交时, 交点对两圆幂均为零, 故交点在根轴上, 根轴即公共弦. □

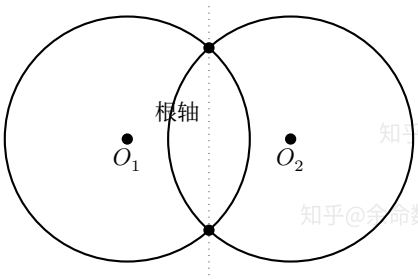


图 3.48 两圆的根轴, 即到两圆幂相等的点的轨迹, 相交时即公共弦

定理 3.42 (根心定理的几何刻画) 三个圆心不共线的圆, 三条根轴交于同一点(圆心共线时三条根轴互相平行). 该点对三圆的幂相等.

证明 设 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 的根轴分别为 l_{12}、l_{13}、l_{23}. 设 $P = l_{12} \cap l_{13}$, 则 P 对 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 幂相等, 且对 $\odot O_1$ 与 $\odot O_3$ 幂相等, 故对 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 幂也相等, 即 P 在 l_{23} 上. □

根心把三个圆的幂统一到一个点, 过根心任作一直线交三圆于 A_i, B_i, 则 $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = PA_3 \cdot PB_3$. 三圆两两相交时, 三条公共弦交于根心; 三圆共点时, 根心就是那个公共点.

例题 3.315 (用反演化简共圆判定) A、B、C、D 四点共圆, P 为圆外一点, PA、PB、PC、PD 分别交圆于另一点 A'、B'、C'、D'. 证明 $A'B'C'D'$ 四点共圆.

解 以 P 为反演中心, 取反演半径 R 使 $R^2 = PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = PD \cdot PD'$(由圆幂定理, 这些乘积相等). 则 A'、B'、C'、D' 分别是 A、B、C、D 的反演像. 由 定理 3.40 第 3 条, 不过反演中心的圆反演后仍为圆, 故 $A'B'C'D'$ 共圆.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

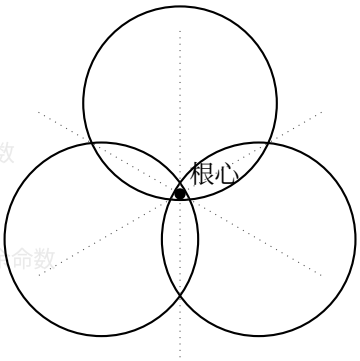


图 3.49　三圆的根轴交于根心, 即到三圆幂相等的点

3.22 圆锥曲线的光学性质

第3.3节 证明了椭圆的反射性质, 从一个焦点发出的光经椭圆内壁反射必汇聚于另一焦点. 双曲线与抛物线也有各自的反射性质, 三条定理放在一起, 正好凑成几何光学里最漂亮的一组结论. 接着我们就把另外两条补齐.

3.22.1 双曲线的反射性质与虚焦点

定理 3.43 (双曲线的反射性质) 设 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 右支上一点, F_1,F_2 是左右焦点, 则 P 处的切线平分 $\angle F_1PF_2$ 的外角. 于是从一个焦点 F_2 射向双曲线镜面的光线, 反射后散开, 但反射线的反向延长线全部穿过另一焦点 F_1, 观察者会觉得光是从 F_1 发出的, F_1 称为**虚焦点**.

证明 设 $P(x_0,y_0)$ 在右支上, $c^2=a^2+b^2$, 离心率 $e=c/a$. 由 第3.3节 的焦半径公式, 右支上

$$|PF_1|=ex_0+a,\qquad |PF_2|=ex_0-a.$$

切线 $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ 的一个法向量是 $\vec{n}=\left(\dfrac{x_0}{a^2},-\dfrac{y_0}{b^2}\right)$. 用 $\vec{n}$ 分别与两条焦半径向量作数量积. 由曲线方程 $y_0^2/b^2=x_0^2/a^2-1$,

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_1}=-\frac{x_0(c+x_0)}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{cx_0}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}-1=-\frac{cx_0+a^2}{a^2},$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{x_0(c-x_0)}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{cx_0}{a^2}-1=\frac{cx_0-a^2}{a^2}.$$

除以各自的焦半径, 并注意 $ex_0+a=\dfrac{cx_0+a^2}{a}$, $ex_0-a=\dfrac{cx_0-a^2}{a}$, 得

$$\vec{n}\cdot\frac{\overrightarrow{PF_1}}{|PF_1|}=-\frac{1}{a},\qquad \vec{n}\cdot\frac{\overrightarrow{PF_2}}{|PF_2|}=\frac{1}{a}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

两个单位向量与法向量的夹角余弦大小相等、符号相反, 即切线与两条焦半径成等角, 而且平分的是外角. 按反射定律, 从 F_2 射来的光线在 P 处反射后, 反射线沿 $\overrightarrow{PF_2}$ 的延长方向射出, 其反向延长线经过 F_1. □

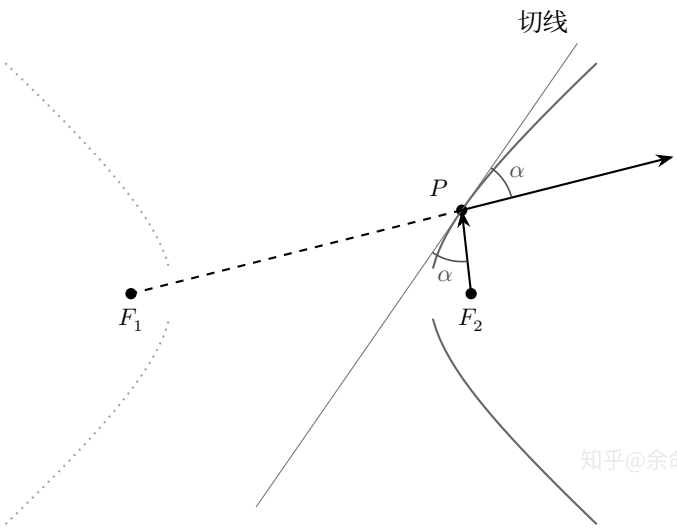


图 3.50 双曲线的反射(P 在 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 右支上): 入射线 F_2P 在 P 处反射, 反射线与切线成等角 α, 虚线为反向延长线, 经过虚焦点 F_1.

3.22.2 抛物线的平行光聚焦性质

抛物线的反射性质有一个出乎意料干净的刻画, 焦点关于切线的对称点可以直接写出来.

定理 3.44 (抛物线的反射性质) 设 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上, 焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, 准线 $x=-\frac{p}{2}$, 则 F 关于 P 处切线的对称点恰是 P 在准线上的投影 $A'\left(-\frac{p}{2},\,y_0\right)$. 因此切线平分 PF 与过 P 的轴平行线所成的角, 沿对称轴方向平行的光线经抛物线反射后全部汇聚于焦点.

证明 P 处的切线为 $yy_0=p(x+x_0)$, 写成一般式 $px-y_0y+px_0=0$, 法向量 $\vec{n}=(p,-y_0)$. 设 F 关于切线的对称点为 F', 则

$$\overrightarrow{FF'}=-2\cdot\frac{p\cdot\frac{p}{2}+px_0}{p^2+y_0^2}\,(p,-y_0).$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由 $y_0^2=2px_0$ 得分母 $p^2+y_0^2=p(2x_0+p)$, 分子 $p\left(\frac{p}{2}+x_0\right)$, 于是

$$\overrightarrow{FF'}=-\frac{2p(x_0+\frac{p}{2})}{p(2x_0+p)}(p,-y_0)=-(p,-y_0)=(-p,\ y_0),$$

$$F'=F+(-p,y_0)=\left(-\frac{p}{2},\ y_0\right),$$

正是 P 在准线上的投影. 由于 $|PF|=|PA'|$(抛物线定义), 又由对称性有 $|PF|=|PF'|$, 切线是等腰三角形 FPF' 顶角平分线所在的直线, 于是切线与 PF、与水平线 PA' 成等角. 沿轴向平行的光线在 P 处反射, 反射角等于入射角, 反射线便沿 PF 射出, 汇聚于 F. □

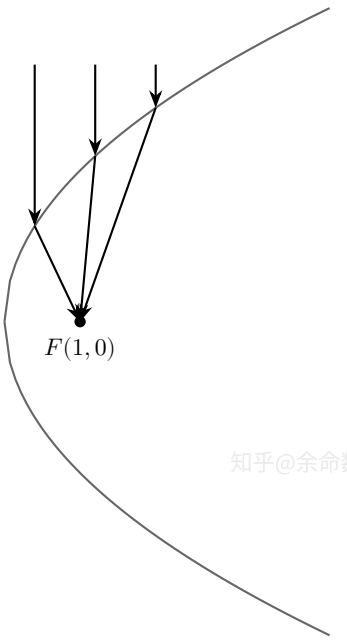


图 3.51　抛物线 $y^2=4x$ 的反射: 平行于轴的入射光全部汇聚于焦点, 这是探照灯、太阳灶与抛物面天线的原理.

例题 3.316 (手算一个反射点) 抛物线 $y^2=4x$ 上取 $P(1,2)$, 验证 定理 3.44 的结论.

解 此时 $p=2$, 焦点 $F(1,0)$, 准线 $x=-1$, P 在准线上的投影是 $A'(-1,2)$.P 处切线为 $2y=2(x+1)$, 即 $y=x+1$. 先求 $F(1,0)$ 关于直线 $y=x+1$ 的对称点, 直线写成 $x-y+1=0$, 代入对称公式得

$$F'=(1,0)-2\cdot\frac{1-0+1}{1^2+(-1)^2}(1,-1)=(1,0)-(2,-2)=(-1,2)=A'.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

切线 $y=x+1$ 倾斜角 45°, 恰好平分水平线与竖直线 PF 所成的直角, 从上方平行射入的光在 P 处竖直向下折入焦点.

知乎@余命数

3.22.3 三条曲线, 一条规律

现在把三条反射性质并排读. 椭圆的切线平分两焦半径夹角的**内**角, 双曲线的切线平分**外**角, 抛物线的切线平分焦半径与轴平行线的夹角. 把抛物线看成另一个焦点退到无穷远的椭圆, 轴平行线正是通向无穷远焦点的焦半径, 三条定理便合成一条, 二次曲线上任意一点处的切线, 平分两条焦半径, 其中一条可以是退化的所成的角. 从这一条规律出发, 椭圆把光从一个焦点搬进另一个焦点, 双曲线把光散射成来自虚焦点的样子, 抛物线则把平行的星光收拢成一点.

这些性质不只是比喻. 探照灯与汽车大灯的反射面是旋转抛物面, 灯丝放在焦点, 出射光便是平行光束, 定理 3.44 反过来用即是; 传说阿基米德在叙拉古围城战中排布铜镜聚阳光焚烧罗马舰队, 用的也是把阳光汇聚到一点的原理. 天文台的射电望远镜与太阳灶把同一原理用于接收, 平行入射的电磁波或阳光被反射面汇聚到焦点处的接收器. 椭圆回声廊里, 一个人站在焦点处低语, 站在另一焦点的人听得清楚, 声波走的正是 第3.3节 的反射路线. 卡塞格伦望远镜更把两面镜子组合起来, 主镜是抛物面, 副镜是双曲面, 让双曲面的一个焦点与抛物面的焦点重合, 光先被抛物面送往这个重合点, 半路被双曲面截住, 散射成来自虚焦点的光, 而 定理 3.43 保证虚焦点正是双曲面的另一个焦点, 光在那里被收集. 一支望远镜, 同时用上了两条反射定理.

这套双曲线定位系统在历史上真实使用过, 台链沿海岸布设, 船只靠测量时间差在双曲线网格上定出自己的位置, 在全球定位卫星出现之前, 它是远洋导航的主力.

例题 3.317 (双曲线导航) 海岸线上有两组电台. 第一组 $A(-30,0)$ 与 $B(30,0)$ 相距 60 km, 第二组 $C(0,30)$ 与 $D(0,-30)$ 相距 60 km. 船上的接收机测得 $|PA|-|PB|=20$ km, $|PC|-|PD|=20$ km(距离差来自信号到达的时间差, 无线电波以光速传播). 求船的位置.

解 到 A,B 距离差为定值 20 的轨迹是双曲线的一支, $2a=20$、$c=30$、$b^2=900-100=800$, 且船离 B 近, 故在右支

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{800}=1\quad(x>0).$$

到 C,D 距离差 20 的轨迹是上下开口的双曲线 $y^2/100-x^2/800=1$ 的一支, 船离 D 近, 故取下半支 $y<0$. 两式联立, 第一式乘 8 得 $8x^2-y^2=800$, 第二式乘 8 得

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

$8y^2-x^2=800$, 相减得 $9x^2=9y^2$, 即 $y=\pm x$. 船在下半支与右半支, 取 $y=-x$, 代回 $8x^2-x^2=800$ 得

$$x=\sqrt{\frac{800}{7}}\approx 10.7,\qquad y=-\sqrt{\frac{800}{7}}\approx -10.7.$$

船位于点 $(10.7,-10.7)$ 附近, 与两台核实, $|PA|\approx 42.1$, $|PB|\approx 22.1$, 差恰为 20 km.

这套办法的双曲线定位系统在历史上真实使用过, 台链沿海岸布设, 船只靠测量时间差在双曲线网格上定出自己的位置, 在全球定位卫星出现之前, 它是远洋导航的主力.

练习 3.107　双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上取 $P\left(5,\dfrac{16}{3}\right)$, 求 P 处的切线, 并验证切线与两条焦半径所成的角相等.

练习 3.108　椭圆与双曲线共焦点, 称为共焦曲线族. 证明同一族中的椭圆与双曲线在交点处互相垂直, 即两曲线在交点处的切线互相垂直.

知乎@余命数

练习 3.109　探照灯的反射面是旋转抛物面, 口径直径 1.2 m, 深度 0.1 m. 灯丝应放在距顶点多远处?

知乎@余命数

3.23 焦点弦

过焦点的弦叫**焦点弦**. 第3.3节 已经就抛物线算过一条焦点弦的长度, 这里把三类曲线放在一起看, 焦点弦有哪些不依赖具体位置的固有性质. 只消把焦半径写成方向的函数, 一串结论会接连落下.

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3.23.1 焦半径的方向公式

引理 3.3 (焦半径的方向公式) 设过焦点 F 的直线与曲线交出弦 AB, 直线方向与 x 轴(对称轴)夹角为 θ, 记沿该方向到交点的有向距离为 $r(\theta)$, 离心率为 e, 抛物线 $y^2=2px$ 的焦参数为 p, 则

$$r(\theta)=\frac{b^2/a}{1+e\cos\theta}\ (\text{椭圆}),\qquad r(\theta)=\frac{b^2/a}{1-e\cos\theta}\ (\text{双曲线}),$$

$$r(\theta)=\frac{p}{1-\cos\theta}\ (\text{抛物线},\ e=1).$$

证明 以右焦点 $F_2(c,0)$ 与右准线为例. 第3.3节 的统一定义说, 曲线上任一点 P 满足 $|PF_2|=e\cdot d(P,\text{右准线})$.

椭圆的右准线是 $x=a^2/c$. 设从 F_2 出发、方向角为 θ 的射线上的点为 $(c+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, 代入定义,

$$r=e\left(\frac{a^2}{c}-c-r\cos\theta\right)=\frac{eb^2}{c}-er\cos\theta,\qquad r(1+e\cos\theta)=\frac{b^2}{a},$$

末步用了 $eb^2/c=b^2/a$. 抛物线的准线是 $x=-p/2$, 此时 $e=1$, 焦点右侧的准线距是 p, 同样代入得 $r=p+r\cos\theta$, 即 $r(1-\cos\theta)=p$. 双曲线的右准线仍是 $x=a^2/c$, 但它落在顶点左边, 距离要改成 $x-a^2/c$, 代入后符号翻面, 得 $r(1-e\cos\theta)=b^2/a$. 双曲线的公式只在 $1-e\cos\theta>0$ 时给出正的 r, 这正对应直线与右支交出两个点的情形. □

定理 3.45 (焦点弦的调和性质) 过焦点的弦 AB 满足

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\begin{cases}\dfrac{2a}{b^2}, & \text{椭圆与双曲线(双曲线要求两端在同一支)},\\[2mm] \dfrac{2}{p}, & \text{抛物线}.\end{cases}$$

证明 弦的两个端点位于同一条过焦点的直线上, 方向角相差 π, $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$. 对 引理 3.3 的任何一个公式取倒数相加, 含 $\cos\theta$ 的项成对消去,

$$\frac{1}{r(\theta)}+\frac{1}{r(\theta+\pi)}=\frac{1+e\cos\theta}{b^2/a}+\frac{1-e\cos\theta}{b^2/a}=\frac{2a}{b^2},$$

抛物线情形把 b^2/a 换成 p 即可. □

推论 3.3 (通径最短) 椭圆与双曲线中过焦点的弦最短是通径 $2b^2/a$, 抛物线中是通径 $2p$, 且都在弦垂直于轴时取到.

证明 记 $r_1=|AF|, r_2=|BF|$. 由 定理 3.45,

$$|AB|=r_1+r_2=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)r_1r_2=\frac{2a}{b^2}\,r_1r_2\le\frac{2a}{b^2}\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2=\frac{a}{2b^2}|AB|^2,$$

中间一步是均值不等式 (第一卷第 5.3 节), 于是 $|AB|\ge 2b^2/a$. 等号当且仅当 $r_1=r_2$, 即焦点是弦的中点, 弦垂直于轴, 恰是通径. 抛物线同理给出 $|AB|\ge 2p$. □

知乎@余命数

注 3.20
把方向公式两式相加还能一步读出焦点弦长

$$|AB|=r(\theta)+r(\theta+\pi)=\frac{2b^2/a}{1-e^2\cos^2\theta},$$

$\theta=90^\circ$ 时最短, 又见 推论 3.3. 行星沿椭圆轨道运行时, 近日距 $a-c$ 与远日距 $a+c$ 恰好是以半通径 b^2/a 为调和平均的一对数, 这正是 定理 3.45 取 $\theta=0^\circ$ 的情形.

例题 3.318 (三类曲线, 同一个角) 抛物线 $y^2=4x$、椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$、双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 各有一条过右焦点的弦, 倾角都是 60°. 分别求弦长.

知乎@余命数

解 抛物线 $p=2$,

$$|AF|=\frac{p}{1-\cos 60^\circ}=\frac{2}{1-1/2}=4,\qquad |BF|=\frac{2}{1+1/2}=\frac{4}{3},\qquad |AB|=\frac{16}{3}.$$

椭圆 $b^2/a=3/2, e=1/2$,

$$|AF|=\frac{3/2}{1+1/4}=\frac{6}{5},\qquad |BF|=\frac{3/2}{1-1/4}=2,\qquad |AB|=\frac{16}{5}.$$

双曲线 $e=\sqrt{7}/2, \cos 60^\circ=1/2$,

$$|AF|=\frac{3/2}{1-\sqrt{7}/4}=\frac{6}{4-\sqrt{7}}=\frac{2(4+\sqrt{7})}{3},\qquad |BF|=\frac{3/2}{1+\sqrt{7}/4}=\frac{2(4-\sqrt{7})}{3},$$

$$|AB|=\frac{2(4+\sqrt{7})}{3}+\frac{2(4-\sqrt{7})}{3}=\frac{16}{3}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

三条弦与焦点折出的三对焦半径各自满足调和式, 抛物线与双曲线的弦长同为 $16/3$, 椭圆的短一些, 因为它的 $e<1$ 让分母 $1-e^2\cos^2\theta$ 变大. 核对抛物线一条, $\theta=60^\circ$ 即斜率 $\sqrt{3}$, 第3.3节 的焦点弦长公式给 $4(1+3)/3=16/3$, 一致.

3.23.2 抛物线焦点弦的三件套

抛物线的焦点弦还有一组几何味更浓的性质, 用参数法一次全拿出来. 把 $y^2=2px$ 的点写成 $\left(\dfrac{pt^2}{2},\,pt\right)$, 过参数 t_1,t_2 两点的弦有方程

$$x=\frac{t_1+t_2}{2}\,y-\frac{p\,t_1t_2}{2},$$

把焦点 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ 代入立得 $t_1t_2=-1$, 这就是焦点弦的参数刻画. 参数 t 处的切线是 $x=ty-\dfrac{pt^2}{2}$, 斜率 $\dfrac{1}{t}$.

定理 3.46 (抛物线焦点弦三性质) 抛物线 $y^2=2px$ 的焦点弦 AB 两端参数为 t_1,t_2, $t_1t_2=-1$. 设 A',B' 是 A,B 在准线上的投影, 则 **(i)** A、B 处的切线交于准线上一点 T, 且两切线互相垂直; **(ii)** $FT\perp AB$; **(iii)** $FA'\perp FB'$.

证明 (i) 联立两条切线 $x=t_1y-\dfrac{pt_1^2}{2}$ 与 $x=t_2y-\dfrac{pt_2^2}{2}$, 两式相减得 $(t_1-t_2)y=\dfrac{p(t_1^2-t_2^2)}{2}$, 故 $y_T=\dfrac{p(t_1+t_2)}{2}$, 代回得 $x_T=\dfrac{pt_1t_2}{2}=-\dfrac{p}{2}$, 交点落在准线 $x=-\dfrac{p}{2}$ 上. 斜率之积 $\dfrac{1}{t_1}\cdot\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{1}{t_1t_2}=-1$, 两切线垂直.

(ii) $T\left(-\dfrac{p}{2},\,\dfrac{p(t_1+t_2)}{2}\right)$ 与 $F\left(\dfrac{p}{2},\,0\right)$ 连线的斜率是 $\dfrac{p(t_1+t_2)/2}{-p}=-\dfrac{t_1+t_2}{2}$, 而弦 AB 的斜率由弦方程读出是 $\dfrac{2}{t_1+t_2}$, 乘积为 -1, 垂直.

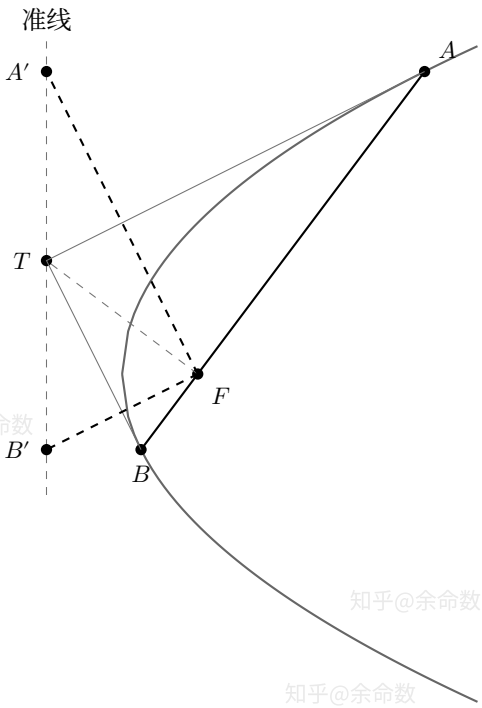
(iii) $A'=\left(-\dfrac{p}{2},\,pt_1\right)$, $B'=\left(-\dfrac{p}{2},\,pt_2\right)$, 于是

$$\overrightarrow{FA'}\cdot\overrightarrow{FB'}=(-p,pt_1)\cdot(-p,pt_2)=p^2(1+t_1t_2)=0.$$

□

反过来, 从准线上任一点 T 向抛物线引两条切线, 设切点为 A,B, 由 (i) 的推导过程倒推, T 的横坐标是 $-p/2$ 迫使两切点参数之积为 -1, 于是 AB 必是焦点弦. 准线、垂直切线对、焦点弦三者一一对应, 定理 3.46 的三幅图景是同一幅.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

图 3.52　$y^2=4x$ 的焦点弦 $AB(t_1=2,\ t_2=-\frac{1}{2})$: 切线交点 T 落在准线上且两切线垂直, $FT\perp AB, FA'\perp FB'$.

例题 3.319 (定长焦点弦) 抛物线 $y^2=4x$ 上, 求长度为 5 的焦点弦的斜率, 并问焦点弦长度能否小于 4.

解 设倾角 θ, 由焦点弦长公式 $|AB|=\dfrac{2p}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta}$. 令 $\dfrac{4}{\sin^2\theta}=5$ 得 $\sin^2\theta=\dfrac{4}{5}$, $\tan^2\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$, 斜率 $k=\pm2$. 至于下界, $\sin^2\theta\le1$ 给出 $|AB|\ge4$, 等号在 $\theta=90^\circ$ 即通径时取到, 焦点弦长度不会小于 4, 与 推论 3.3 一致.

练习 3.110　椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 过右焦点的弦倾角 60°, 用 定理 3.45 验证 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{4}{3}$, 并求 $|AB|$.

练习 3.111　双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 过右焦点、斜率 1 的弦, 两端是否在同一支上? 求 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

练习 3.112 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点弦 AB 满足 $|AF|=4$, 求 $|BF|$ 与 AB 的倾斜角, 并指出 A、B 处切线的交点位置.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

第4章

极坐标与参数方程*

基础语言

「人追求完美，却往往只能得到近似。」

——柯西



第四章 极坐标与参数方程 *

自笛卡尔建立解析几何以来, 用代数方程描述几何图形便成为数学中的重要观点之一. 方程 $f(x,y)=0$ 定义了平面上所有满足特定约束条件的点的集合. 这种观点在刻画直线、圆锥曲线等固定的几何形态时十分有效.

然而, 数学的发展, 特别是微积分的诞生, 要求我们既能描述是什么, 也能刻画如何形成. 早在古希腊时期, 数学家们就已经用动态的、运动学的方法构造曲线, 例如阿基米德螺线和尼科米德斯蚌线. 这些曲线的定义本身就蕴含了一种生成过程. 当牛顿与莱布尼茨试图用数学语言描述行星的运行、抛射物的轨迹时, 笛卡尔坐标的内在局限性便显现出来. 它难以表达时间这一关键变量. 一个运动的质点, 其位置坐标 (x,y) 共同受控于一个更根本的独立变量, 即时间 t.

为了捕捉这种动态的生成过程, 一种新的描述方式应运而生, 这就是**参数方程**. 它把点的坐标 x 和 y 分别视为某个第三方参数 t 的函数, 即 $x=f(t), y=g(t)$. 这种方法把曲线看作一个点随参数 t 变化而连续描绘出的轨迹, 恰好对应物理学中的运动学描述, 同时为曲线附加了方向、速度等动态属性, 也简化了复杂曲线的构造与分析.

此时, 数学家们也注意到, 极坐标更适合处理具有旋转对称性或中心相关性的图形. 对于花瓣曲线、心形线以及开普勒定律所描述的行星轨道这类围绕某个中心点展开的几何图形, 使用 (x,y) 坐标描述往往导致方程异常繁琐.

十七世纪的数学家博纳文图拉·卡瓦列里以及后来的雅各布·伯努利等人发现, 用一个点到原点的距离 r 和该点与原点连线相对于基准方向的夹角 θ 来确定点的位置, 更为自然、简洁. 这一思想最终发展成为**极坐标系**.

本章是解析几何的扩展与深化, 系统介绍参数方程与极坐标这两种实用工具. 先引入参数方程, 讨论用它描述曲线生成的方式, 以及与普通方程的互化; 再进入极坐标, 建立极坐标与直角坐标的联系, 研究极坐标下中心对称曲线的表达与分析. 两套工具的引入, 丰富了观察、描述和解决几何问题的视角与手段.

4.0.1 参数方程

4.0.1.1 参数方程的引入

在物理学中, 一个质点在平面上的运动轨迹, 其位置坐标 (x,y) 都是时间 t 的函数.

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

这里, 时间 t 如同一个独立的控制变量, 随着它的变化, 点 (x,y) 在坐标平面上描绘出一条轨迹. 把这种思想从物理情境中抽象出来, 便得到参数方程的一般概念.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 4.1 (参数方程) 在平面直角坐标系中, 如果曲线上任意一点的坐标 x, y 都是某个独立变量 t 的函数.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

并且对于 t 在某个允许的取值范围(定义域 I)内的每一个值, 由上述方程组所确定的点 (x, y) 都在这条曲线上, 那么这个方程组就叫做这条曲线的**参数方程**, 联系变量 x, y 的变量 t 叫做**参变数**, 简称**参数**.

参数方程把二维平面上点 (x, y) 之间的内在约束关系, 拆成两个独立的、关于同一个一维参数 t 的函数关系. 这样可分别研究 x 和 y 随参数变化的规律, 从而更精细地理解曲线的动态生成过程.

4.0.1.2 参数方程与普通方程的互化

参数方程与普通方程是描述同一曲线的两种不同形式, 它们之间可以相互转化.

- **由参数方程化为普通方程**. 要点是**消去参数**. 通过代数变形, 从方程组中消去参数 t, 得到一个只含 x, y 的关系式. 消参的方法多种多样, 包括代入消元法、加减消元法、利用三角恒等式等.
- **由普通方程化为参数方程**. 要点是**选取参数**. 选择一个合适的变量作为参数, 将 x, y 表示为该参数的函数. 参数的选取是灵活的, 不同的选取方式会得到形式不同的参数方程. 通常我们会选择具有明确几何或物理意义的量作为参数, 如时间、角度、斜率等.

消参时要注意, 消去参数的过程可能扩大或缩小 x, y 的取值范围. 因此, 在得到普通方程后, 必须依据参数方程中参数的取值范围, 确定 x, y 的真实取值范围.

例题 4.1 (直线) 将下列参数方程化为普通方程, 并说明其轨迹.

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

解 此方程组关于参数 t 线性, 适于用代入消元法消参. 由第一式解出 $t=\frac{x+1}{2}$, 代入第二式 $y=3t+2$, 整理即得普通方程.

$$\begin{aligned} y &= 3\cdot\frac{x+1}{2}+2 && \text{（代入消元）}\\ 2y &= 3(x+1)+4=3x+7 && \text{（去分母、合并）}\\ 3x-2y+7&=0 && \text{（移项）} \end{aligned}$$

参数 t 取遍全体实数 $\mathbb{R}$, 故 x,y 也取遍全体实数, 该参数方程表示一条完整的直线 $3x-2y+7=0$.

例题 4.2 (抛物线) 将参数方程

$$\begin{cases} x=2t \\ y=t^2-1 \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

化为普通方程, 并指出其轨迹.

解 仍以代入消元法消参. 由 $x=2t$ 得 $t=\frac{x}{2}$, 代入 $y=t^2-1$ 即得普通方程.

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x}{2}\right)^2-1 && \text{（代入消元）}\\ &= \frac{1}{4}x^2-1 && \text{（整理）} \end{aligned}$$

参数 t 可取任意实数, 故 $x=2t$ 取遍全体实数; 又由 $t^2\geq 0$ 知 $y=t^2-1\geq -1$. 这恰是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-1$ 自顶点 $(0,-1)$ 起开口向上的整支, 无截断.

例题 4.3 (圆) 指出由参数方程

$$\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=5\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\in[0,2\pi))$$

所表示的曲线.

解 此参数方程含三角函数, 直接代数消元不便, 宜借助恒等式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 消参. 由参数方程得 $\cos\theta=\frac{x}{5}$, $\sin\theta=\frac{y}{5}$, 代入恒等式整理.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2&=1 && \text{（代入恒等式）}\\ x^2+y^2&=25 && \text{（去分母）} \end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

θ 在 $[0, 2\pi)$ 上取值时, $\cos\theta, \sin\theta$ 各自取遍 $[-1, 1]$, 故 x, y 均取遍 $[-5, 5]$, 与圆方程的定义域、值域吻合. 该参数方程表示以原点为圆心、半径为 5 的圆; 参数 θ 即从原点指向点 (x, y) 的射线与 x 轴正半轴的夹角, 当 θ 从 0 增至 2π, 点 (x, y) 自 $(5, 0)$ 出发沿圆逆时针运行一周.

4.0.1.3 常见曲线的参数方程

任何曲线的普通方程原则上都可以转化为参数方程, 实践中真正被广泛使用的, 是那些代数结构简洁、几何或物理内涵清晰的特定参数化形式. 熟悉这些标准形式是利用参数方程解决问题的基础.

4.0.1.3.1 圆的参数方程 考虑以原点为圆心, 半径为 R 的圆, 其普通方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 为建立其参数方程, 要找一个能唯一描述圆上点位置的单一变量. 最自然的选择是极角, 即从原点到圆上一点 $P(x, y)$ 的射线 OP 与 x 轴正半轴的夹角, 记为 θ.

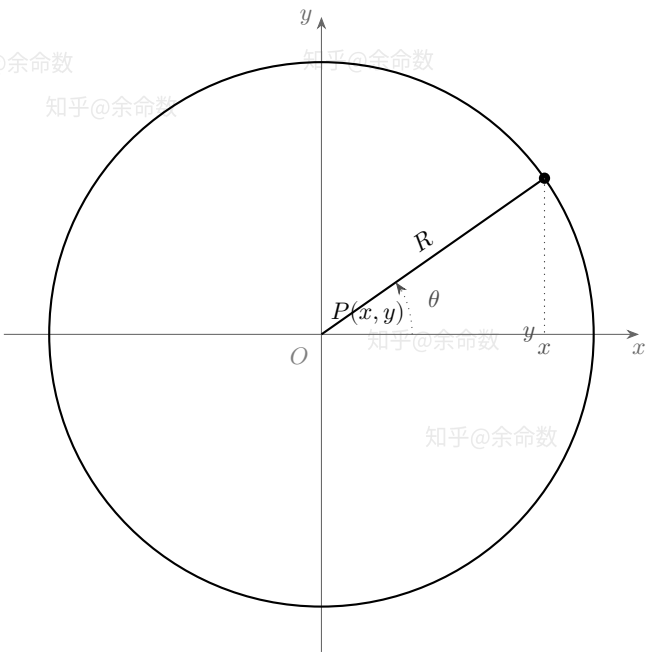


图 4.1 点 P 的坐标由半径 R 和极角 θ 确定.

根据三角函数的定义, 在以 OP 为斜边的直角三角形中, 有.

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

这就构成了圆的参数方程. 随着参数 θ 从 0 变化到 2π, 点 P 沿逆时针方向在圆上运动一周.

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi) \text{ 为参数}) \tag{4-1}$$

若圆心平移至 (x_0, y_0), 其普通方程为 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. 其参数方程相应地平移为.

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi) \text{ 为参数}) \tag{4-2}$$

例题 4.4 (三角形重心的轨迹) 已知定点 $A(2,0)$ 和 $B(4,0)$, 动点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动. 求 $\triangle ABP$ 的重心 G 的轨迹方程.

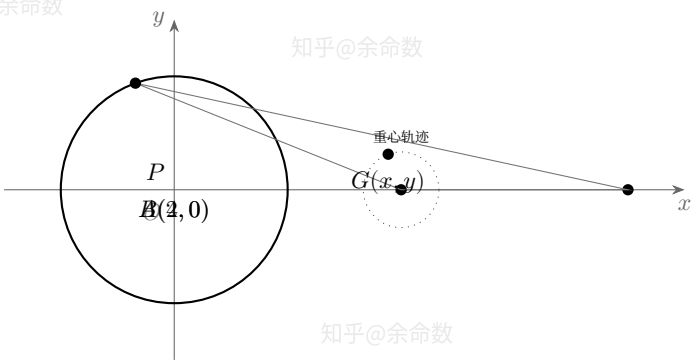


图 4.2 $\triangle ABP$ 的重心 G 的轨迹.

解 解题关键在于建立重心坐标与动点 P 坐标之间的联系, 而动点 P 的位置用参数方程刻画最为方便. 设 $P(\cos\theta, \sin\theta)(\theta \in [0, 2\pi)$ 为参数), 重心 G 的坐标为 (x, y). 由三角形重心坐标公式,

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_A + x_B + x_P}{3} = \frac{2 + 4 + \cos\theta}{3} = \frac{6 + \cos\theta}{3}, \\ y &= \frac{y_A + y_B + y_P}{3} = \frac{0 + 0 + \sin\theta}{3} = \frac{\sin\theta}{3}. \end{aligned}$$

此即重心 G 轨迹的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{6+\cos\theta}{3} \\ y = \frac{\sin\theta}{3} \end{cases} \quad (\theta\text{为参数})$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

消去参数 θ 即得普通方程. 由参数方程解出 $\cos\theta = 3x - 6,\ \sin\theta = 3y$, 代入三角恒等式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 并整理.

$$
\begin{aligned}
(3x-6)^2 + (3y)^2 &= 1 \quad \text{（代入恒等式）} \\
9(x-2)^2 + 9y^2 &= 1 \quad \text{（展开）} \\
(x-2)^2 + y^2 &= \frac{1}{9} \quad \text{（约简）}
\end{aligned}
$$

此方程表示以点 $(2,0)$ 为圆心、半径为 $\frac{1}{3}$ 的圆, 即重心 G 的轨迹.

例题 4.5 (最值问题) 求圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点到直线 $3x + 4y - 25 = 0$ 的距离的最大值与最小值.

知乎@余命数

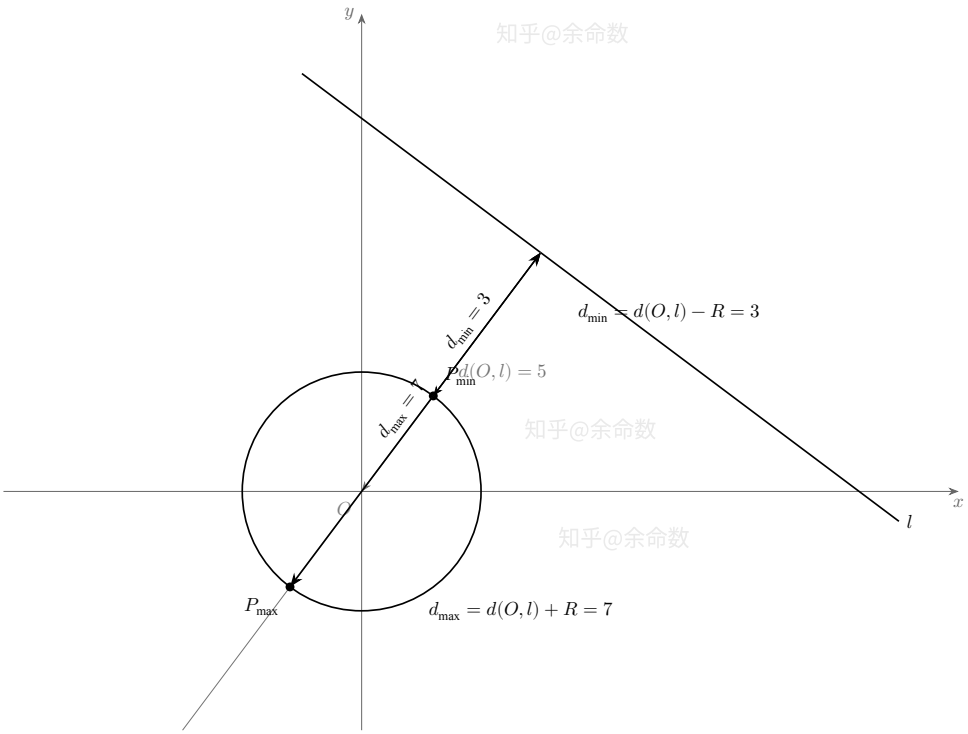


图 4.3 圆上点到直线距离的最值.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 法一采用几何法. 圆心 $O(0,0)$ 到直线 $l:3x+4y-25=0$ 的距离为 $d=\frac{|3\cdot0+4\cdot0-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5$, 而半径 $R=2$. 由圆的几何性质, 圆上点到直线的距离在过圆心且垂直于 l 的直径两端点处取得极值, 故

$$d_{\max}=d+R=5+2=7,$$

$$d_{\min}=d-R=5-2=3.$$

法二采用参数方程法. 此法虽计算上略繁, 但作为普适的代数方法能处理更一般情形. 设圆上点 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$ $(\theta\in[0,2\pi))$, 则 P 到直线的距离为

$$d(\theta)=\frac{|6\cos\theta+8\sin\theta-25|}{5}.$$

知乎@余命数

对三角部分用辅助角公式. 令 $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$, 则 $6\cos\theta+8\sin\theta=10(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)=10\cos(\theta-\varphi)$, 故

$$d(\theta)=\frac{|10\cos(\theta-\varphi)-25|}{5}.$$

知乎@余命数

由于 $\cos(\theta-\varphi)\in[-1,1]$, 故 $10\cos(\theta-\varphi)-25\in[-35,-15]$ 恒为负, 于是 $|10\cos(\theta-\varphi)-25|=25-10\cos(\theta-\varphi)$. 该式在 $\cos(\theta-\varphi)=-1$ 时取最大值 35, 在 $\cos(\theta-\varphi)=1$ 时取最小值 15, 从而 $d_{\max}=\frac{35}{5}=7$, $d_{\min}=\frac{15}{5}=3$, 与几何法吻合.

例题 4.6 (轨迹问题) 已知圆 $O:x^2+y^2=R^2$. 定点 A,B 在圆 O 上且关于 x 轴对称. 动点 P 是圆 O 上的任意一点. 求 $\triangle ABP$ 的垂心 H 的轨迹.

知乎@余命数

解 这是求解动点轨迹的经典问题, 纯坐标法需联立两条高线方程, 计算量巨大; 而结合向量法与参数方程则十分简洁. 关键依据是垂心的一个向量性质, 若三角形外心为 O, 则其垂心 H 满足 $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OP}$, 而 P 在圆上宜用参数方程表示.

知乎@余命数

设 $A(x_0,y_0)$, 由 A,B 关于 x 轴对称知 $B(x_0,-y_0)$; 设垂心 H 的坐标为 (x,y), 即 $\vec{OH}=(x,y)$. 又 $\vec{OA}=(x_0,y_0)$, $\vec{OB}=(x_0,-y_0)$, 而动点 P 在圆上取 $P(R\cos\theta,R\sin\theta)$, 故 $\vec{OP}=(R\cos\theta,R\sin\theta)$. 代入垂心的向量关系式,

$$\begin{aligned}(x,y)&=(x_0,y_0)+(x_0,-y_0)+(R\cos\theta,R\sin\theta)\\&=(2x_0+R\cos\theta,\ R\sin\theta).\end{aligned}$$

此即垂心 H 轨迹的参数方程

$$\begin{cases}x=2x_0+R\cos\theta\\y=R\sin\theta\end{cases}\qquad(\theta\text{为参数})$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

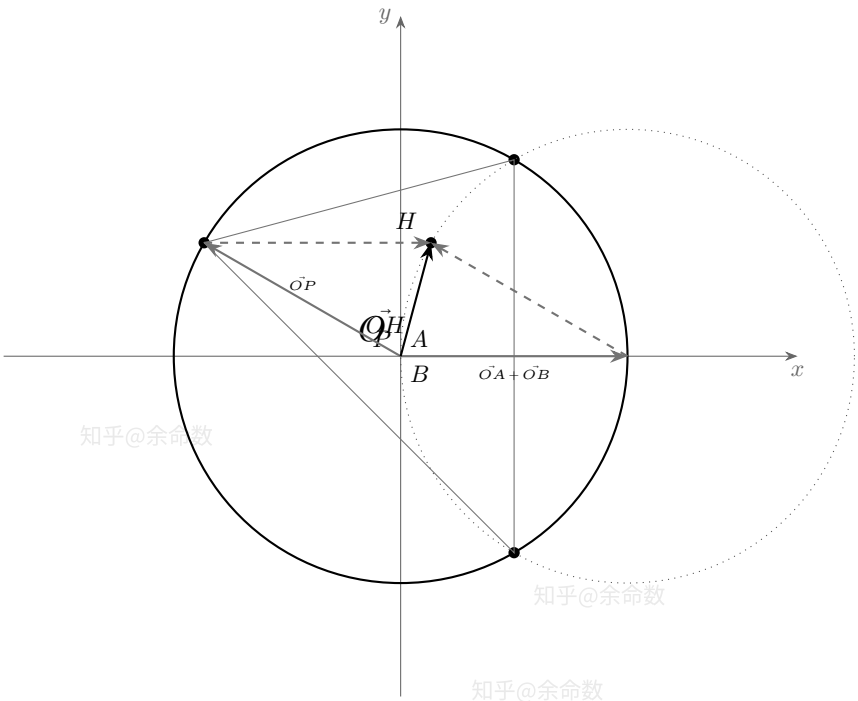


图 4.4 垂心 H 的轨迹.

消去参数 θ 得普通方程. 由上式解出 $\cos\theta=\frac{x-2x_0}{R}$, $\sin\theta=\frac{y}{R}$, 代入 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,

$$\left(\frac{x-2x_0}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2=1 \quad \text{（代入恒等式）}$$

$$(x-2x_0)^2+y^2=R^2 \quad \text{（去分母）}$$

此方程表示圆心为 $(2x_0,0)$、半径为 R 的圆，与原圆 O 全等，其圆心恰为向量 $\vec{OA}+\vec{OB}$ 的终点.

4.0.1.3.2 椭圆的参数方程 考虑标准椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 受圆的参数方程启发, 尝试令

$$\frac{x}{a}=\cos\theta,\quad \frac{y}{b}=\sin\theta$$

这样自然满足 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. 由此得到椭圆的标准参数方程.

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}\qquad(\theta\in[0,2\pi)\text{ 为参数})\tag{4-3}$$

这里的参数 θ **不是**点 (x,y) 的极角. 它具有一个特殊的几何意义, 称为**偏心角**. 偏心角的几何构造如下. 作椭圆的辅助圆, 即以长轴为直径的圆 $x^2+y^2=a^2$. 对于

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

椭圆上任意一点 $P(x,y)$, 过 P 作 x 轴的垂线, 交辅助圆于点 Q. 连接 OQ. 射线 OQ 与 x 轴正半轴的夹角即为点 P 的偏心角 θ.

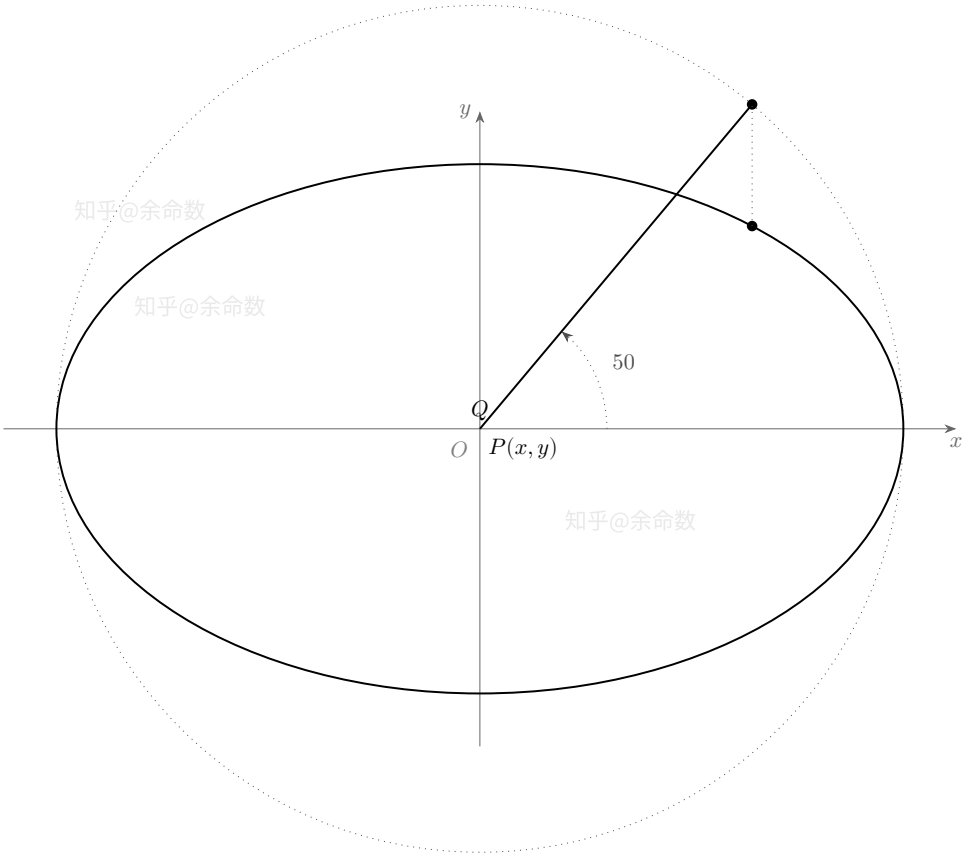


图 4.5 椭圆的偏心角 θ 的几何意义.

例题 4.7 已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 对于 Γ 上的任意两点 P,Q, 我们定义一种运算 $\oplus$ 如下. 过定点 $S(1,\frac{3}{2})$ 作直线 l 平行于直线 PQ.(规定当 $P=Q$ 时, 直线 PQ 为 Γ 在点 P 处的切线). 若 l 与 Γ 有异于 S 的交点 T, 则 $P\oplus Q=T$; 否则 $P\oplus Q=S$. 已知运算 $\oplus$ 满足交换律与结合律. 记 $P_n=\underbrace{P\oplus P\oplus\cdots\oplus P}_{n个}$.

1. 若 $P(2,0),Q(-1,-\frac{3}{2})$, 求 $P\oplus Q$, P_2 以及 P_{2025}.
2. 对于 Γ 上的四点

$$P(2\cos 2\theta,\sqrt{3}\sin 2\theta),\quad Q(2\cos 2\varphi,\sqrt{3}\sin 2\varphi),$$

$$M(2\cos 2\alpha,\sqrt{3}\sin 2\alpha),\quad N(2\cos 2\beta,\sqrt{3}\sin 2\beta),$$

求证:$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{MN}$ 的充要条件是 $\alpha+\beta=\theta+\varphi+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

3. 是否存在异于 S 的点 P, 使得 $P_4 = S$? 若存在, 请求出所有满足条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

解 (1) 先验证定点 $S(1, \frac{3}{2})$ 落在椭圆 Γ 上, 由 $\frac{1^2}{4} + \frac{(3/2)^2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{9/4}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ 即得.

计算 $P \oplus Q$. 点 $P(2,0), Q(-1, -\frac{3}{2})$, 直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{-\frac{3}{2}-0}{-1-2} = \frac{1}{2}$. 过点 $S(1, \frac{3}{2})$ 且平行于 PQ 的直线 l 的方程为 $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-1)$, 即 $y = \frac{1}{2}x + 1$. 联立 l 与 Γ, 消去 y 得 $3x^2 + 4(\frac{1}{2}x + 1)^2 = 12$, 整理得 $x^2 + x - 2 = 0$, 其解为 $x = 1$(对应点 S) 与 $x = -2$. 当 $x = -2$ 时 $y = \frac{1}{2}(-2) + 1 = 0$, 故异于 S 的交点为 $T(-2, 0)$, 即 $P \oplus Q = (-2, 0)$.

计算 $P_2 = P \oplus P$. 此时直线 PQ 退化为过点 $P(2,0)$ 的切线,其方程为 $\frac{2x}{4} + \frac{0 \cdot y}{3} = 1$, 即 $x = 2$. 过 S 且平行于该切线的直线 l 为 $x = 1$, 联立 Γ 得 $\frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \implies y = \pm\frac{3}{2}$, 交点为 $(1, \frac{3}{2})$, 即 S 与 $(1, -\frac{3}{2})$, 故 $P_2 = (1, -\frac{3}{2})$.

为求 P_{2025}, 需探明序列 P_n 的周期性.$P_3 = P_2 \oplus P$, 直线 P_2P 的斜率 $k_{P_2P} = \frac{-3/2-0}{1-2} = \frac{3}{2}$, 过 S 的平行线为 $y = \frac{3}{2}x$, 联立 Γ 解得 $x = 1$ (S 点) 与 $x = -1$, 当 $x = -1$ 时 $y = -3/2$, 故 $P_3 = (-1, -3/2)$.

进而 $P_4 = P_3 \oplus P$, 直线 P_3P 斜率 $k_{P_3P} = \frac{-3/2-0}{-1-2} = \frac{1}{2}$, 过 S 的平行线斜率亦为 $1/2$, 与求 $P \oplus Q$ 时情形相同, 故 $P_4 = (-2, 0)$.

再 $P_5 = P_4 \oplus P$, 直线 P_4P 为 $y = 0$, 过 S 的平行线为 $y = 3/2$, 联立 Γ 解得 $x = 1$(S 点)与 $x = -1$, 故 $P_5 = (-1, 3/2)$.

继而 $P_6 = P_5 \oplus P$, 直线 P_5P 斜率 $k_{P_5P} = \frac{3/2-0}{-1-2} = -\frac{1}{2}$, 过 S 的平行线为 $y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $y = -\frac{1}{2}x + 2$, 联立 Γ 得 $3x^2 + 4(-\frac{1}{2}x + 2)^2 = 12 \implies x^2 - 2x + 1 = 0$, 仅有重根 $x = 1$, 即直线 l 与椭圆 Γ 相切于点 S, 依定义无异于 S 的交点, 故 $P_6 = S$.

最后 $P_7 = P_6 \oplus P = S \oplus P$, 此运算涉及直线 SP, 过 S 且平行于 SP 的直线即 SP 本身, 其与 Γ 的交点为 S 与 P, 异于 S 的交点为 P, 故 $S \oplus P = P$.

至此 $P_7 = P$, 序列 P_n 以 6 为周期; 由 $2025 = 6 \times 337 + 3$ 得 $P_{2025} = P_3 = (-1, -\frac{3}{2})$.

(2) 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 参数为 u, v 的两点分别为 $(a\cos u, b\sin u)$ 与 $(a\cos v, b\sin v)$. 当两点不重合时, 其连线方向向量为

$$(a(\cos v - \cos u), b(\sin v - \sin u)) = 2\sin\frac{v-u}{2}\left(-a\sin\frac{u+v}{2}, b\cos\frac{u+v}{2}\right).$$

当两点重合时, 约定取切线方向; 而切线方向向量正为 $(-a\sin u, b\cos u)$, 也可视为上式在 $v \to u$ 时的极限. 因而一条弦或切线的方向只由端点参数和 $u + v$ 模 2π 决定.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

在本题中, $a=2, b=\sqrt{3}$, 且点的参数为 $2\theta, 2\varphi$ 等形式, 因此 PQ 的方向由 $\theta+\varphi$ 决定, MN 的方向由 $\alpha+\beta$ 决定. 两方向平行的充要条件是这两个方向参数相差 π 的整数倍, 即

$$\alpha+\beta=\theta+\varphi+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

此即**对于该椭圆, 一族平行弦的端点参数之和在模 π 意义下为常数**.

(3)

第 (2) 问的结论把复杂的几何运算 $\oplus$ 归结为参数加法, 暴露其背后的代数结构, 是解决本题的关键. 设点 $P, Q, T=P\oplus Q, S$ 对应的参数分别为 $\theta_P, \theta_Q, \theta_T, \theta_S$. 先确定特殊点 $S(1,3/2)$ 对应的参数 θ_S. 由 $2\cos(2\theta_S)=1 \implies \cos(2\theta_S)=1/2$ 与 $\sqrt{3}\sin(2\theta_S)=3/2 \implies \sin(2\theta_S)=\sqrt{3}/2$, 故 $2\theta_S=\frac{\pi}{3}+2m\pi$, 取主值得 $2\theta_S=\frac{\pi}{3}$, 即 $\theta_S=\frac{\pi}{6}$.

依运算定义, 直线 ST 平行于直线 PQ, 由 (2) 的结论, 端点参数之和模 π 相等:

$$\theta_S+\theta_T\equiv\theta_P+\theta_Q \pmod{\pi}$$

因而运算 $\oplus$ 在参数空间中的映射为

$$\theta_{P\oplus Q}=\theta_P+\theta_Q-\theta_S \pmod{\pi}$$

现求解 $P_4=S$. 设 P 的参数为 θ, 由结合律与上述加法规则,

$$\begin{aligned}
\theta_{P_2}&=\theta_{P\oplus P}=\theta+\theta-\theta_S=2\theta-\theta_S && \pmod{\pi}\\
\theta_{P_3}&=\theta_{P_2\oplus P}=(2\theta-\theta_S)+\theta-\theta_S=3\theta-2\theta_S && \pmod{\pi}\\
\theta_{P_4}&=\theta_{P_3\oplus P}=(3\theta-2\theta_S)+\theta-\theta_S=4\theta-3\theta_S && \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

$P_4=S$ 的充要条件是其参数 θ_4 与 θ_S 在模 π 意义下相等, 即

$$\begin{aligned}
4\theta-3\theta_S&=\theta_S+k\pi\\
4\theta=4\theta_S+k\pi &\implies \theta=\theta_S+\frac{k\pi}{4}
\end{aligned}$$

代入 $\theta_S=\pi/6$ 得 $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}$.

寻找异于 S 的点, 即 $\theta\neq\theta_S+m\pi$, 这要求 $\frac{k\pi}{4}$ 不能是 π 的整数倍, 亦即 k 不能是 4 的倍数. 只需考虑 $k=1,2,3$ 即得所有不同的解.

当 $k=1$: $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12} \implies 2\theta=\frac{5\pi}{6}$, P 坐标为 $(2\cos\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{6})=(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

当 $k=2$: $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3} \implies 2\theta=\frac{4\pi}{3}$, P 坐标为 $(2\cos\frac{4\pi}{3}, \sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{3})=(-1, -\frac{3}{2})$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

当 $k=3$: $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}=\frac{11\pi}{12} \Longrightarrow 2\theta=\frac{11\pi}{6}$, P 坐标为 $(2\cos\frac{11\pi}{6},\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{6})=(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

存在三个异于 S 的点 P 使得 $P_4=S$, 其坐标分别为

$$(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),\quad (-1,-\frac{3}{2}),\quad (\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

例题 4.8 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 以及定点 $A(-2,0)$. 过点 $D(-2,3)$ 的动直线与椭圆 C 交于 P,Q 两点. 直线 AP,AQ 分别与 y 轴交于 M,N 两点. 证明:线段 MN 的中点为定点, 并求出该定点的坐标.

解 本题涉及动直线与椭圆的交点及由此引发另一族直线的截距, 最终归结为证明一个中点为定点. 传统的联立方程与韦达定理法可行, 但点 $A(-2,0)$ 恰好是椭圆的左顶点, 这提示存在一种更精细、计算更简洁的参数化方法.

设连接顶点 A 与椭圆上任意一点 P 的直线 AP 的斜率 t 为参数. 这种斜率参数法能把椭圆上除 A 之外的所有点与全体实数 t 建立一一对应, 并把点的坐标写成 t 的有理分式, 简化后续的代数运算.

设 t 为直线 AP 的斜率, 则直线 AP 的方程为 $y=t(x+2)$. 代入椭圆 C 的方程 $9x^2+4y^2=36$, 整理得关于 x 的一元二次方程

$$\begin{aligned}9x^2+4(t(x+2))^2&=36\\ 9x^2+4t^2(x^2+4x+4)&=36\\ (9+4t^2)x^2+16t^2x+(16t^2-36)&=0.\end{aligned}$$

此方程的两根为直线 AP 与椭圆 C 交点的横坐标, 其一必为点 A 的横坐标 $x_A=-2$. 设另一交点 P 的横坐标为 x_P. 由韦达定理, 两根之积为 $x_A\cdot x_P=(-2)\cdot x_P=\frac{16t^2-36}{9+4t^2}$, 解得

$$\begin{aligned}x_P&=\frac{18-8t^2}{9+4t^2},\\ y_P&=t(x_P+2)=t\left(\frac{18-8t^2}{9+4t^2}+2\right)=t\left(\frac{18-8t^2+18+8t^2}{9+4t^2}\right)=\frac{36t}{9+4t^2}.\end{aligned}$$

此即椭圆上任意点 P(除 A 外)与参数 t 的对应关系.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设直线 DPQ 交椭圆于 P,Q 两点, 直线 AP 的斜率为 t_1, 直线 AQ 的斜率为 t_2, 则 P,Q 的坐标分别由 t_1,t_2 表出. 由点 $D(-2,3),P,Q$ 三点共线, 知斜率 k_{DP} 与 k_{DQ} 相等.

$$\begin{aligned} k_{DP}=\frac{y_P-3}{x_P-(-2)}&=\frac{\dfrac{36t_1}{9+4t_1^2}-3}{\dfrac{18-8t_1^2}{9+4t_1^2}+2}\\ &=\frac{36t_1-3(9+4t_1^2)}{18-8t_1^2+2(9+4t_1^2)}=\frac{36t_1-27-12t_1^2}{36}\\ &=t_1-\frac{1}{3}t_1^2-\frac{3}{4} \end{aligned}$$

因 P,Q 共线, 故 $k_{DP}=k_{DQ}$, 即

$$\begin{aligned} t_1-\frac{1}{3}t_1^2-\frac{3}{4}&=t_2-\frac{1}{3}t_2^2-\frac{3}{4}\\ t_1-t_2=\frac{1}{3}(t_1^2-t_2^2)&=\frac{1}{3}(t_1-t_2)(t_1+t_2). \end{aligned}$$

由 $P\neq Q$ 知 $t_1\neq t_2$, 可约去 t_1-t_2, 得 $1=\frac{1}{3}(t_1+t_2)$, 即 $t_1+t_2=3$. 此简洁关系式是解题的关键.

直线 AP 的方程为 $y=t_1(x+2)$, 与 y 轴的交点 M 为 $(0,2t_1)$; 直线 AQ 的方程为 $y=t_2(x+2)$, 与 y 轴的交点 N 为 $(0,2t_2)$. 故线段 MN 的中点 T 的坐标为

$$T\left(\frac{0+0}{2},\frac{2t_1+2t_2}{2}\right)=(0,t_1+t_2).$$

代入 $t_1+t_2=3$ 得 $T(0,3)$. 因此线段 MN 的中点是与动直线 DPQ 位置无关的定点, 坐标为 $(0,3)$.

例题 4.9 如图 4.6 所示, 已知菱形 $ABCD$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的内接四边形.

1. 求证: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ 为定值;
2. 求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

解 (1) 证明 $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ 为定值.

菱形 $ABCD$ 内接于中心在原点 $O(0,0)$ 的椭圆, 其中心必为椭圆中心, 设菱形中心为 M, 四个顶点可写成 $M\pm u, M\pm v$. 将 $M+u$ 与 $M-u$ 代入椭圆对应的二次型方程并相减, 得 M 与 u 在该二次型意义下正交; 同理 M 与 v 正交. 由 u,v 不共线, 只能有 $M=O$. 故菱形的对角线 AC 和 BD 均过原点 O, 又菱形对角线互相垂直, 因此 OA 与 OB 互相垂直.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

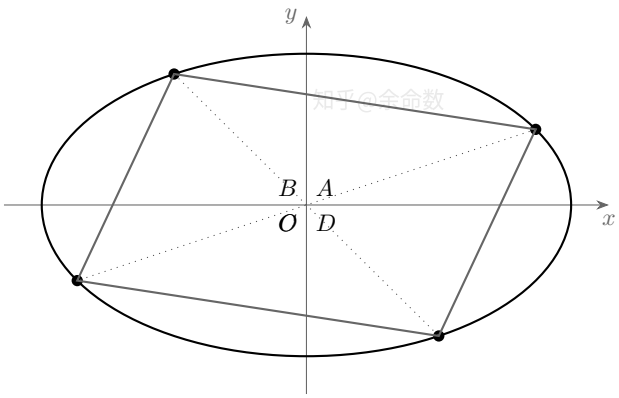


图 4.6 椭圆内接菱形 $ABCD$.

引入极角参数化描述顶点位置. 设 $m = OA$, A 的极角为 α, 则 $A(m\cos\alpha, m\sin\alpha)$; 由 $OA \perp OB$, 设 $n = OB$, 取 B 的极角为 $\alpha + \frac{\pi}{2}$, 则 $B(n\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}), n\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})) = (-n\sin\alpha, n\cos\alpha)$.

将 A 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 并整理得 $\frac{1}{m^2}$;同理由 B 得 $\frac{1}{n^2}$.

$$\frac{(m\cos\alpha)^2}{a^2}+\frac{(m\sin\alpha)^2}{b^2}=1 \implies \frac{1}{m^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2},$$
$$\frac{(-n\sin\alpha)^2}{a^2}+\frac{(n\cos\alpha)^2}{b^2}=1 \implies \frac{1}{n^2}=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}.$$

两式相加即可定值.

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)+\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)$$
$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\quad(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$$

a, b 为椭圆半轴长, 系固定值, 故 $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ 是与参数 α 无关的定值.

(2) 求菱形 $ABCD$ 面积的最大值.

菱形对角线长 $d_1 = AC = 2m, d_2 = BD = 2n$, 面积 $S = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2}(2m)(2n) = 2mn$. 求 S 最大值等价于求 mn 最大值, 亦即最小化 $\frac{1}{(mn)^2}$. 将第一问所得 $\frac{1}{m^2}$ 与 $\frac{1}{n^2}$ 相乘并展开,

$$\frac{1}{(mn)^2}=\left(\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right)=\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right)$$
$$=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{a^4}+\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{a^2b^2}+\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{b^4}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用三角恒等式 $\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2(2\alpha)$ 与 $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2(2\alpha)$ 化简，并重组含 $\sin^2(2\alpha)$ 的项，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(mn)^2}&=\frac{1}{4}\sin^2(2\alpha)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)+\frac{1}{a^2b^2}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2(2\alpha)\right)\\&=\frac{1}{4}\sin^2(2\alpha)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}-\frac{2}{a^2b^2}\right)+\frac{1}{a^2b^2}\\&=\frac{1}{4}\sin^2(2\alpha)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{1}{a^2b^2}\quad\text{（配方）}\end{aligned}$$

因 $\sin^2(2\alpha)\in[0,1]$，且由 $a>b>0$ 知 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\neq0$，故 $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2$ 为正. 要使 $\frac{1}{(mn)^2}$ 最小，需 $\sin^2(2\alpha)=0$，此时 $\frac{1}{(mn)^2}$ 取最小值 $\frac{1}{a^2b^2}$，即 $(mn)^2$ 最大值为 a^2b^2，故 mn 最大值为 $\sqrt{a^2b^2}=ab$.

此情形发生于 $2\alpha=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$，即 $\alpha=0$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时.

- 若 $\alpha=0$，点 A 在 x 轴上，即 $A(m,0)$. 代入椭圆方程得 $\frac{m^2}{a^2}=1\implies m=a$；此时 B 在 y 轴上，即 $B(0,n)$，代入椭圆方程得 $\frac{n^2}{b^2}=1\implies n=b$，故 $mn=ab$.
- 若 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，点 A 在 y 轴上，即 $A(0,m)$. 代入椭圆方程得 $\frac{m^2}{b^2}=1\implies m=b$；此时 B 在 x 轴上，即 $B(-n,0)$，代入椭圆方程得 $\frac{n^2}{a^2}=1\implies n=a$，故 $mn=ba$.

此两种情形下菱形对角线与椭圆轴重合，mn 最大值均为 ab. 因此菱形 $ABCD$ 面积最大值为 $S_{\max}=2(mn)_{\max}=2ab$.

传统坐标几何方法直接联立直线与椭圆的方程求解此问题.

解 (1) 证明定值. 设直线 OA 的斜率为 k，当 OA 与 x 轴重合时 $k=0$；当 OA 与 y 轴重合时，可视为 $k\to\infty$ 的极限情况，或单独讨论，则直线 OA 的方程为 $y=kx$. 与椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立并消去 y，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx)^2}{b^2}=1\implies x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=1\implies x^2\left(\frac{b^2+a^2k^2}{a^2b^2}\right)=1.$$

解得点 A 的横坐标平方 $x_A^2=\frac{a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$，从而 $y_A^2=k^2x_A^2=\frac{a^2b^2k^2}{b^2+a^2k^2}$，故

$$OA^2=x_A^2+y_A^2=\frac{a^2b^2}{b^2+a^2k^2}+\frac{a^2b^2k^2}{b^2+a^2k^2}=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2+a^2k^2}.$$

由 $OB\perp OA$，直线 OB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，将 k 替换为 $-\frac{1}{k}$ 即得

$$OB^2=\frac{a^2b^2(1+(-\frac{1}{k})^2)}{b^2+a^2(-\frac{1}{k})^2}=\frac{a^2b^2(1+\frac{1}{k^2})}{b^2+\frac{a^2}{k^2}}=\frac{a^2b^2\frac{k^2+1}{k^2}}{\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}}=\frac{a^2b^2(k^2+1)}{a^2+b^2k^2}.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵，有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

二者倒数之和为

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{b^2+a^2k^2}{a^2b^2(1+k^2)}+\frac{a^2+b^2k^2}{a^2b^2(1+k^2)}$$
$$=\frac{(b^2+a^2)+(a^2+b^2)k^2}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{(a^2+b^2)(1+k^2)}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

计算过程虽涉及繁琐代数运算, 最终仍能证明该值为定值.

(2) 求最大面积. 菱形面积 $S=2\cdot OA\cdot OB$,为求其最大值考察 $S^2=4\cdot OA^2\cdot OB^2$, 即

$$S^2=4\cdot\frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2+a^2k^2}\cdot\frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2+b^2k^2}=\frac{4a^4b^4(1+k^2)^2}{(b^2+a^2k^2)(a^2+b^2k^2)}.$$

这是关于斜率 k 的复杂函数. 为求其最值, 令 $u=k^2$ $(u\geq 0)$, 考察函数 $f(u)=\frac{4a^4b^4(1+u)^2}{(b^2+a^2u)(a^2+b^2u)}$ 的单调性, 但求导过程相当繁琐.

更直接的思路是观察分母 $(b^2+a^2u)(a^2+b^2u)=a^2b^2+(a^4+b^4)u+a^2b^2u^2$. 要使 $f(u)$ 最大, 等价于使其分母相对于分子 $(1+u)^2$ 增长最慢. 可验证, 当 $u=0$ 即 $k=0$, 菱形对角线与坐标轴重合, 或 $u\to\infty$ 即 $k\to\infty$ 时函数取最大值. 当 $k=0$ 时 $OA=a$, $OB=b$, 面积 $S=2ab$; 当 $k\to\infty$ 时 $OA=b$, $OB=a$, 面积 $S=2ab$. 因此最大面积为 $2ab$.

对比之下, 参数坐标法把点的位置与角度 α 直接关联, 代数结构更对称、更清晰, 用三角恒等式即可完成简化, 避开了斜率 k 及其趋于无穷的复杂情况.

4.0.1.3.3 双曲线的参数方程 对于标准双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 需寻找满足 $u^2-v^2=1$ 的函数对. 一种选择是利用三角恒等式 $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$. 令 $\frac{x}{a}=\sec\theta$, $\frac{y}{b}=\tan\theta$, 得到双曲线的三角参数方程.

$$\begin{cases}x=a\sec\theta\\ y=b\tan\theta\end{cases}\quad(\theta\text{ 为参数})\tag{4-4}$$

其中, 当 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时, 表示双曲线的右支; 当 $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 时, 表示左支.

另一种方法是使用双曲函数. 定义双曲余弦 $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ 和双曲正弦 $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$. 它们满足基本恒等式 $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$. 由此可得双曲线的双曲参数方程.

$$\begin{cases}x=a\cosh t\\ y=b\sinh t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}\text{ 为参数})\tag{4-5}$$

此参数方程仅表示双曲线的右支. 左支的参数方程为 $x=-a\cosh t, y=b\sinh t$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

4.0.1.3.4 抛物线的参数方程 对于标准抛物线方程 $y^2=2px\ (p>0)$, 可以直接选取一个坐标作为参数, 例如令 $y=t$, 则 $x=\frac{t^2}{2p}$. 然而, 为了避免在处理中出现分数, 更常用且形式更整齐的参数化是令 $y=2pt$. 代入原方程 $(2pt)^2=2px \implies 4p^2t^2=2px \implies x=2pt^2$.

$$\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}\text{ 为参数}) \tag{4-6}$$

此参数 t 的几何意义是过抛物线上一点 (x,y) 与顶点 $(0,0)$ 的直线 OP 的斜率 $k_{OP}=\frac{y}{x}=\frac{2pt}{2pt^2}=\frac{1}{t}$. 因此参数 t 是过该点与原点连线斜率的倒数.

例题 4.10 在抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的对称轴(x 轴)正方向上是否存在一点 K, 使得对于经过 K 点的抛物线的任意一条弦 AB, 总有 $\frac{1}{|KA|^2}+\frac{1}{|KB|^2}$ 为定值? 证明你的结论.

解 本题是抛物线焦弦性质的拓展, 判断是否存在一个特殊点使所有过该点的弦都满足一个特定的代数关系. 这类定点与变动弦长度关系的问题, 转换到极坐标系下往往能简化运算.

假设在 x 轴正半轴上存在这样一点 $K(x_0,0)\ (x_0>0)$, 以 K 为极点、x 轴正方向为极轴建立新极坐标系. 设极坐标 (ρ,θ) 与原直角坐标 (x,y) 的转换关系为 $x=x_0+\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$. 代入抛物线方程 $y^2=2px$, 整理得关于极径 ρ 的一元二次方程

$$(\rho\sin\theta)^2=2p(x_0+\rho\cos\theta)$$

$$\rho^2\sin^2\theta-2p\rho\cos\theta-2px_0=0.$$

任意一条过点 K 的弦 AB 由固定的极角 θ 及 $\theta+\pi$ 的直线表示, 实际形成两点弦时需 $\sin\theta\neq0$, 其与抛物线的两交点 A,B 到极点 K 的距离 $|KA|,|KB|$ 对应上述二次方程两根的绝对值. 设两根为 ρ_1,ρ_2, 由韦达定理,

$$\rho_1+\rho_2=\frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta},\quad \rho_1\rho_2=-\frac{2px_0}{\sin^2\theta}.$$

考察 $\frac{1}{|KA|^2}+\frac{1}{|KB|^2}=\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2}{(\rho_1\rho_2)^2}$, 代入韦达定理结果,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|KA|^2}+\frac{1}{|KB|^2}&=\frac{\left(\frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^2-2\left(-\frac{2px_0}{\sin^2\theta}\right)}{\left(-\frac{2px_0}{\sin^2\theta}\right)^2}\\&=\frac{\frac{4p^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}+\frac{4px_0}{\sin^2\theta}}{\frac{4p^2x_0^2}{\sin^4\theta}}\end{aligned}$$

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

$$= \frac{4p^2\cos^2\theta + 4px_0\sin^2\theta}{4p^2x_0^2}$$
$$= \frac{p\cos^2\theta + x_0\sin^2\theta}{px_0^2}$$

为使其与变动角度 θ 无关, 将 $\sin^2\theta$ 替换为 $1-\cos^2\theta$ 得 $\frac{(p-x_0)\cos^2\theta+x_0}{px_0^2}$. 此分式不随 θ 变化的唯一可能是分子中 $\cos^2\theta$ 项系数为零, 故 $p-x_0=0$, 即 $x_0=p$. 此时表达式变为

$$\frac{(p-p)\cos^2\theta+p}{p\cdot p^2} = \frac{p}{p^3} = \frac{1}{p^2},$$

确与 θ 无关.

因此在抛物线 $y^2=2px$ 的对称轴正向上存在唯一点 $K(p,0)$, 使对任何过 K 的弦 AB 都有 $\frac{1}{|KA|^2}+\frac{1}{|KB|^2}=\frac{1}{p^2}$ 为定值.

下列方法沿用传统的设直线斜率、联立方程与韦达定理求解. 其计算过程更为繁复, 可作为对比, 以体会不同数学工具的效率差异.

解 假设在 x 轴正半轴上存在满足条件的点 $K(x_0,0)$ $(x_0>0)$. 设过点 K 的任意直线 l 的方程为 $y=m(x-x_0)$. 将 $x=\frac{y}{m}+x_0$ 代入抛物线方程 $y^2=2px$ 消去 x, 整理得关于 y 的一元二次方程

$$y^2 = 2p\left(\frac{y}{m}+x_0\right)$$
$$y^2 - \frac{2p}{m}y - 2px_0 = 0.$$

其两根 y_1, y_2 分别为点 A, B 的纵坐标, 由韦达定理 $y_1+y_2=\frac{2p}{m}$, $y_1y_2=-2px_0$.

表示弦长 $|KA|$ 与 $|KB|$. 对点 $A(x_1,y_1)$, 其到 $K(x_0,0)$ 的距离平方为 $|KA|^2=(x_1-x_0)^2+y_1^2$; 由 A 在直线 l 上, $y_1=m(x_1-x_0)$, 故 $x_1-x_0=\frac{y_1}{m}$, 代入得

$$|KA|^2 = \left(\frac{y_1}{m}\right)^2 + y_1^2 = y_1^2\left(\frac{1}{m^2}+1\right) = y_1^2\frac{1+m^2}{m^2},$$

同理 $|KB|^2 = y_2^2\frac{1+m^2}{m^2}$. 故目标表达式为

$$\frac{1}{|KA|^2}+\frac{1}{|KB|^2} = \frac{m^2}{y_1^2(1+m^2)}+\frac{m^2}{y_2^2(1+m^2)} = \frac{m^2}{1+m^2}\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}\right)$$
$$= \frac{m^2}{1+m^2}\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{(y_1y_2)^2}\right).$$

用韦达定理表示 $y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\left(\frac{2p}{m}\right)^2-2(-2px_0)=\frac{4p^2}{m^2}+4px_0$, 代入上式,

$$\frac{1}{|KA|^2}+\frac{1}{|KB|^2} = \frac{m^2}{1+m^2}\cdot\frac{\frac{4p^2}{m^2}+4px_0}{(-2px_0)^2}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \frac{4p(\frac{p}{m^2}+x_0)}{4p^2x_0^2} \\
&= \frac{m^2}{1+m^2} \cdot \frac{\frac{p+m^2x_0}{m^2}}{px_0^2} \\
&= \frac{p+m^2x_0}{(1+m^2)px_0^2}.
\end{aligned}
$$

要使此式不随斜率 m 变化, 将其视作关于 m^2 的分式函数 $\frac{x_0m^2+p}{(px_0^2)m^2+px_0^2}$. 形如 $\frac{Am+B}{Cm+D}$ 的分式函数若为常数, 须 $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$ $(C,D\neq 0)$. 应用于此分式得 $\frac{x_0}{px_0^2}=\frac{p}{px_0^2}$; 由 $p>0, x_0>0$ 分母不为零, 故 $x_0=p$.

尚需验证直线 AB 垂直于 x 轴(斜率 m 不存在)的特殊情形. 若直线为 $x=x_0$, 交点为 $A(x_0,\sqrt{2px_0})$ 与 $B(x_0,-\sqrt{2px_0})$, 此时 $|KA|^2=2px_0$, $|KB|^2=2px_0$, 故 $\frac{1}{|KA|^2}+\frac{1}{|KB|^2}=\frac{1}{px_0}$. 此值应与斜率存在时的定值相等, 即在 $x_0=p$ 时

$$
\frac{1}{px_0}=\frac{p+m^2x_0}{(1+m^2)px_0^2}, \quad \frac{1}{p^2}=\frac{p+m^2p}{(1+m^2)p^3}=\frac{p(1+m^2)}{p^3(1+m^2)}=\frac{1}{p^2},
$$

等式成立. 因此点 K 坐标为 $(p,0)$ 时结论对所有情形均成立.

4.0.1.3.5 摆线 当一个圆沿一条直线无滑动地滚动时, 摆线指的是圆周上一个定点的轨迹. 建立如下几何模型. 一个半径为 r 的圆在 x 轴上滚动, 其上的定点 P 最初位于原点 O. 取圆滚过的角度 θ 作为参数.

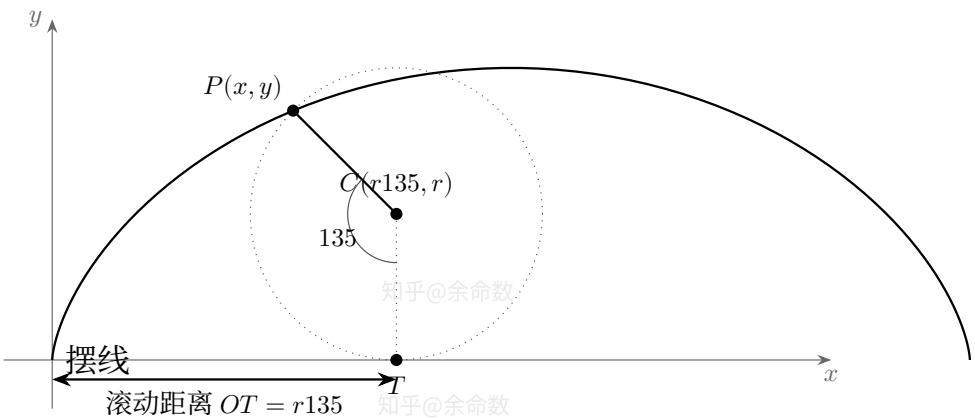


图 4.7 摆线的生成过程.

当圆心从 $(0,r)$ 移动到 $C(x_C,y_C)$ 时, 圆滚过了角度 θ.

- 圆心 C 的坐标. 由于是无滑动滚动, 圆心在 x 轴方向上移动的距离等于圆滚过的弧长, 即 $r\theta$. 圆心高度始终为 r. 所以 $C(r\theta,r)$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

- 点 P 相对于圆心 C 的位置. 设 P 的坐标为 (x, y). 向量 $\vec{CP}$ 的起点为 C, 终点为 P. 相比于竖直向下的位置(对应初始位置), 向量 $\vec{CP}$ 旋转了 θ 角. 因此, 其分量为.

$$x_P - x_C = -r\sin\theta$$

$$y_P - y_C = -r\cos\theta$$

- 点 P 的绝对坐标.

$$x = x_C - r\sin\theta = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$

$$y = y_C - r\cos\theta = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

最终得到摆线的参数方程.

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}) \tag{4-7}$$

4.0.2 极坐标系

笛卡尔直角坐标系以水平和竖直的网格定位点, 这种体系在描述平移、矩形等几何结构时十分便利. 但在研究旋转或向心运动生成的轨迹时, 直角坐标的局限性便显现出来. 例如, 描述一张匀速向外扩张同时匀速旋转的蛛网, 或是行星环绕太阳的椭圆轨道, 其直角坐标方程都显得笨拙而缺乏直观.

早在 17 世纪, 艾萨克·牛顿在其《流数法》中就构想了多种坐标系, 其中之一便以角度和长度描述曲线. 此时, 瑞士数学家雅各布·伯努利在研究诸如阿基米德螺线 ($\rho = a\theta$) 和双纽线 ($\rho^2 = a^2\cos(2\theta)$) 等曲线时, 也发现用径向距离和角度表达方程, 形式简洁. 他们意识到, 对于这些以一个中心点为基准的图形, 更自然的提问是它离中心多远、朝哪个方向.

这种源于对运动和自然形态的洞察, 最终演化为一套完整的坐标体系, 即我们现在所熟知的极坐标系. 它的构建基于两个最基本的元素. 一个作为参照的中心点, 和一条作为参照方向的射线.

4.0.2.1 极坐标的定义

- **极点**: 平面内一个固定的点, 记作 O.
- **极轴**: 从极点 O 出发的一条固定的射线, 通常记作 Ox.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 4.2 (极坐标) 平面内任意一点 P 的位置, 可以由一个有序数对 (ρ, θ) 唯一确定, 其中.

- ρ 是从极点 O 到点 P 的距离, 称为点 P 的**极径**. 约定 $\rho \geq 0$.
- θ 是从极轴 Ox 逆时针旋转到射线 OP 所成的角, 称为点 P 的**极角**.

这个数对 (ρ, θ) 就称为点 P 的**极坐标**.

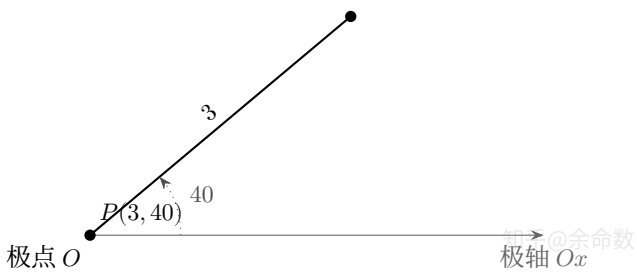


图 4.8 极坐标系的构成.

一个点的极坐标表示不是唯一的. 例如, 点 $(2, \pi/4)$ 的极角若增加 2π 的整数倍, 即 $(2, \pi/4 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, 它们都表示同一个点. 极点 O 的极坐标为 $(0, \theta)$, 其中 θ 可以是任意角. 在没有特殊说明时, 我们通常将极角 θ 的范围限制在 $[0, 2\pi)$.

4.0.2.2 极坐标与直角坐标的互化

为了能够在两种坐标系之间灵活切换, 需要建立它们之间的代数联系. 最自然的方式是如下标准对齐.

- 将极坐标系的**极点** O 与直角坐标系的**原点** $(0, 0)$ 重合.
- 将极坐标系的**极轴** Ox 与直角坐标系的 x **轴正半轴**重合.

在此设定下, 考察点 P 的两种坐标表示 (ρ, θ) 和 (x, y). 由上图中的直角三角形关系, 可以立即得到转换公式.

4.0.2.2.1 由极坐标化为直角坐标

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

4.0.2.2.2 由直角坐标化为极坐标

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \implies \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

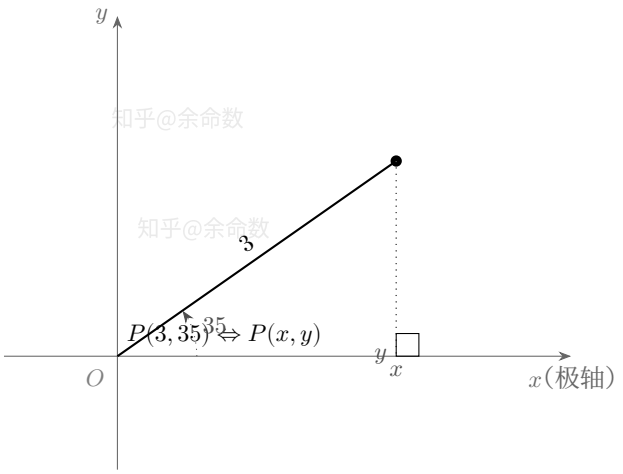


图 4.9 极坐标与直角坐标的几何关系.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

在计算 θ 时，必须根据点 (x,y) 所在的象限来确定其具体值，因为反正切函数 $\arctan(\frac{y}{x})$ 的值域通常是 $(-\pi/2, \pi/2)$，无法覆盖所有象限.

例题 4.11 将极坐标为 $(4, \frac{2\pi}{3})$ 的点化为直角坐标.

解 已知 $\rho = 4, \theta = \frac{2\pi}{3}$，代入转换公式得

$$x = \rho\cos\theta = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2,$$
$$y = \rho\sin\theta = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

故该点的直角坐标为 $(-2, 2\sqrt{3})$.

例题 4.12 将直角坐标为 $(-1,-1)$ 的点化为极坐标(要求 $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$).

解 已知 $x = -1, y = -1$. 先算极径 $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$，再定极角 θ. 由

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

二者均为负,故 θ 为第三象限角,满足条件者为 $\theta = \frac{5\pi}{4}$. 故该点的极坐标为 $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

例题 4.13 将下列方程在直角坐标与极坐标之间进行互化.

1. 直角坐标方程:$x^2+(y-2)^2=4$
2. 极坐标方程:$\rho=\frac{6}{2\cos\theta-3\sin\theta}$

解 (1) 将直角坐标方程 $x^2+(y-2)^2=4$ 化为极坐标方程. 展开方程得 $x^2+y^2-4y+4=4$, 即 $x^2+y^2=4y$. 以代换公式 $x^2+y^2=\rho^2$, $y=\rho\sin\theta$ 代入, 得 $\rho^2=4\rho\sin\theta$. 当 $\rho\neq0$ 时两边约去 ρ 得 $\rho=4\sin\theta$;而 $\rho=0$ 即极点这一情形已包含于 $\rho=4\sin\theta$ 中(取 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时 $\rho=0$). 故原方程对应的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(2) 将极坐标方程 $\rho=\frac{6}{2\cos\theta-3\sin\theta}$ 化为直角坐标方程. 将分母移到左侧得 $\rho(2\cos\theta-3\sin\theta)=6$, 即 $2\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta=6$. 以 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 代入得 $2x-3y=6$, 此即所求直角坐标方程, 表示一条直线.

4.0.2.3 常见曲线的极坐标方程

将曲线的直角坐标方程通过代换公式转化为极坐标方程, 是研究曲线的一种方法. 更有启发性的是直接在极坐标系下, 依据曲线的几何定义来推导其方程.

4.0.2.3.1 直线的极坐标方程

1. **经过极点的直线**

   若一条直线通过极点 O, 则其上所有点(除极点外)的极角 θ 均等于一个定值 α 或 $\alpha+\pi$. 因此, 其方程极为简洁.

   $$\theta=\alpha\quad(\rho\in\mathbb{R})$$

   其中 α 是直线的倾斜角.

2. **不经过极点的直线**

   对于一条不经过极点的直线 l, 可用其法线段的性质来刻画. 从极点 O 向直线 l 作垂线, 垂足为 N. 设线段 ON 的长度为 p $(p>0)$, 且射线 ON 的极角为 α.

   设 $P(\rho,\theta)$ 是直线 l 上任意一点. 在 $\triangle ONP$ 中, $\angle ONP=\pi/2$、$ON=p$、$OP=\rho$、$\angle NOP=|\theta-\alpha|$. 由三角关系可得

   $$ON=OP\cos(\angle NOP)$$

   即

   $$p=\rho\cos(\theta-\alpha)$$

   这就是不经过极点的直线的一般极坐标方程.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

4.0.2.3.2 圆的极坐标方程

1. **圆心在极点**
   若圆心位于极点 O, 半径为 R, 则圆上任意一点的极径 ρ 恒为 R. 其方程为.

$$\rho = R$$

2. **圆经过极点**
   设一个半径为 R 的圆经过极点 O, 其圆心为 $C(R,\alpha)$. 设 $P(\rho,\theta)$ 是圆上异于 O 的任意一点. 在 $\triangle OCP$ 中, $OC = R, CP = R, OP = \rho, \angle COP = |\theta - \alpha|$. 由余弦定理, $CP^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC \cdot OP\cos(\angle COP)$.

$$R^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)$$

   化简得 $\rho^2 = 2R\rho\cos(\theta - \alpha)$. 当 $\rho \neq 0$ 时,

$$\rho = 2R\cos(\theta - \alpha)$$

   特别地, 若圆心在极轴上, $\alpha = 0$, 方程为 $\rho = 2R\cos\theta$. 若圆心在与极轴垂直且过极点的射线上, $\alpha = \pi/2$, 方程为 $\rho = 2R\sin\theta$.

4.0.2.4 圆锥曲线的统一极坐标表示

极坐标系提供了一个基本而统一的视角来审视所有圆锥曲线. 把极点置于焦点, 这些看似形态各异的曲线便归入同一个简洁方程.

定理 4.1 (圆锥曲线的统一极坐标方程) 以圆锥曲线的一个焦点为极点, 以过该焦点且背离对应准线的方向为极轴. 设焦点到对应准线的距离为 p(焦参数), 离心率为 e. 则该圆锥曲线的极坐标方程为.

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

在本章约定 $\rho \geq 0$ 的极坐标中, 该式取满足 $1 - e\cos\theta > 0$ 的方向; 若允许有向极径, 则同一代数式可按有向极径理解.

证明 取焦点为极点 O, 极轴正方向背离准线. 在这样的坐标中, 对应准线可写为直线 $x = -p$. 设曲线上一点 P 的极坐标为 (ρ,θ), 则 $OP = \rho$, 且 P 到准线 $x = -p$ 的距离为 $p + \rho\cos\theta$. 根据圆锥曲线的焦点-准线定义,

$$OP = e \cdot d(P, \text{准线}),$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

因而

$$\rho = e(p + \rho\cos\theta).$$

移项得到 $\rho(1 - e\cos\theta) = ep$. 因 $e > 0$, $p > 0$, 且本章约定 $\rho \geq 0$, 所以实际点对应的方向满足 $1 - e\cos\theta > 0$. 在这些方向上,

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}.$$

当分母趋于 0 时, 对应的是曲线沿该方向趋于无穷远的渐近方向, 与上述方程的极限解释一致. □

此方程是开普勒定律的数学基础, 它精确地描述了天体在引力场中的运行轨道. 以离心率 e 的取值为线索, 分析该方程如何演化为我们所熟知的各种圆锥曲线.

4.0.2.4.1 抛物线 ($e = 1$) 当离心率 $e = 1$ 时, 曲线为抛物线. 代入统一方程, 得其极坐标方程.

知乎@余命数 知乎@余命数

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta}$$

知乎@余命数

这个简洁的方程刻画了抛物线的几何特性.

- 当 $\theta \to 0$ 时, $\cos\theta \to 1$, 分母趋于 0, 故 $\rho \to \infty$. 这正说明抛物线开口、无限延伸.
- 当 $\theta = \pi$ 时, $\cos\theta = -1$, 此时 $\rho = \frac{p}{1-(-1)} = \frac{p}{2}$. 这是抛物线的顶点, 是曲线上离焦点(极点)最近的点.

知乎@余命数

4.0.2.4.2 椭圆 ($0 < e < 1$) 当离心率 $0 < e < 1$ 时, 曲线为椭圆. 其极坐标方程仍为.

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

由于 $0 < e < 1$, 无论 θ 取何值, 都有 $|e\cos\theta| < 1$, 因此分母 $1 - e\cos\theta$ 恒为正且永不等于零. 这一代数性质对应其几何特征. 极径 ρ 始终取有限的正值, 对应椭圆作为一条封闭、有界曲线.

知乎@余命数

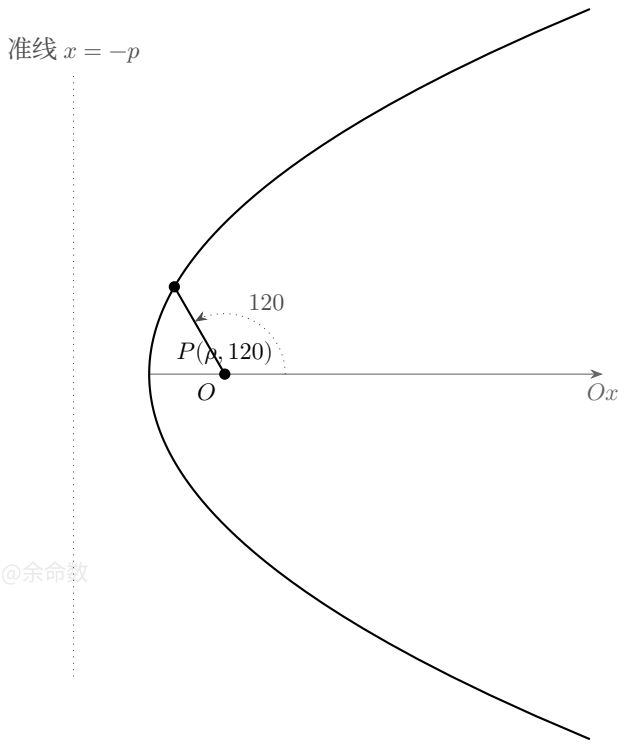
- 当 $\theta = 0$ 时, $\cos\theta = 1$, ρ 取最大值, $\rho_{\max} = \frac{ep}{1-e}$. 此为远日点.
- 当 $\theta = \pi$ 时, $\cos\theta = -1$, ρ 取最小值, $\rho_{\min} = \frac{ep}{1+e}$. 此为近日点.

4.0.2.4.3 双曲线 ($e > 1$) 当离心率 $e > 1$ 时, 曲线为双曲线. 其极坐标方程依旧是.

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

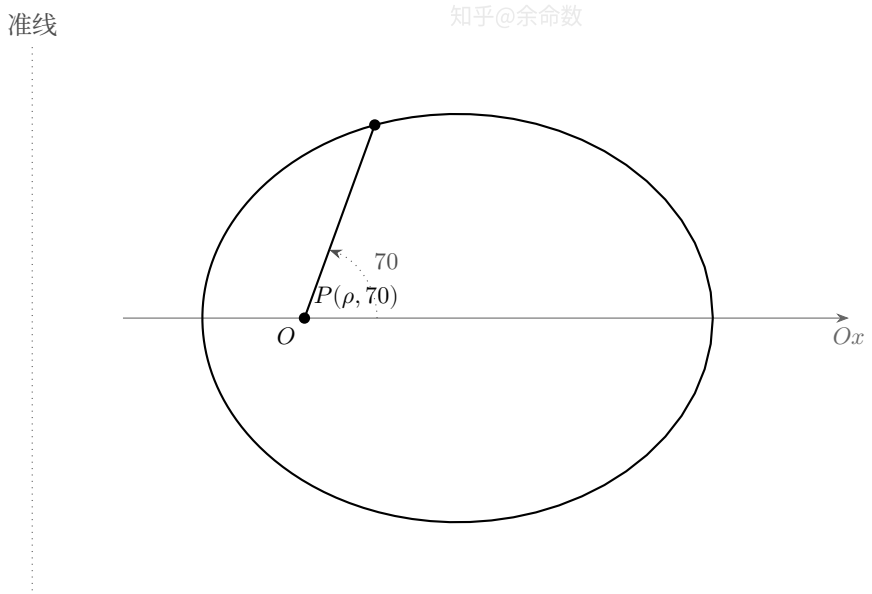
知乎@余命数



知乎@余命数

知乎@余命数

图 4.10　抛物线的极坐标表示 ($e=1$).



知乎@余命数

知乎@余命数

图 4.11　椭圆的极坐标表示 ($0<e<1$).

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此时由于 $e>1$, 存在特定的角 θ_0 使得 $1-e\cos\theta_0=0$, 即 $\cos\theta_0=1/e$. 在这些方向上, $\rho\to\infty$. 这是双曲线渐近线的代数来源, 对应双曲线在无穷远处无限靠近的方向.

- 当 $1-e\cos\theta>0$ 时, $\rho>0$, 描绘出双曲线靠近极点(焦点)的一支.
- 当 $1-e\cos\theta<0$ 时, $\rho<0$. 按照极坐标的约定, 负极径表示在相反方向上取长度为 $|\rho|$ 的点, 恰好描绘出双曲线的另一支.

因此, 这一个看似简单的方程同时包含双曲线的两支, 这是极坐标系的优势所在.

再看极坐标形式的圆锥曲线统一方程如何应用.

4.0.2.4.4 正焦弦长 正焦弦是指过焦点且垂直于主轴(极轴)的弦. 它的长度是圆锥曲线的一个重要内在参数. 设弦的两个端点对应的极角分别为 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 和 $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\rho_1=\frac{ep}{1-e\cos(\frac{\pi}{2})}=ep$$

当 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 时,

$$\rho_2=\frac{ep}{1-e\cos(\frac{3\pi}{2})}=ep$$

因此, 正焦弦长为 $\rho_1+\rho_2=2ep$. 这个长度通常记作 $2l$. 量 $l=ep$ 被称为半正焦弦长或焦参数. 于是, 圆锥曲线的统一极坐标方程也可以写成:

$$\rho=\frac{l}{1-e\cos\theta}$$

这个形式在天体力学中尤为常用.

例题 4.14 (焦弦的调和平均性质) 设一条过圆锥曲线焦点（极点）的直线与曲线交于 P,Q 两点. 证明: 焦半径 $|OP|$ 与 $|OQ|$ 的倒数之和为常数, 即 $\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}$ 为定值.

证明 设直线 PQ 与极轴的夹角为 α, 则 P 的极坐标为 (ρ_P,α), Q 的极坐标为 $(\rho_Q,\alpha+\pi)$. 由圆锥曲线的统一极坐标方程 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$, 两点极径分别为

$$|OP|=\rho_P=\frac{ep}{1-e\cos\alpha},\qquad |OQ|=\rho_Q=\frac{ep}{1-e\cos(\alpha+\pi)}=\frac{ep}{1+e\cos\alpha}.$$

两焦半径的倒数之和为

$$\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}=\frac{1-e\cos\alpha}{ep}+\frac{1+e\cos\alpha}{ep}=\frac{(1-e\cos\alpha)+(1+e\cos\alpha)}{ep}=\frac{2}{ep}.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

此结果是与角度 α 无关的常数, 等于半正焦弦长倒数的 2 倍, 亦即半正焦弦长 ep 为所有过焦点弦的两段焦半径的调和平均数. □

例题 4.15 已知行星绕太阳的椭圆轨道方程为 $\rho=\frac{A}{1+\varepsilon\cos\theta}$, 太阳位于焦点. 这里 A 为半正焦弦长, ε 为离心率, 且 θ 是从近日点开始计算的角度. 求此椭圆轨道的半长轴 a 和半短轴 b.

解 题给方程与推导出的标准形式略有差异. 标准形式 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 中 $\theta=0$ 对应远日点, 即离焦点最远的点, 而题中方程 $\rho=\frac{A}{1+\varepsilon\cos\theta}$ 在 $\theta=0$ 时分母最大、ρ 最小, 对应近日点, 这等价于将极轴旋转了 π. 令 $e=\varepsilon,\ ep=A$.

近日点距离, 即 $\theta=0$ 时, 为 $\rho_{\min}=\frac{A}{1+\varepsilon\cos(0)}=\frac{A}{1+\varepsilon}$, 远日点距离, 即 $\theta=\pi$ 时, 为 $\rho_{\max}=\frac{A}{1+\varepsilon\cos(\pi)}=\frac{A}{1-\varepsilon}$. 由椭圆几何性质, 长轴长 $2a$ 为近日点与远日点距离之和, 故

$$2a=\rho_{\min}+\rho_{\max}=\frac{A}{1+\varepsilon}+\frac{A}{1-\varepsilon}=\frac{A(1-\varepsilon)+A(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}=\frac{2A}{1-\varepsilon^2},$$

$$a=\frac{A}{1-\varepsilon^2}.$$

又由 $l=ep=A$ 与 $l=\frac{b^2}{a}$ 知 $A=\frac{b^2}{a}$, 故

$$b^2=aA=\left(\frac{A}{1-\varepsilon^2}\right)\cdot A=\frac{A^2}{1-\varepsilon^2},$$

$$b=\frac{A}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

例题 4.16 求圆锥曲线 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 所有焦弦中点的轨迹方程.

解 设一条焦弦 PQ 的端点为 $P(\rho_1,\alpha)$ 和 $Q(\rho_2,\alpha+\pi)$, 其中 $\rho_1=\frac{ep}{1-e\cos\alpha}$, $\rho_2=\frac{ep}{1+e\cos\alpha}$. 设 PQ 的中点为 M, 先求 M 的直角坐标. 点 P 的直角坐标为 $(\rho_1\cos\alpha,\rho_1\sin\alpha)$, 点 Q 的直角坐标为 $(\rho_2\cos(\alpha+\pi),\rho_2\sin(\alpha+\pi))=(-\rho_2\cos\alpha,-\rho_2\sin\alpha)$, 故中点 $M(x_M,y_M)$ 为

$$x_M=\frac{\rho_1\cos\alpha-\rho_2\cos\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2)\cos\alpha,$$

$$y_M=\frac{\rho_1\sin\alpha-\rho_2\sin\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\rho_1-\rho_2)\sin\alpha.$$

计算 $\rho_1-\rho_2$,

$$\rho_1-\rho_2=ep\left(\frac{1}{1-e\cos\alpha}-\frac{1}{1+e\cos\alpha}\right)=ep\left(\frac{2e\cos\alpha}{1-e^2\cos^2\alpha}\right)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$= \frac{2e^2 p\cos\alpha}{1-e^2\cos^2\alpha}.$$

代入 x_M, y_M 的表达式得

$$x_M = \frac{e^2 p\cos^2\alpha}{1-e^2\cos^2\alpha}, \qquad y_M = \frac{e^2 p\sin\alpha\cos\alpha}{1-e^2\cos^2\alpha}.$$

这是以 α 为参数的参数方程, 为求其直角坐标方程需消去 α. 考察 x_M 与常数 p 的组合

$$x_M + p = \frac{e^2 p\cos^2\alpha}{1-e^2\cos^2\alpha} + p = \frac{e^2 p\cos^2\alpha + p(1-e^2\cos^2\alpha)}{1-e^2\cos^2\alpha} = \frac{p}{1-e^2\cos^2\alpha},$$

利用此关系重新表达 x_M 与 y_M 得

$$x_M = e^2\cos^2\alpha(x_M+p), \qquad y_M = e^2\sin\alpha\cos\alpha(x_M+p).$$

由第一式解出 $\cos^2\alpha = \frac{x_M}{e^2(x_M+p)}$;将第二式平方得 $y_M^2 = e^4(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha(x_M+p)^2$, 代入 $\cos^2\alpha$ 的表达式化简,

$$\begin{aligned} y_M^2 &= e^4\left(1-\frac{x_M}{e^2(x_M+p)}\right)\left(\frac{x_M}{e^2(x_M+p)}\right)(x_M+p)^2 \\ &= e^4\left(\frac{e^2(x_M+p)-x_M}{e^2(x_M+p)}\right)\left(\frac{x_M}{e^2(x_M+p)}\right)(x_M+p)^2 \\ &= (e^2(x_M+p)-x_M)\,x_M = (e^2x_M + e^2p - x_M)x_M. \end{aligned}$$

整理得轨迹的直角坐标方程, 省略下标 M

$$(1-e^2)x^2 - e^2px + y^2 = 0.$$

此为新圆锥曲线方程, 配方可定其具体形式. 若 $e \neq 1$,

$$\begin{aligned} &(1-e^2)\left(x^2 - \frac{e^2p}{1-e^2}x\right) + y^2 = 0, \\ &(1-e^2)\left(x - \frac{e^2p}{2(1-e^2)}\right)^2 + y^2 = \frac{(1-e^2)e^4p^2}{4(1-e^2)^2} = \frac{e^4p^2}{4(1-e^2)}, \end{aligned}$$

此方程表示中心位于 $(\frac{e^2p}{2(1-e^2)}, 0)$ 的圆锥曲线. 若 $e=1$(原曲线为抛物线), 方程退化为 $-px+y^2=0$, 即 $y^2=px$, 表示与原抛物线全等、开口方向相同、顶点在原点, 即原抛物线焦点的抛物线.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

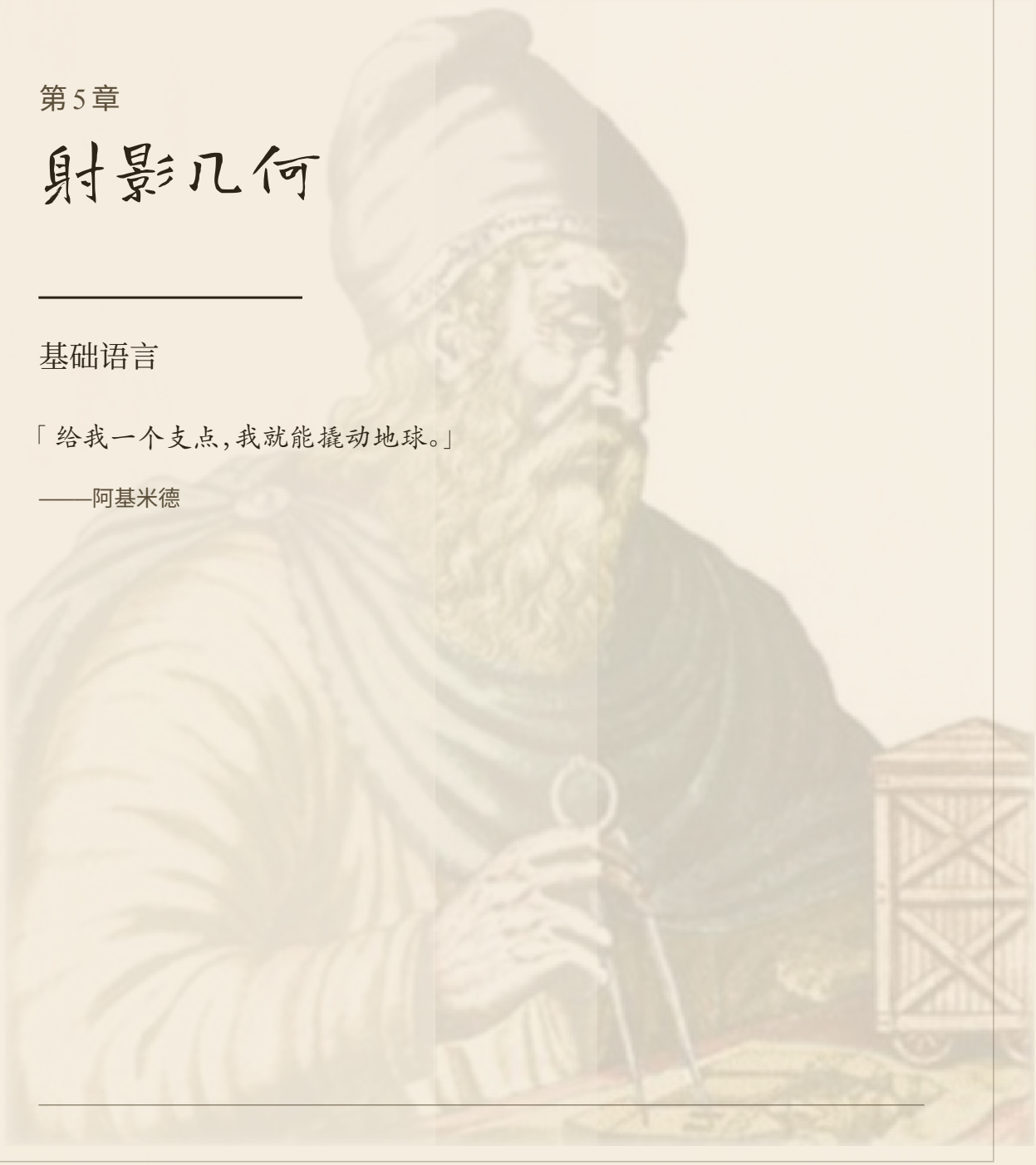
第 5 章

射影几何

基础语言

「给我一个支点，我就能撬动地球。」

——阿基米德



第五章 射影几何

5.1 源起与观念

欧氏几何以直尺和圆规为基本作图工具. 圆规对应距离的度量, 长度与角度等度量性质构成欧氏几何的理论基础.

若我们舍弃圆规, 只保留能作直线的无刻度直尺, 几何学里就只剩两种基本操作, 一是过两点作一条直线, 二是求两条直线的交点.

第二个操作有一个例外, 那就是当两条直线平行时它们没有交点. 这个例外破坏了对称性. 为消除它, 射影几何的先驱者从艺术中的透视法获得启示. 在透视图中, 平行的铁轨在地平线上交于一个灭点.

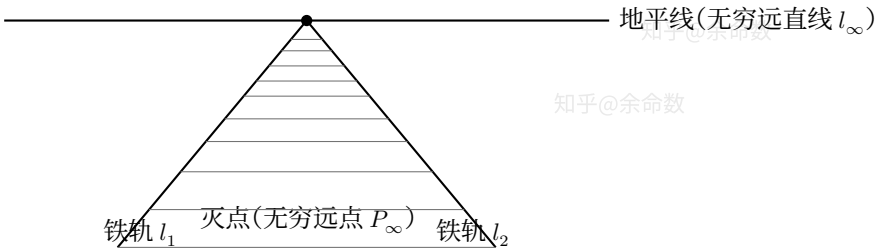


图 5.1 透视法中, 平行的直线在视觉上交于地平线上的灭点.

由此他们提出一个修正, 即假设所有平行线都相交于一个理想的点. 将这一想法系统化, 我们便得到两条规则.

- 对于平面上的每一个方向, 所有与该方向平行的直线(构成一个平行线族)都视为交于同一个**无穷远点**.
- 所有这些新增的无穷远点的集合, 构成一条特殊的直线, 称为**无穷远直线**.

为欧氏平面添加这条无穷远直线, 便得到一个新的几何空间.

定义 5.1 (射影平面) 在欧氏平面的基础上, 添加由所有无穷远点构成的无穷远直线, 所得到的扩充空间称为**射影平面**.

在射影平面中, 关于直线相交的公理变得异常简洁.

- 任意两个不同的点, 唯一确定一条穿过它们的直线.
- 任意两条不同的直线, 唯一确定一个它们的交点.

点与直线地位的这种对称性, 称为**对偶原理**.

射影几何研究在中心投影变换下保持不变的几何性质. 我们可以把中心投影设想为一个点光源 O 将一个平面 π_1 上的图形投射到另一个平面 π_2 上.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

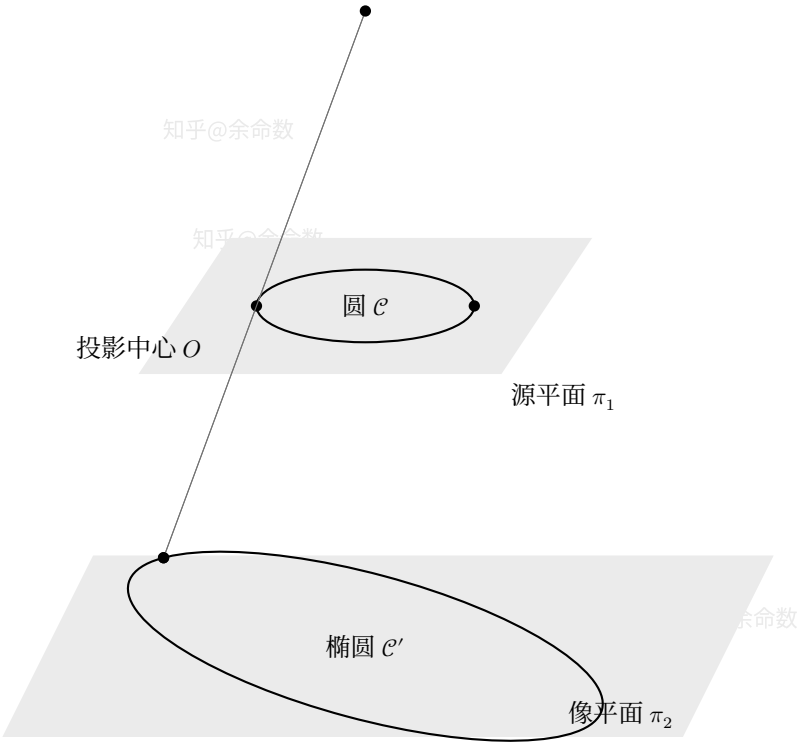


图 5.2　中心投影将一个平面上的圆 $\mathcal{C}$ 映射为另一个平面上的椭圆 $\mathcal{C}'$.

在此变换下, 长度、角度、平行关系通常都会改变. 保持不变的是关联属性, 例如点的共线性与线的共点性. 欧氏几何中性质各异的椭圆、抛物线和双曲线, 在射影几何中被视为同一种对象的不同投影, 即圆锥曲线. 我们可以用它们与无穷远直线的位置关系来区分它们.

- 椭圆与无穷远直线没有实交点.
- 抛物线与无穷远直线相切于一点.
- 双曲线与无穷远直线相交于两点.

为了在此非度量几何中进行定量分析, 我们需要寻找一个在这种投影下保持不变的数值量. 它只依赖于四个共线点的相对位置.

5.2 单比与交比

我们研究在中心投影变换下保持不变的性质. 为了进行定量分析, 我们需要寻找一个在此变换下保持不变的数值量. 长度与角度显然不满足这个要求.

5.2.1 单比

我们先考虑一个更简单的量. 给定共线三点 A, B, C.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 5.2 (单比) 给定共线三点 A, B, C, 点 C 关于基点对 (A, B) 的**单比**定义为有向线段长度之比.

$$r(A, B; C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$$

若在直线上建立坐标系, 设 A, B, C 的坐标为 x_A, x_B, x_C, 则

$$r(A, B; C) = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B}$$

这个值不依赖于坐标系原点或单位长度的选择, 是一个**仿射不变量**. 它在平移、旋转、均匀缩放等仿射变换下保持不变.

然而, 在中心投影下, 单比的值会发生改变. 考虑点列 A, B, C 从投影中心 O 投射到另一条直线上, 得到像点 A', B', C'. 一般而言, $r(A, B; C) \neq r(A', B'; C')$. 投影过程引入了一种非均匀的尺度变化, 破坏了单比的不变性.

5.2.2 交比

单比在投影下会改变, 但两个单比的比值在适当构造下可以抵消这种变化. 这一构造需要四个点.

考虑共线四点 A、B、C、D. 可用基点对 (A, B) 定义两个单比 $r(A, B; C)$ 与 $r(A, B; D)$, 它们的比值即为交比.

定义 5.3 (交比) 给定共线四点 A, B, C, D, 它们的**交比**定义为两个单比的比.

$$(A, B; C, D) = \frac{r(A, B; C)}{r(A, B; D)} = \frac{\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}}$$

在这个定义中, (A, B) 是基准点. 我们分别用 $r(A, B; C)$ 与 $r(A, B; D)$ 度量 C 与 D 相对于这对基准点的位置, 交比就是这两个度量的比值.

中心投影对这两个单比施加相同的尺度扭曲, 取比值后这种扭曲相互抵消, 因此交比是**射影不变量**.

为了严格证明这一点, 我们将交比的概念从点列推广到线束.

定义 5.4 (线束的交比) 以点 O 为中心的四条共点直线 a, b, c, d 构成一个**线束**. 其交比 $O(a, b; c, d)$ 定义为任意一条不经过点 O 的截线 l 与线束交点 A, B, C, D 所构成的点列的交比 $(A, B; C, D)$.

此定义的合理性依赖于交比值不随截线的选择而改变.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.1 (交比的射影不变性) 对一个由四条互异直线组成的固定共点线束, 任取不经过线束中心且不平行于其中任何一条直线的截线, 所得四个有限截点的交比不依赖于截线的选择.

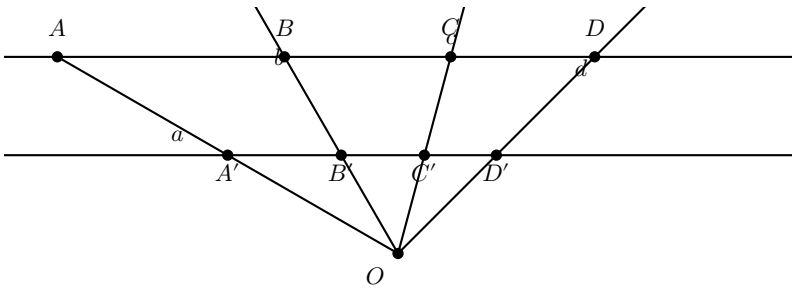


图 5.3 线束 $O(a,b,c,d)$ 被两条不同截线 l 和 l' 所截, 点列交比 $(A,B;C,D)$ 与 $(A',B';C',D')$ 相等.

证明 设线束中心为 O, 四条直线为 a,b,c,d. 截线 l 与之交于 A,B,C,D. 我们用三角形面积来表示有向线段之比.$\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$ 有共同的高, 因此面积比等于底边比.

知乎@余命数

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{\text{Area}(\triangle OAC)}{\text{Area}(\triangle OBC)}$$

利用正弦面积公式 $\text{Area}(\triangle OAC)=\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin(\angle AOC)$, 可得

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin(\angle AOC)}{\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin(\angle BOC)}=\frac{OA\cdot\sin(\angle AOC)}{OB\cdot\sin(\angle BOC)}$$

同理,

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}=\frac{OA\cdot\sin(\angle AOD)}{OB\cdot\sin(\angle BOD)}$$

将两式代入交比定义, 便得

$$\begin{aligned}(A,B;C,D)&=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}\div\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}\\&=\left(\frac{OA\cdot\sin(\angle AOC)}{OB\cdot\sin(\angle BOC)}\right)\div\left(\frac{OA\cdot\sin(\angle AOD)}{OB\cdot\sin(\angle BOD)}\right)\\&=\frac{\sin(\angle AOC)\cdot\sin(\angle BOD)}{\sin(\angle BOC)\cdot\sin(\angle AOD)}\end{aligned}$$

知乎@余命数

记直线 a,c 间的夹角为 $\angle(a,c)$, 则

$$(A,B;C,D)=\frac{\sin\angle(a,c)\cdot\sin\angle(b,d)}{\sin\angle(b,c)\cdot\sin\angle(a,d)}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由于四条直线互异, 且截线不经过线束中心也不平行于其中任何一条直线, 上述交比中的各分母均非零. 此表达式只与线束的内蕴角度有关, 与截线 l 的位置或截点 A, B, C, D 的具体坐标无关. 这就证明了交比的射影不变性. □

这个不变性是射影几何定量分析的基础. 它也可以揭示不同几何学之间的层级关系. 若点 D 为直线上的无穷远点 P_∞, 则其坐标 $x_D \to \infty$.

$$\lim_{x_D\to\infty} \frac{x_D - x_B}{x_D - x_A} = \lim_{x_D\to\infty} \frac{1 - x_B/x_D}{1 - x_A/x_D} = 1$$

因此, 交比退化为单比.

$$(A, B; C, P_\infty) = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} = r(A, B; C)$$

故仿射几何的基本不变量单比, 是射影几何基本不变量交比在一个点为无穷远点时的特例. 射影几何是更普遍的框架.

5.2.3 调和共轭

在交比的所有可能取值中, -1 因其对称性与几何意义而最为特殊.

定义 5.5 (调和共轭) 若共线四点 A, B, C, D 的交比 $(A, B; C, D) = -1$, 则称该点列为**调和点列**. 此时, 称点对 (C, D) **调和分割**点对 (A, B), 或称 C 和 D 关于 A 和 B **调和共轭**.

交比为 -1 的线束相应地被称为**调和线束**.

调和共轭的定义式 $(A, B; C, D) = -1$ 等价于

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

这个关系式说明了调和分割的几何内涵.

- 符号的相反意味着, 点 C 和 D 中, 一个必然是线段 AB 的内分点, 另一个是外分点.
- 表达式的绝对值相等, 即 $|\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{BD}|$, 表明这两个点分割线段 AB 的比的大小是相同的.

这种一内一外、分割比大小相等的关系, 正是调和分割的几何特征.

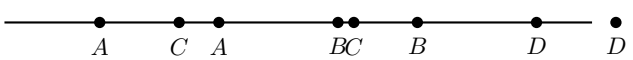


图 5.4 调和点列示意图. 点 C 内分线段 AB, 点 D 外分线段 AB.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

调和共轭的概念将欧氏几何中的一些基本观念统一到射影几何之中. 先考察 C 为线段 AB 中点的特殊情形.

若 C 是 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BC}$, 因此单比 $r(A,B;C)=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}=-1$. 代入调和条件 $(A,B;C,D)=\frac{r(A,B;C)}{r(A,B;D)}=-1$, 得到

$$\frac{-1}{r(A,B;D)}=-1 \implies r(A,B;D)=1$$

即 $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}=1$, 或 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. 对于两个不同的点 A,B, 在欧氏平面内不存在任何有限远处的点 D 能满足此条件. 唯一的可能是点 D 位于该直线的无穷远处.

由此得一个重要结论, 即线段中点的调和共轭点是该直线上的无穷远点. 反之, 与无穷远点调和共轭的点是线段的中点.

调和点列还满足一个度量关系.

定理 5.2 (调和点列的度量关系) 若有限点列 $(A,B;C,D)$ 为调和点列, 且交比定义中涉及的有向线段均非零 (特别地, $A\neq B$ 且 C,D 均不与 A,B 重合), 则有向线段的倒数满足关系式.

$$\frac{2}{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{AD}}$$

其中线段的起点均取为 A.

证明 为方便计算, 我们在直线上建立坐标系, 并令点 A 为原点, 即 $x_A=0$. 设 B,C,D 的坐标分别为 b,c,d. 交比的定义式为

$$(A,B;C,D)=\frac{x_C-x_A}{x_C-x_B}\cdot\frac{x_D-x_B}{x_D-x_A}=-1$$

代入坐标, 得到

$$\frac{c-0}{c-b}\cdot\frac{d-b}{d-0}=-1$$

$$c(d-b)=-d(c-b)$$

展开得 $cd-cb=-cd+db$. 移项整理得

$$2cd=cb+db=b(c+d)$$

当 b,c,d 均不为零时, 两边同除以 bcd, 得到

$$\frac{2}{b}=\frac{c+d}{cd}=\frac{1}{d}+\frac{1}{c}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

由于原点在 A, 有 $b=\overrightarrow{AB}, c=\overrightarrow{AC}, d=\overrightarrow{AD}$. 代入即得

$$\frac{2}{\overrightarrow{AB}}=\frac{1}{\overrightarrow{AC}}+\frac{1}{\overrightarrow{AD}}$$

□

这个关系表明, $\overrightarrow{AB}$ 的长度是 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 长度的调和平均数.

例题 5.1 在直线上给定三点 A, B, C, 其坐标分别为 $0, 5, 8$. 求点 D 的坐标, 使得 $(A, B; C, D)=-1$.

证明 设点 D 的坐标为 x, 由调和共轭条件 $(A, B; C, D)=-1$ 求其位置. 依交比定义有

$$(A, B; C, D)=\frac{x_C-x_A}{x_C-x_B}\cdot\frac{x_D-x_B}{x_D-x_A}=-1.$$

代入已知坐标 $x_A=0, x_B=5, x_C=8, x_D=x$, 整理得

$$\begin{aligned}\frac{8-0}{8-5}\cdot\frac{x-5}{x-0}&=-1,\\ \frac{8}{3}\cdot\frac{x-5}{x}&=-1,\\ 8(x-5)&=-3x,\\ 8x-40&=-3x,\\ 11x&=40,\\ x&=\frac{40}{11}.\end{aligned}$$

因此点 D 的坐标为 $40/11$.

点 A, B 的坐标为 $0, 5$, 点 C 的坐标为 8, 落在线段 AB 之外为外分点; 所求点 D 的坐标为 $40/11\approx 3.64$, 介于 A, B 之间为内分点. 一内一外的分割方式正符合调和点列的几何特征. □

5.3 二次曲线的极点与极线

调和共轭把直线几何与二次曲线几何联系起来, 并且给出二次曲线的一种内在对称性.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

5.3.1 调和分割与定比点差

先回顾调和点列的定义. 若点列 $(A,B;P,Q)$ 为调和点列, 其交比为 -1.

$$(A,B;P,Q)=\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}}\div\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{BQ}}=-1$$

即

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}}=-\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{BQ}}$$

这个关系式可以用另一种方式来表述. 设存在一个常数 λ, 使得

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}\quad\text{且}\quad\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$$

其中 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{BP},\overrightarrow{QB}=-\overrightarrow{BQ}$. 代入后得到

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{BP}}=-\lambda\quad\text{且}\quad\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{BQ}}=\lambda$$

这两个式子合并, 恰好满足交比为 -1 的条件. 因此, 调和分割可用定比点差这一等价形式描述, 即点 P 和 Q 以大小相等、方向相反的比率分割有向线段 AB.

若设 A,B 的坐标分别为 (x_A,y_A) 和 (x_B,y_B), 则点 P,Q 的坐标可以由定比分点公式表示.

$$P=\frac{A+\lambda B}{1+\lambda}=\left(\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}\right)$$

$$Q=\frac{A-\lambda B}{1-\lambda}=\left(\frac{x_A-\lambda x_B}{1-\lambda},\frac{y_A-\lambda y_B}{1-\lambda}\right)$$

这个代数表示给出了二次曲线上点列轨迹的研究工具.

5.3.2 极点与极线的定义与推导

在一条直线上, 调和分割给出四个点之间一种非常刚性的投影不变量, 一旦给定 $(A,B;P,Q)=-1$, 点 Q 便由 A,B,P 唯一决定, 反之亦然. 这是一维情形下点与点之间的精细对应关系.

现在把问题放到平面上的二次曲线 $\mathcal{C}$ 上. 任取一条过定点 P 的割线, 设它与 $\mathcal{C}$ 交于 A,B 两点. 由调和分割的性质, 这条割线上存在唯一的点 Q, 使 $(A,B;P,Q)$ 为调和点列. 让割线绕 P 旋转, 便得到一族点 Q.

不同割线给出不同的 A,B, 因而对应的 Q 也各不相同. 但调和分割是投影不变量, 对图形作任意投影变换, A,B,P,Q 的调和性都保持不变. 因此这些 Q 的集合应具有某种几何结构.

于是提出下列的问题.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

问题. 给定平面上的一个二次曲线 $\mathcal{C}$ 和一个定点 P. 从点 P 引出任意一条割线, 与二次曲线 $\mathcal{C}$ 交于 A, B 两点. 在这条割线上, 存在唯一的点 Q, 使得点列 $(A, B; P, Q)$ 构成调和点列. 当割线绕着点 P 转动时, 点 Q 的轨迹是什么?

所有这样的 Q 都落在同一条直线上, 这条直线只由点 P 与二次曲线 $\mathcal{C}$ 决定, 与割线选择无关. 现引入极点与极线的定义.

定理 5.3 (极点与极线定理) 对于非退化的标准椭圆、双曲线或抛物线 $\mathcal{C}$ 和一点 P, 当过 P 的割线与 $\mathcal{C}$ 交于两个不同点 A, B 时, 所有满足 $(A, B; P, Q) = -1$ 的有限点 Q 都落在一条固定直线上. 这条直线称为 P 关于 $\mathcal{C}$ 的**极线**, 点 P 称为该极线的**极点**.

证明 以椭圆为例证明. 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

设极点为 $P(x_0, y_0)$, 动点为 $Q(x, y)$. 割线与椭圆的交点记为 $A(x_A, y_A)$ 与 $B(x_B, y_B)$.

根据上一节中调和点列的向量(坐标)表示, 存在常数 $\lambda(\lambda \neq \pm 1)$, 使得 P 和 Q 在割线上的坐标可以表示为

$$\begin{aligned}
x_0 = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} \quad &\Longleftrightarrow \quad x_A + \lambda x_B = x_0(1+\lambda), \\
y_0 = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} \quad &\Longleftrightarrow \quad y_A + \lambda y_B = y_0(1+\lambda), \\
x = \frac{x_A - \lambda x_B}{1-\lambda} \quad &\Longleftrightarrow \quad x_A - \lambda x_B = x(1-\lambda), \\
y = \frac{y_A - \lambda y_B}{1-\lambda} \quad &\Longleftrightarrow \quad y_A - \lambda y_B = y(1-\lambda).
\end{aligned}$$

因为点 A 和 B 均在椭圆上, 它们满足

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{x_B^2}{a^2} + \frac{y_B^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

为刻画 Q 的轨迹, 需消去与具体割线相关的量 $(x_A, y_A, x_B, y_B, \lambda)$, 得到只含 (x, y) 与定点 (x_0, y_0) 的关系式.

用 (1) 减去 λ^2 倍的 (2), 两端相减得

$$\left(\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2}\right) - \lambda^2 \left(\frac{x_B^2}{a^2} + \frac{y_B^2}{b^2}\right) = 1 - \lambda^2.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

即

$$\frac{x_A^2-\lambda^2x_B^2}{a^2}+\frac{y_A^2-\lambda^2y_B^2}{b^2}=1-\lambda^2.$$

再由平方差公式分解, 得

$$\frac{(x_A-\lambda x_B)(x_A+\lambda x_B)}{a^2}+\frac{(y_A-\lambda y_B)(y_A+\lambda y_B)}{b^2}=1-\lambda^2.$$

将前面得到的关系

$$x_A-\lambda x_B=x(1-\lambda),\quad x_A+\lambda x_B=x_0(1+\lambda),$$

以及 y 的对应式代入, 得到

$$\frac{x(1-\lambda)\cdot x_0(1+\lambda)}{a^2}+\frac{y(1-\lambda)\cdot y_0(1+\lambda)}{b^2}=1-\lambda^2.$$

注意 $(1-\lambda)(1+\lambda)=1-\lambda^2$, 于是

$$(1-\lambda^2)\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\right)=1-\lambda^2.$$

由于割线与椭圆有两个不同交点, $\lambda\neq\pm1$, 因此 $1-\lambda^2\neq0$, 可约去, 得到

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

这是一个关于 (x,y) 的一阶线性方程, 其系数只由椭圆参数 a,b 以及定点 $P(x_0,y_0)$ 决定. 这说明, 随着割线转动, 所有满足调和条件的点 Q 都落在这条固定直线上. 对于双曲线和抛物线, 完全可以作出类似的推导. □

5.3.2.1 消元思路

(1) 与 (2) 给出两个二次约束

$$(1)\quad \frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1,\qquad (2)\quad \frac{x_B^2}{a^2}+\frac{y_B^2}{b^2}=1;$$

调和分割则把 $x_A\pm\lambda x_B$ 与 $y_A\pm\lambda y_B$ 表示成 x_0,y_0,x,y 的一次式. 我们的目标是消去 A,B,λ, 得到只含 P,Q 的式子.

为此我们需要把二次式拆成已知一次因子的乘积.$(1)-\lambda^2(2)$ 正好产生

$$x_A^2-\lambda^2x_B^2=(x_A-\lambda x_B)(x_A+\lambda x_B)$$

与 y 的对应式, 使二次信息可以直接用线性关系代入.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

其他系数选择都不能做到这一点.$(1)-(2)$ 给出 $x_A^2-x_B^2$, 其一次因子 $x_A\pm x_B$ 与已知的 $x_A\pm\lambda x_B$ 不匹配; $(1)-\lambda(2)$ 给出 $x_A^2-\lambda x_B^2$, 也不能按 $x_A\pm\lambda x_B$ 分解. 只有 λ^2 能满足平方差公式的系数要求.

于是 $(1)-\lambda^2(2)$ 把二次曲线的方程与调和分割的线性关系联系起来, 消去 A,B,λ 后得到

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

知乎@余命数

这正是 Q 所满足的线性方程.

定理 5.4 (极线方程) 设点 P 的坐标为 (x_0,y_0).

1. 若二次曲线 $\mathcal{C}$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 则其极线方程为.
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$
2. 若二次曲线 $\mathcal{C}$ 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 则其极线方程为.
$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$
3. 若二次曲线 $\mathcal{C}$ 为抛物线 $y^2=2px$, 则其极线方程为.
$$y_0y=p(x+x_0)$$

证明 椭圆情形已在极点与极线定理的证明中推出, 结果为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

对双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 沿用极点与极线定理证明中的同样记号. 因为交点 A,B 在双曲线上, 有

知乎@余命数

知乎@余命数

$$\frac{x_A^2}{a^2}-\frac{y_A^2}{b^2}=1,\qquad \frac{x_B^2}{a^2}-\frac{y_B^2}{b^2}=1.$$

用第一式减去 λ^2 倍第二式, 再代入调和分割给出的 $x_A\pm\lambda x_B$ 与 $y_A\pm\lambda y_B$ 的表达, 得

$$(1-\lambda^2)\left(\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}\right)=1-\lambda^2.$$

由于 A,B 为两个不同交点且 Q 为有限点, $\lambda\neq\pm1$, 故可约去 $1-\lambda^2$, 得双曲线极线方程

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

对抛物线 $y^2=2px$, 交点满足 $y_A^2=2px_A$ 与 $y_B^2=2px_B$. 仍用第一式减去 λ^2 倍第二式, 得

$$y_A^2-\lambda^2y_B^2=2p(x_A-\lambda^2x_B).$$

左边分解并代入调和分割关系, 得

$$(y_A-\lambda y_B)(y_A+\lambda y_B)=(1-\lambda^2)y_0y.$$

右端的 $x_A-\lambda^2x_B$ 可化为

$$\begin{aligned}x_A-\lambda^2x_B&=\frac{(x_A+\lambda x_B)+(x_A-\lambda x_B)}{2}-\lambda\frac{(x_A+\lambda x_B)-(x_A-\lambda x_B)}{2}\\&=\frac{1-\lambda^2}{2}(x_0+x).\end{aligned}$$

因此

$$(1-\lambda^2)y_0y=p(1-\lambda^2)(x+x_0).$$

约去 $1-\lambda^2$, 得

$$y_0y=p(x+x_0).$$

□

极线方程也可以直接由二次曲线方程作替换得到.

- $x^2\to x_0x$
- $y^2\to y_0y$
- $x\to\frac{1}{2}(x+x_0)$
- $y\to\frac{1}{2}(y+y_0)$
- $xy\to\frac{1}{2}(x_0y+y_0x)$

这个过程被称为**配极变换**或**极化**. 它统一了所有二次曲线的极线方程, 并与点 P 位于曲线上时的切线方程在形式上完全一致.

例题 5.2　过点 $P(1,1)$ 的直线交椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 于 A,B 两点. 在直线 AB 上取异于 P 的点 Q, 使 P,Q 分别为 AB 的内分点与外分点, 且满足

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}.$$

求证点 Q 在某条定直线上.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 由 $\dfrac{1^2}{4}+\dfrac{1^2}{2}=\dfrac{3}{4}<1$ 知点 P 在椭圆内部, 故任意过 P 的割线交椭圆于 A,B 时 P 落在线段 AB 上, 而题设中的 Q 为对应的外分点. 题设条件

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$$

即

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB},$$

其中 P 取内分比、Q 取外分比且大小相等, 这正说明点列 $(A,B;P,Q)$ 为调和点列, 即

$$(A,B;P,Q)=-1.$$

于是 Q 是 P 在割线 AB 上的调和共轭点.

当 $P(1,1)$ 的割线绕 P 转动时, 点 Q 的轨迹即 P 关于椭圆

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

的极线, 由极点与极线定理写出其方程即可.

对一般椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

上一节已经推导出点 $P(x_0,y_0)$ 的极线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$

本题中 $a^2=4,b^2=2$, 极点为 $P(1,1)$, 代入可得

$$\frac{1\cdot x}{4}+\frac{1\cdot y}{2}=1.$$

两边同乘以 4, 化简为

$$x+2y=4,$$

即

$$x+2y-4=0.$$

这是一条与割线无关的定直线. 因此, 无论过 $P(1,1)$ 的直线如何转动, 只要 Q 满足题中的比例条件, 它都必在这条直线 $x+2y-4=0$ 上.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

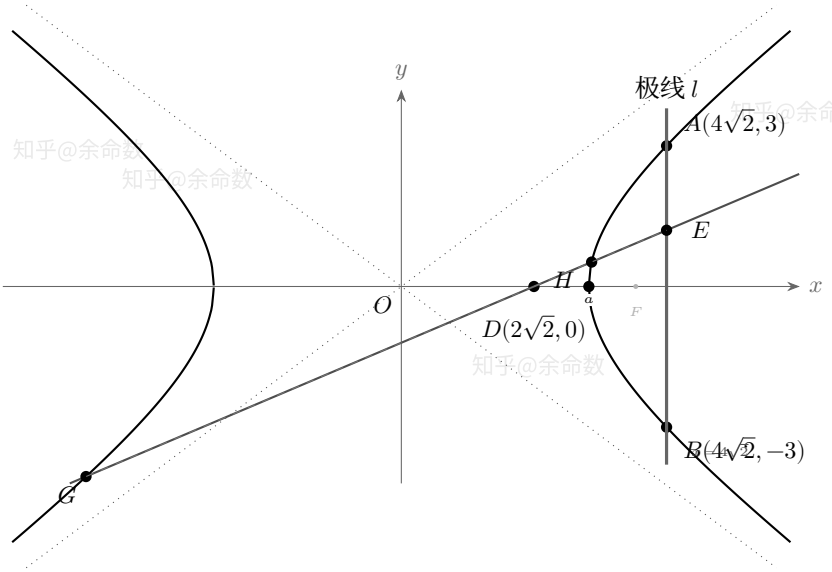
因此, 点 Q 的轨迹是一条定直线, 其方程为

$$x+2y-4=0.$$

□

例题 5.3　已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 过点 $A(4\sqrt{2},3)$, 且焦距为 10.

1. 求 C 的方程.
2. 已知点 $B(4\sqrt{2},-3)$、$D(2\sqrt{2},0)$、E 为线段 AB 上一点, 且直线 DE 交 C 于 G,H 两点. 证明 $\dfrac{|GD|}{|GE|}=\dfrac{|HD|}{|HE|}$.



证明　(1) 双曲线方程由焦距与点 A 在曲线上两个条件确定. 由焦距 10 知 $2c=10$, 即 $c=5$, 故 $c^2=a^2+b^2=25$. 点 $A(4\sqrt{2},3)$ 在双曲线上, 其坐标满足

$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1\implies\frac{32}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$$

由此得到关于 a^2,b^2 的方程组

$$\begin{cases}a^2+b^2=25\\32b^2-9a^2=a^2b^2\end{cases}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将 $b^2=25-a^2$ 代入第二式, 整理得

$$\begin{aligned}32(25-a^2)-9a^2&=a^2(25-a^2),\\ 800-41a^2&=25a^2-a^4,\\ a^4-66a^2+800&=0.\end{aligned}$$

这是一个关于 a^2 的二次方程, 分解因式得 $(a^2-16)(a^2-50)=0$. 解得 $a^2=16$ 或 $a^2=50$. 若 $a^2=50$, 则 $b^2=25-50=-25$, 不合题意. 若 $a^2=16$, 则 $b^2=25-16=9$. 因此, 双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

(2) 待证的 $\dfrac{|GD|}{|GE|}=\dfrac{|HD|}{|HE|}$ 等价于 $\dfrac{|GD|}{|HD|}=\dfrac{|GE|}{|HE|}$, 又因 D,E,G,H 共线, 故等价于交比 $(G,H;D,E)=-1$, 即点对 (D,E) 调和分割点对 (G,H).

题中的定点 D、定直线 AB 与过 D 的变动割线 DGH(交 AB 于 E)恰构成点 D 与直线 AB 间的极点极线结构, 故对其加以考察.

我们直接求点 D 关于双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的极线方程. 极点为 $(x_0,y_0)=(2\sqrt{2},0)$, 应用配极变换得

$$\frac{x_0x}{16}-\frac{y_0y}{9}=1$$

代入坐标得

$$\frac{2\sqrt{2}\cdot x}{16}-\frac{0\cdot y}{9}=1$$

$$\frac{\sqrt{2}x}{8}=1\implies x=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

直线 AB 的方程由其上两点确定. 点 A 的坐标为 $(4\sqrt{2},3)$, 点 B 的坐标为 $(4\sqrt{2},-3)$, 故 AB 是垂直于 x 轴的直线, 方程为 $x=4\sqrt{2}$.

点 D 的极线方程与直线 AB 的方程完全相同, 因此直线 AB 就是点 D 的极线.

根据极点与极线的定义, 对任意一条穿过极点 D 的割线, 若其与双曲线交于 G,H 两点, 与极线交于点 E, 则点列 $(G,H;D,E)$ 必构成调和点列, 即 $(G,H;D,E)=-1$.

由交比定义得

$$\frac{\overrightarrow{GD}}{\overrightarrow{HD}}\div\frac{\overrightarrow{GE}}{\overrightarrow{HE}}=-1\implies\frac{\overrightarrow{GD}}{\overrightarrow{HD}}=-\frac{\overrightarrow{GE}}{\overrightarrow{HE}}$$

取两边的绝对值, 得

$$\frac{|\overrightarrow{GD}|}{|\overrightarrow{HD}|}=\frac{|\overrightarrow{GE}|}{|\overrightarrow{HE}|}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

整理后即得所求证的式子

$$\frac{|GD|}{|GE|}=\frac{|HD|}{|HE|}$$

□

5.4 极点与极线的几何作图

我们考虑如何只用直尺完成极点与极线的相互构造. 这个问题先从调和共轭点的作法入手.

5.4.1 构造调和共轭点

设 A,B,P 为共线三点. 我们作出 P 关于 A,B 的调和共轭点 Q. 作法需要用到**完全四边形**.

一个完全四边形由平面上任意四条直线(无三线共点)构成, 它有六个顶点和三条对角线. 完全四边形的基本性质是, 在任一条对角线上, 这条对角线与另外两条对角线的两个交点, 连同该对角线上的两个原始顶点, 组成调和点列.

5.4.1.0.1 作图步骤

1. 在平面上任取一点 S, 不在直线 ABP 上. 连接 SA,SP,SB.
2. 在直线 SP 上任取一点 R(异于 S,P).
3. 作直线 AR 交 SB 于 D. 作直线 BR 交 SA 于 C.
4. 连接 C,D. 直线 CD 与直线 ABP 的交点即为所求的调和共轭点 Q.

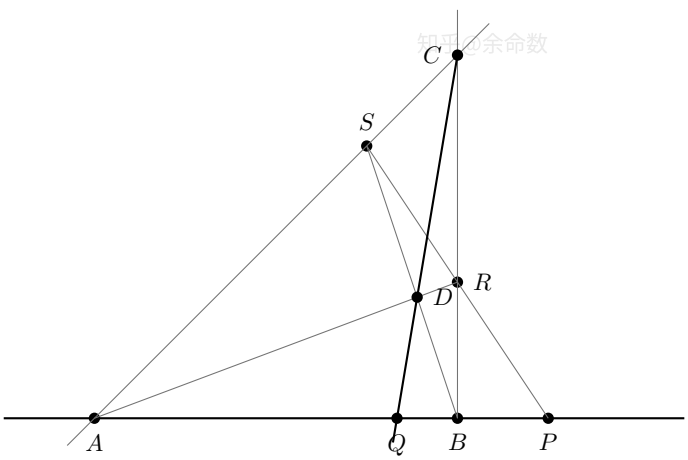


图 5.5　使用完全四边形 $SCDR$(部分顶点为 A,B)构造调和共轭点 Q.

在此构造中, 直线 AB,SP,CD 是完全四边形的三条对角线. 由上述性质, 点列 $(A,B;P,Q)$ 是调和点列.

知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数　知乎@余命数

5.4.2 由极点作极线

知乎@余命数

要作出极点 P 的极线, 只需在极线上构造两点.

5.4.2.0.1 作图步骤

1. 从极点 P 引一条割线交二次曲线 $\mathcal{C}$ 于 A_1, B_1.
2. 使用完全四边形法, 构造 P 关于 A_1, B_1 的调和共轭点 Q_1.
3. 从 P 引另一条割线交 $\mathcal{C}$ 于 A_2, B_2.
4. 同样构造调和共轭点 Q_2.
5. 连接 Q_1, Q_2 即得所求的极线 p.

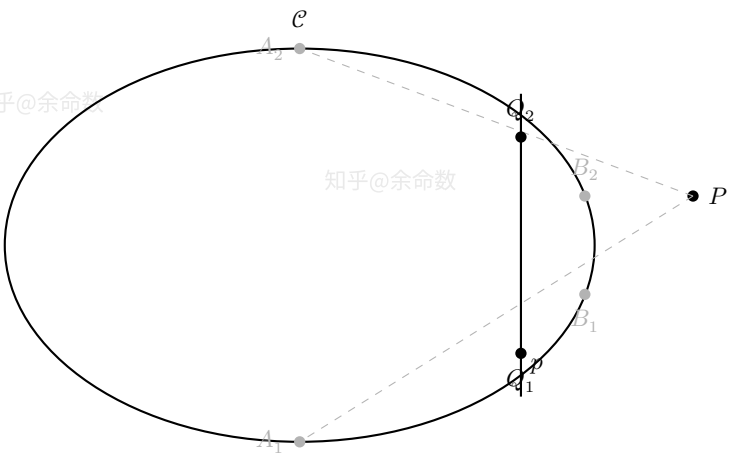


图 5.6 由两个调和共轭点 Q_1, Q_2 确定极线 p.

知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数 知乎@余命数

5.4.3 由极线作极点

下面用拉伊尔定理完成这个作图.

定理 5.5 (拉伊尔定理) 对于本章所讨论的非退化标准二次曲线, 点 P 位于点 Q 关于二次曲线 $\mathcal{C}$ 的极线上, 当且仅当点 Q 位于点 P 关于 $\mathcal{C}$ 的极线上.

证明 我们以标准椭圆为例给出证明. 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 点 Q 的极线为

$$\frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1.$$

于是 P 在 Q 的极线上, 等价于

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

又点 P 的极线为

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

将 $Q(x_2,y_2)$ 代入, 得到同一个对称等式

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=1.$$

故 P 在 Q 的极线上当且仅当 Q 在 P 的极线上. 双曲线与抛物线的极线方程也具有同样的对称双线性形式, 证明完全相同. □

5.4.3.0.1 作图步骤

1. 在给定的极线 p 上任取两点 Q_1,Q_2.
2. 作出点 Q_1 的极线 p_1.
3. 作出点 Q_2 的极线 p_2.
4. 由拉伊尔定理, 所求极点 P 必同时在 p_1 和 p_2 上. 因此, p_1 和 p_2 的交点即为极点 P.

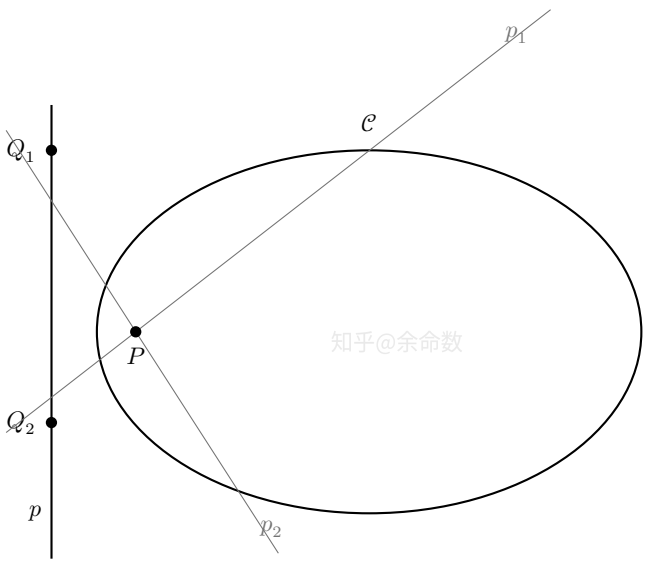


图 5.7　取 p 上两点 Q_1,Q_2, 作其极线 p_1,p_2, 交点即为 p 的极点 P.

5.4.4 自极三角形与综合构造

除了用两个独立的调和共轭点确定一条极线之外, 我们还可以直接作出一个自极三角形, 并从中得到极线. 这个构造同时给出极点与极线之间的对偶关系.

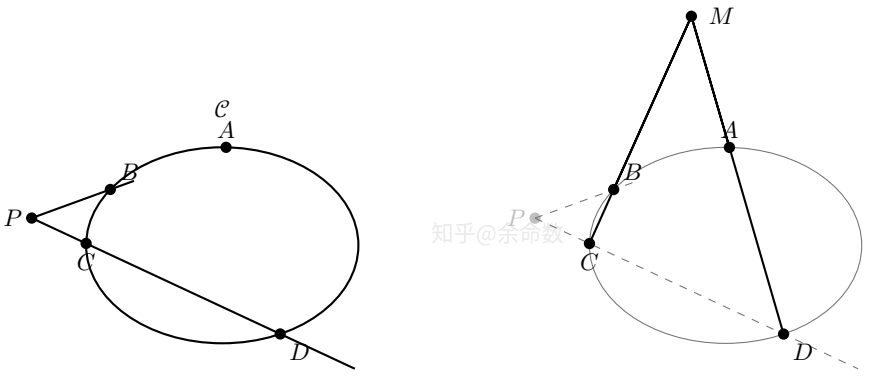
知乎关注 @ 余命数谢谢喵, 有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

设点 Q 在直线 l 上运动. 由拉伊尔定理, Q 的极线 q 恒过直线 l 的极点. 于是, 当 Q 沿 l 移动时, q 绕 l 的极点转动. 利用这一事实, 我们可以只用直尺作出给定一点 P 的极线.

5.4.4.0.1 极线的几何构造 给定二次曲线 $\mathcal{C}$ 和外部一点 P.

1. 从点 P 引两条任意的割线, 分别交二次曲线于点 A, B 和 C, D.
2. 连接对角点, 作直线 AD 和 BC, 设它们的交点为 M.
3. 连接另外一组对角点, 作直线 AC 和 BD, 设它们的交点为 N.
4. 连接 M, N 两点. 直线 MN 即为点 P 关于二次曲线 $\mathcal{C}$ 的极线.

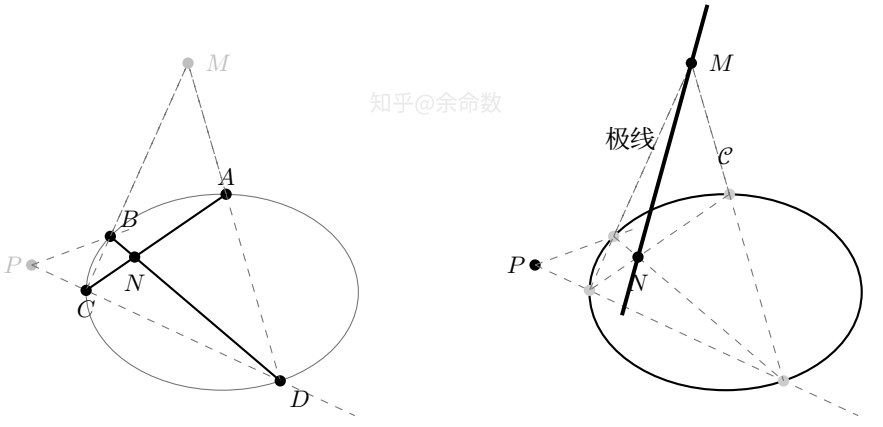
知乎@余命数



(a) 从点 P 引两条割线交 $\mathcal{C}$ 于 A, B 和 C, D **(b)** 连接对角点 AD 和 BC, 交于点 M

图 5.8 极线构造步骤 1-2

知乎@余命数



(a) 连接对角点 AC 和 BD, 交于点 N **(b)** 连接 M, N 得到点 P 关于 $\mathcal{C}$ 的极线

图 5.9 极线构造步骤 3-4

这个构造既给出极线 MN, 也给出一个对偶性很强的三角形 $\triangle PMN$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 5.6 (自极三角形) 一个三角形, 如果它的每一个顶点都是其对边的极点, 则称该三角形为关于该二次曲线的**自极三角形**(或自共轭三角形).

在上述构造中, $\triangle PMN$ 就是一个自极三角形. 我们已作出点 P 的极线 MN. 进一步可以证明, 点 M 的极线是 PN, 点 N 的极线是 PM(这里用到交比的射影不变性).

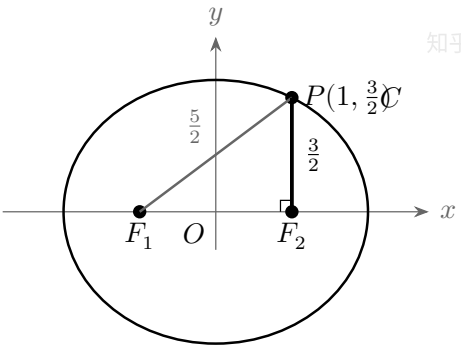
自极三角形把极点与极线的对应关系具体化.

- 取极线 MN 上的任意一点 Q. 由拉伊尔定理, Q 的极线 q 必过 MN 的极点 P. 于是, 点的共线对应着线的共点.
- 再设极线 MN 与二次曲线 $\mathcal{C}$ 交于 E, F. 则 E, F 都在 P 的极线上. 由拉伊尔定理, P 必在 E 的极线和 F 的极线上. 由于 E, F 在 $\mathcal{C}$ 上, 它们在各自处的极线就是切线. 因此 PE 与 PF 是从 P 到 $\mathcal{C}$ 的两条切线, 构成 P 的切点弦.

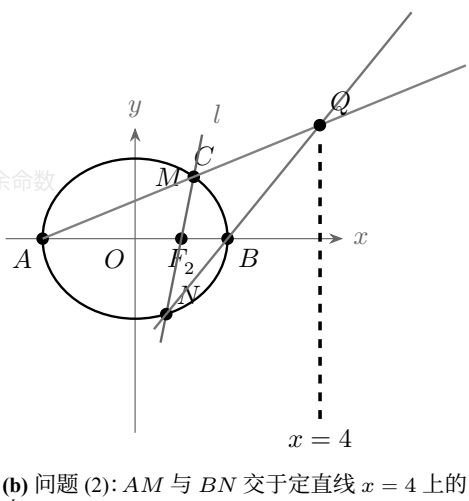
因此, 自极三角形常用于处理与极点、极线、切线相关的几何问题.

例题 5.4 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2, 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在 C 上, 且 $PF_2 \perp F_1F_2$.

1. 求 C 的标准方程.
2. 设 C 的左右顶点分别为 A, B. 直线 l 过右焦点 F_2 且不与坐标轴垂直, l 与 C 交于 M, N 两点. 直线 AM 与直线 BN 相交于点 Q. 证明点 Q 在定直线上.



(a) 问题 (1): 点 P 在椭圆上, $PF_2 \perp F_1F_2$



(b) 问题 (2): AM 与 BN 交于定直线 $x=4$ 上的点 Q

图 5.10　椭圆极点与极线问题示意图

知乎@余命数

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

证明 (1) 椭圆的焦点在 x 轴上, 坐标为 $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. 由 $PF_2 \perp F_1F_2$ 可知点 P 与 F_2 的横坐标相同. 由于 $P(1,\frac{3}{2})$, 可得 $c=1$. 因此 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$. 点 P 到左焦点 F_1 的距离为 $|PF_1| = \sqrt{(1-(-1))^2+(\frac{3}{2}-0)^2} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$. 点 P 到右焦点 F_2 的距离为 $|PF_2| = \frac{3}{2}$. 根据椭圆定义, $2a = |PF_1|+|PF_2| = \frac{5}{2}+\frac{3}{2} = 4$, 所以 $a=2$. 由 $a^2 = b^2+c^2$, 得 $b^2 = a^2-c^2 = 4-1 = 3$. 椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 由题意, 左右顶点分别为 $A(-2,0)$ 与 $B(2,0)$. 设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$、$Q(x_Q,y_Q)$. 直线 l 过右焦点 $F_2(1,0)$, 设其方程为 $y=k(x-1)$. 联立直线与椭圆方程, 得

$$\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Longrightarrow (3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0.$$

x_1, x_2 为此方程的两根, 由韦达定理得

$$x_1+x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$$

由 A, M, Q 三点共线, 斜率相等, 得 $\dfrac{y_Q}{x_Q+2} = \dfrac{y_1}{x_1+2}$ (i). 由 B, N, Q 三点共线, 斜率相等, 得 $\dfrac{y_Q}{x_Q-2} = \dfrac{y_2}{x_2-2}$ (ii).

将 (i) 式与 (ii) 式相除, 得 $\dfrac{x_Q-2}{x_Q+2} = \dfrac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$. 两边平方, 得 $\left(\dfrac{x_Q-2}{x_Q+2}\right)^2 = \dfrac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}$.

因为 M, N 在椭圆上, 故 $y_1^2 = 3(1-\frac{x_1^2}{4}) = \frac{3}{4}(4-x_1^2)$, $y_2^2 = \frac{3}{4}(4-x_2^2)$. 代入上式并化简, 得

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_Q-2}{x_Q+2}\right)^2 &= \frac{\frac{3}{4}(4-x_1^2)(x_2-2)^2}{\frac{3}{4}(4-x_2^2)(x_1+2)^2} = \frac{(2-x_1)(2+x_1)(x_2-2)^2}{(2-x_2)(2+x_2)(x_1+2)^2} \quad (\text{代入 } y_i^2) \\ &= \frac{(2-x_1)(x_2-2)^2}{(2-x_2)(x_1+2)} = \frac{(2-x_1)(-(2-x_2))^2}{(2-x_2)(x_1+2)} = \frac{(2-x_1)(2-x_2)}{(x_1+2)(x_2+2)} \quad (\text{约去公因子}) \\ &= \frac{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}. \end{aligned}$$

将韦达定理的表达式代入, 得

$$\begin{aligned} \text{分子} &= 4-2\left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)+\frac{4k^2-12}{3+4k^2} \\ &= \frac{4(3+4k^2)-16k^2+4k^2-12}{3+4k^2} = \frac{12+16k^2-12k^2-12}{3+4k^2} = \frac{4k^2}{3+4k^2} \end{aligned}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$\begin{aligned}\text{分母} &= 4+2\left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)+\frac{4k^2-12}{3+4k^2}\\ &= \frac{4(3+4k^2)+16k^2+4k^2-12}{3+4k^2}=\frac{12+16k^2+20k^2-12}{3+4k^2}=\frac{36k^2}{3+4k^2}\end{aligned}$$

因此,

$$\left(\frac{x_Q-2}{x_Q+2}\right)^2=\frac{4k^2/(3+4k^2)}{36k^2/(3+4k^2)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

上式来自平方运算, 还需回到未平方的关系确定符号. 由 $y_i=k(x_i-1)$ 得

$$\frac{x_Q-2}{x_Q+2}=\frac{(x_1-1)(x_2-2)}{(x_2-1)(x_1+2)},$$

再由韦达定理算出

$$3(x_1-1)(x_2-2)-(x_2-1)(x_1+2)=2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8=0,$$

故未平方的比值满足

$$\frac{x_Q-2}{x_Q+2}=\frac{1}{3}.$$

由此 $3(x_Q-2)=x_Q+2$, 解得 $x_Q=4$, 即点 Q 在定直线 $x=4$ 上. □

5.5 笛沙格定理与帕普斯定理

第5.1节 引入了射影平面与中心投影. 在射影平面上, 共线与共点这两类性质经投影后保持不变, 射影几何研究的正是这两类性质. 本节给出射影几何的两条基石, 即笛沙格定理与帕普斯定理, 它们只依赖点线的关联关系, 与距离和角度无关.

5.5.1 笛沙格定理

中心投影把一个图形从一个点投射到另一个平面, 投影前后对应点的连线都经过投影中心. 两个三角形若处于这种投影关系, 即对应顶点连线共点, 它们在射影几何中享有特殊地位. 笛沙格定理刻画这种关系的对偶面貌, 即对应顶点连线共点等价于对应边交点共线.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定义 5.7 (透视中心与透视轴) 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是平面上两个三角形. 若三对对应顶点的连线 AA'、BB'、CC' 交于同一点 S, 则称这两个三角形**关于点 S 成透视**, S 称为**透视中心**. 若三对对应边的交点 $P = BC \cap B'C'$、$Q = CA \cap C'A'$、$R = AB \cap A'B'$ 共线, 则称这两个三角形**关于直线 l 成透视**, l 称为**透视轴**.

定理 5.6 (笛沙格定理) 平面上两个三角形关于某点成透视当且仅当它们关于某直线成透视. 即 AA'、BB'、CC' 共点当且仅当 P、Q、R 共线, 其中 $P = BC \cap B'C'$、$Q = CA \cap C'A'$、$R = AB \cap A'B'$.

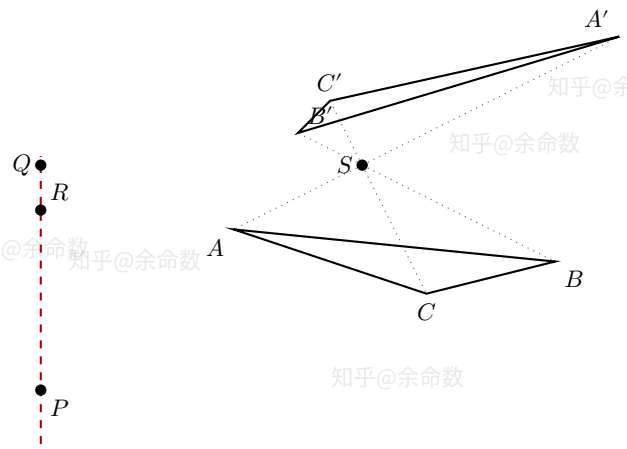


图 5.11 笛沙格定理中的透视中心 S 与透视轴 PQR

证明 仅证充分性(AA'、BB'、CC' 共点 $\Rightarrow$ P、Q、R 共线), 必要性由对偶原理或逆推得到.

设 AA'、BB'、CC' 交于点 S. 在 $\triangle SBC$ 中, B' 在 SB 上, C' 在 SC 上, 且 B'、C'、P 三点共线 ($P = BC \cap B'C'$). 对 $\triangle SBC$ 用截线 $B'C'P$, 由 Menelaus 定理得

$$\frac{SB'}{B'B} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CC'}{C'S} = -1.$$

同理, 对 $\triangle SCA$ 与截线 $C'A'Q$ 得 Q 满足的 Menelaus 关系, 对 $\triangle SAB$ 与截线 $A'B'R$ 得 R 满足的 Menelaus 关系. 三式相乘, 从 S 出发的三组分比两两相消, 得

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1,$$

由 Menelaus 定理的逆定理, P、Q、R 三点共线. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

上述证明在平面内用 Menelaus 定理完成. 笛沙格定理还有一种空间证法, 把两个透视三角形从平面提升到三维, 使对应顶点连线在空间中真正相交于透视中心, 则两个三角形分别落在两个不同的平面上, 而两平面的交线是透视轴, 三对对应边的交点自然落在这条交线上. 笛沙格定理在平面上成立, 根源在于它在三维空间中先成立. 这个空间论证也给出逆定理, 若三对对应边交点共线, 在空间中可构造出使对应顶点连线共点的两个三角形, 再投影回平面即得.

注 5.1
笛沙格定理在射影平面上是自对偶的, 将“点”与“直线”互换, “共点”与“共线”互换, 定理的形式不变. 它是射影几何中少数可以用纯射影方法(不依赖度量)证明的构形定理, 也是建立射影坐标系的逻辑基础.

笛沙格定理处理两个三角形的透视关系, 构形涉及十个点与十条线. 把目光从三角形转向更简单的构形, 即在两条直线上各取三点, 便得到帕普斯定理. 它的假设更少, 结论同样是一条共线关系, 却与笛沙格定理不同, 帕普斯定理无法从笛沙格定理推出, 两条定理在射影几何的公理体系中相互独立.

知乎@余命数

5.5.2 帕普斯定理

定理 5.7 (帕普斯定理) 设 A、B、C 是直线 l_1 上三点, A'、B'、C' 是直线 l_2 上三点(六点互异, 且 $l_1 \neq l_2$). 记

$$P = BC' \cap B'C, \quad Q = CA' \cap C'A, \quad R = AB' \cap A'B$$

则 P、Q、R 三点共线.

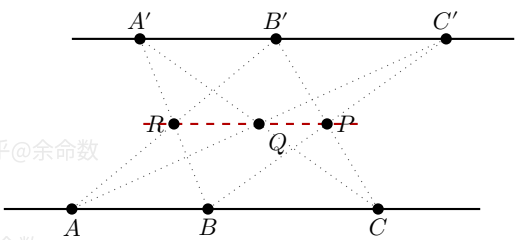


图 5.12　帕普斯定理, 两条直线上各取三点, 交叉连线交点共线

证明 设 l_1 与 l_2 交于点 O(若平行, 取 O 为无穷远点, 以下论证取极限即得). 在 l_1 上取射影坐标使 $O=(0)$、$A=(a)$、$B=(b)$、$C=(c)$; 在 l_2 上取射影坐标使 $O=(0)$、$A'=(a')$、$B'=(b')$、$C'=(c')$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

直线 AB' 的方程由 $A=(a,0)$ 与 $B'=(0,b')$ 给出,其上点可表为 $(ta,(1-t)b')$. 直线 $A'B$ 由 $A'=(0,a')$ 与 $B=(b,0)$ 给出,其上点表为 $(sb,(1-s)a')$. 二者交点 R 满足 $ta=sb$ 且 $(1-t)b'=(1-s)a'$,解得

$$R=\left(\frac{ab(a'-b')}{aa'-bb'},\frac{a'b'(a-b)}{aa'-bb'}\right)$$

同理

$$P=\left(\frac{bc(b'-c')}{bb'-cc'},\frac{b'c'(b-c)}{bb'-cc'}\right),\quad Q=\left(\frac{ca(c'-a')}{cc'-aa'},\frac{c'a'(c-a)}{cc'-aa'}\right)$$

验证 P、Q、R 共线等价于行列式

$$\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1\\ x_Q & y_Q & 1\\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}=0$$

代入并化简,行列式的值为零,故 P、Q、R 共线. □

注 5.2
帕普斯定理是射影几何中最古老的构形定理,早于笛沙格定理近两千年. 它不涉及任何度量概念(长度、角度、平行),仅依赖点线的关联关系,是射影几何公理体系的出发点之一. 在射影平面上,帕普斯定理等价于坐标乘法的交换律,帕普斯定理成立的射影平面,其坐标环必为交换环.

帕普斯定理中六点分布在两条直线上. 若把两条直线换成一条二次曲线,让六点落在同一条圆锥曲线上,对应的三组对边交点仍然共线,这就是帕斯卡定理. 帕普斯定理是帕斯卡定理在二次曲线退化为两条直线时的特例,也是射影几何从直线构形走向曲线构形的第一步.

例题 5.5 (帕普斯定理的平行情形) 两直线 l_1、l_2 上分别取三个不同点 A、B、C 与 A'、B'、C'. 若 $AB'\parallel A'B$ 且 $AC'\parallel A'C$,证明 $BC'\parallel B'C$.

解 记 $X=AB'\cap A'B$、$Y=AC'\cap A'C$、$Z=BC'\cap B'C$. 由帕普斯定理 定理 5.7,X、Y、Z 三点共线. 前两个条件说明 X 与 Y 都是无穷远点,故这条线就是无穷远直线,Z 也在其上,即 $BC'\parallel B'C$.

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

知乎@余命数

5.6 帕斯卡与布里昂桑

第5.5节 末尾说到, 把帕普斯定理里的两条直线换成一条圆锥曲线, 结论依然成立. 这件事实叫帕斯卡定理, 1640 年, 十六岁的帕斯卡把它写进短文《圆锥曲线论》, 后人把它唤作“神秘六边形”定理. 我们先把圆上的情形证出来, 再借助第5.1节 的中心投影推广到任意圆锥曲线.

5.6.1 圆上的帕斯卡定理

定理 5.8 (帕斯卡定理) 六边形 123456 内接于一条圆锥曲线,三组对边的交点

$$X = 12 \cap 45, \qquad Y = 23 \cap 56, \qquad Z = 34 \cap 61$$

共线, 这条线称为**帕斯卡线**.

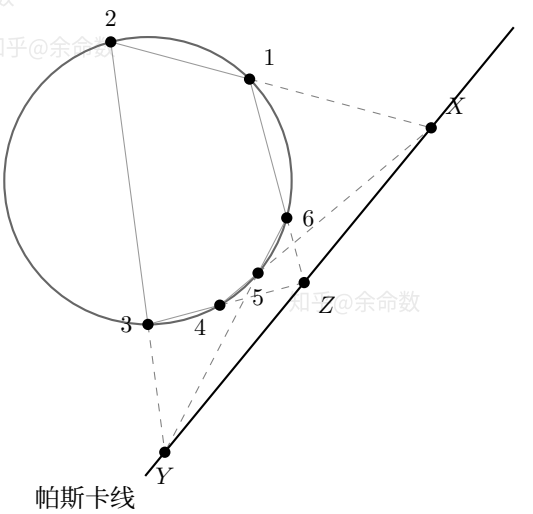


图 5.13　单位圆上的神秘六边形, 对边交点 X、Y、Z 落在同一条帕斯卡线上.

证明　先设曲线是圆, 且三组对边互不平行, 交点都是有限点. 记三条相间的边 $a = 12$、$b = 34$、$c = 56$, 它们两两相交成三角形, 顶点记作

$$U = b \cap c, \qquad V = c \cap a, \qquad W = a \cap b,$$

则 $\triangle UVW$ 的三条边依次是 a, 即 VW、b, 即 WU、c, 即 UV, 而六边形的顶点 $1, 2$ 在边 a 上, $3, 4$ 在边 b 上, $5, 6$ 在边 c 上. 剩下的三条边 23、45、61 各截这个三角形一次. 对 $\triangle UVW$ 用截线 23, 它交 VW 于 2、WU 于 3、UV 于 Y, 由 Menelaus 定理

$$\frac{V2}{2W} \cdot \frac{W3}{3U} \cdot \frac{UY}{YV} = -1.$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

同理, 截线 45 与截线 61 给出

$$\frac{W4}{4U}\cdot\frac{U5}{5V}\cdot\frac{VX}{XW}=-1,\qquad \frac{U6}{6V}\cdot\frac{V1}{1W}\cdot\frac{WZ}{ZU}=-1.$$

三式相乘, 并按顶点归并,

$$\frac{V1\cdot V2}{W1\cdot W2}\cdot\frac{W3\cdot W4}{U3\cdot U4}\cdot\frac{U5\cdot U6}{V5\cdot V6}\cdot\frac{UY}{YV}\cdot\frac{VX}{XW}\cdot\frac{WZ}{ZU}=-1.$$

前三个括号用圆幂定理 (定理 3.38) 消去.W 的两条割线分别穿过 $1,2$ 与 $3,4$, 故 $W1\cdot W2=W3\cdot W4$; 同理 $U3\cdot U4=U5\cdot U6$, $V5\cdot V6=V1\cdot V2$. 于是

$$\frac{V1\cdot V2}{W1\cdot W2}\cdot\frac{W3\cdot W4}{U3\cdot U4}\cdot\frac{U5\cdot U6}{V5\cdot V6}=\frac{V1\cdot V2}{W1\cdot W2}\cdot\frac{W1\cdot W2}{U3\cdot U4}\cdot\frac{U3\cdot U4}{V1\cdot V2}=1,$$

剩下

$$\frac{UY}{YV}\cdot\frac{VX}{XW}\cdot\frac{WZ}{ZU}=-1,$$

由 Menelaus 定理的逆定理, 落在 $\triangle UVW$ 三边所在直线上的 Y、X、Z 三点共线. 对边出现平行的情形, 相应交点落到无穷远, 论证沿 第5.5节 处理帕普斯定理的同一取极限思路完成.

曲线是任意圆锥曲线时, 取 第5.1节 的中心投影把它的一个圆原型投成它. 投影保持共线性与共点性, 帕斯卡线原封不动地投成帕斯卡线. □

帕斯卡定理与帕普斯定理的关系也随之清楚了. 一对相交直线是退化的二次曲线, 让椭圆沿长轴方向压扁、最终裂成两条线段, 六个顶点分居两线, 帕斯卡构形恰好化作帕普斯构形. 第5.5节 里那条与笛沙格定理彼此独立的公理, 在更大的图景里是帕斯卡定理的退化特例.

5.6.2 退化, 相邻顶点重合

帕斯卡定理最漂亮的部分藏在退化情形里. 让相邻两个顶点彼此靠近、最后重合, 连接它们的边在极限处变成该点处的**切线**, 于是六边形塌缩成五边形、四边形, 定理仍然有效, 只是对边中出现了切线.

例题 5.6 (退化帕斯卡的手算验证) 单位圆上取四点 $A(1,0)$、$B\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$、$C(-1,0)$、$D\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$, 考虑六边形 A,A,B,C,D,D, 两侧的边 AA 与 DD 都换成切线. 验证三组对边交点共线.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

解 单位圆在 (x_0,y_0) 处的切线是 $xx_0+yy_0=1$, 故 A 处切线为 $x=1$, D 处切线为 $3x-4y=5$. 逐一求交点.CD 过 $C(-1,0)$ 与 $D\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$, 斜率 $-\frac{1}{2}$, 方程 $y=-\frac{x+1}{2}$, 与 $x=1$ 交于

$$X=(1,-1).$$

AB 的斜率是 $\frac{3/5-0}{4/5-1}=-3$, 方程 $y=-3x+3$, 与 $3x-4y=5$ 联立得 $-12x+12=3x-5$, 解出 $x=\frac{17}{15}$,

$$Y=\left(\frac{17}{15},-\frac{2}{5}\right).$$

DA 的斜率是 2, 方程 $y=2(x-1)$; BC 的斜率是 $\frac{1}{3}$, 方程 $y=\frac{x+1}{3}$, 联立解出 $x=\frac{7}{5}$,

$$Z=\left(\frac{7}{5},\frac{4}{5}\right).$$

核对共线, 直线 XY 的斜率是 $\frac{-\frac{2}{5}+1}{\frac{17}{15}-1}=\frac{3/5}{2/15}=\frac{9}{2}$, 直线 XZ 的斜率是 $\frac{\frac{4}{5}+1}{\frac{7}{5}-1}=\frac{9/5}{2/5}=\frac{9}{2}$, 两者相同, 三点确实共线.

四点构形再退化下去, 就回到 第5.4节 的自极三角形. 内接四点形的三个对角点构成自极三角形, 每个对角点的极线恰是另两个对角点的连线, 其根据正是带切线的退化帕斯卡. 那里用调和作图搭起的极线理论, 在这里与锥线上的六点构形会师.

5.6.3 逆定理与直尺作图

帕斯卡定理可以反过来用, 它给出六点落在一条锥线上的一种判别法.

> **引理 5.1 (五点定锥线)** 一般位置(无三点共线)的五个点恰好在一条圆锥曲线上.

证明 二次曲线的方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 有六个系数, 全体乘同一个非零常数不改变曲线, 实际自由度是五. 每让曲线过一个点, 系数就多满足一个线性方程. 五个点给出五个齐次线性方程、六个未知数, 必有非零解; 一般位置保证这组解给出的二次曲线不退化成直线对或单点. □

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

定理 5.9 (帕斯卡逆定理) 六个点 $1,\dots,6$ 中无三点共线，且 $X=12\cap 45$、$Y=23\cap 56$、$Z=34\cap 61$ 三点共线，则这六点落在同一条圆锥曲线上.

证明 由 引理 5.1，过前五点有唯一的锥线 α. 直线 $5Y$ 与 α 除 5 外还交于一点，记作 6^*. 对 α 上的六边形 $1,2,3,4,5,6^*$ 用帕斯卡定理，其第一组对边交点仍是 $12\cap 45=X$；第二组是 $23\cap 56^*$，由于 6^* 在直线 $5Y$ 上，这个交点正是 Y. 于是帕斯卡线是 XY，第三组对边交点 $34\cap 6^*1$ 也落在直线 XY 上. 另一方面 $Z=34\cap 61$ 落在直线 34 与直线 XY 上，一般位置下两线只交于一点，故 $34\cap 6^*1=Z$，即 6^* 在直线 16 上.6 与 6^* 同在直线 $5Y$ 与直线 16 上，两线不重合，只能 $6^*=6$，六点共锥线. □

知乎@余命数

例题 5.7 (用直尺作锥线上的第六点) 锥线上给定五个点，只用直尺作出曲线上更多的点.

解 记给定点为 $1,2,3,4,5$，它们定出唯一的锥线. 作 $X=12\cap 45$，过 X 任画一条直线 l(避开五个给定点)，记 $B=l\cap 23$、$C=l\cap 34$，再连 $B5$ 与 $C1$，交点记作 6. 六边形 $1,2,3,4,5,6$ 的三组对边交点分别是 X、B、C，三点都在 l 上，由 定理 5.9，6 在锥线上. 移动直线 l，每换一条过 X 的直线就得到曲线上一个新点，全程只用直尺.

5.6.4 布里昂桑，对偶的定理

把 第5.3节 的极点极线字典逐字翻译帕斯卡构形，会得到一条新定理. 字典里最要紧的是三句话，锥线上一点处的极线，是锥线在该点的切线；两点连线的极点，是各自极线的交点；一组共线点的极线，全部经过这条线的极点. 顺着字典，内接六边形翻译成外切六边形，“对边交点共线”翻译成“对角线共点”.

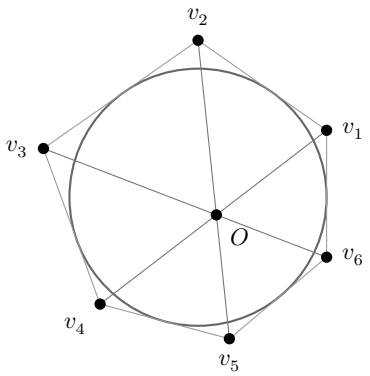
知乎@余命数 知乎@

定理 5.10 (布里昂桑定理) 六边形外切于一条圆锥曲线，三条对角线(相对顶点的连线)共点.

证明 设外切六边形六条边依次切锥线 α 于点 $1,\dots,6$. 内接六边形 123456 的对边交点 $X=12\cap 45$ 对应过去，X 的极线是连线 (边 12处切线 $\cap$ 边 45处切线)，而这两条切线正是外切六边形的两条对边，它们的交点是一对相对顶点，所以 X 的极线就是外切六边形的一条对角线. 同理 Y、Z 的极线是另外两条对角线. 帕斯卡定理说 X、Y、Z 共线，共线点的极线共点，三条对角线便交于一点. □

布里昂桑 1806 年发表这条定理时，用的正是刚刚成形的对偶原理，它是极点极线理论最早的成功应用. 让外切六边形退化，把六条边两两重合成三角形的三

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵



知乎@余命数

图 5.14 圆的外切六边形, 三条对角线交于同一点 O.

边, 重合处的顶点塌缩成切点, 就得到一个漂亮的特例. 三角形外切于锥线时, 每个顶点与对边切点的连线三线共点, 对内切圆的情形这正是三角形的 Gergonne 点.

练习 5.1　圆内接六边形 $ABCDEF$ 中, $AB \parallel DE$ 且 $BC \parallel EF$, 证明 $CD \parallel FA$.

知乎@余命数

练习 5.2　三角形 ABC 外切于锥线 α, 三边上的切点依次为 X、Y、Z, 其中 X 在 BC 上、Y 在 CA 上、Z 在 AB 上. 用退化布里昂桑定理证明 AX、BY、CZ 共点, 再用 Ceva 定理复核一遍.

练习 5.3　锥线上给定四个点 $1, 2, 3, 4$ 与另一点 P, 只用直尺作 P 处的切线.

知乎@余命数
知乎@余
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数

习题解答

第 2 章解三角形

2.1. **解** 中线 CD 把 $\triangle ABC$ 分成 $\triangle ADC$ 与 $\triangle BDC$. 它们共享边 CD, 且 $\angle ADC$ 与 $\angle BDC$ 互补. 我们对这两个三角形分别用余弦定理, 消去未知角, 建立关于边长的方程.

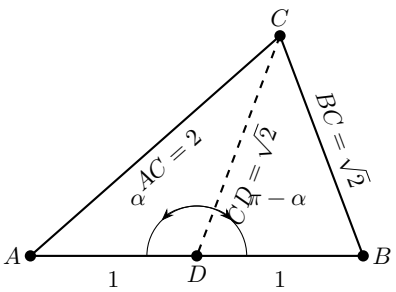


图 5.15 第一问

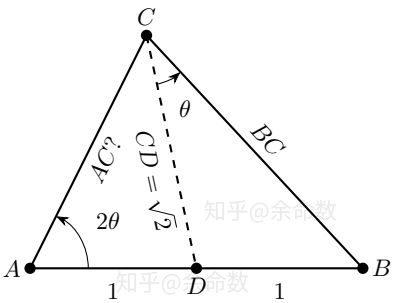


图 5.16 第二问

对于第 (1) 问.

我们利用 $\cos\angle ADC = -\cos\angle BDC$ 对两个小三角形分别使用余弦定理, 消去未知角.

设 $\angle ADC = \alpha$, 则 $\angle BDC = \pi - \alpha$.

在 $\triangle ADC$ 中, D 是 AB 中点, 故 $AD = 1$. 应用余弦定理

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2(AD)(CD)\cos\alpha$$

$$AC^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1)(\sqrt{2})\cos\alpha = 3 - 2\sqrt{2}\cos\alpha$$

在 $\triangle BDC$ 中, $BD = 1$, $BC = \sqrt{2}$. 应用余弦定理

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2(BD)(CD)\cos(\pi - \alpha)$$

$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1)(\sqrt{2})(-\cos\alpha)$$

$$2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2}\cos\alpha$$

从 $\triangle BDC$ 的方程中, 可解出 $\cos\alpha$:

$$2 = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha \implies 2\sqrt{2}\cos\alpha = -1 \implies \cos\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

将 $\cos\alpha$ 的值代回 $\triangle ADC$ 的方程中, 求解 AC:

$$AC^2 = 3 - 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 3 + \frac{4}{4} = 4$$

所以, $AC = 2$.

对于第 (2) 问.

本问的条件跨越两个三角形. 除余弦定理外, 我们用正弦定理建立角与边的关系, 得到求解 AC 与 BC 所需的两个方程.

先用余弦定理建立边之间的关系.

这一步与第 (1) 问相同, 得到关于边长的普适方程. 在 $\triangle ADC$ 中,

$$\cos\angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2(AD)(CD)} = \frac{1 + 2 - AC^2}{2\sqrt{2}} = \frac{3 - AC^2}{2\sqrt{2}}.$$

在 $\triangle BDC$ 中,

$$\cos\angle BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2(BD)(CD)} = \frac{1 + 2 - BC^2}{2\sqrt{2}} = \frac{3 - BC^2}{2\sqrt{2}}.$$

因为 $\cos\angle ADC = -\cos\angle BDC$, 所以:

$$\frac{3 - AC^2}{2\sqrt{2}} = -\frac{3 - BC^2}{2\sqrt{2}}$$

整理得 $3 - AC^2 = -3 + BC^2$, 即第一个方程:

$$AC^2 + BC^2 = 6 \quad \cdots\cdots (1)$$

再建立角与边的关系.

设 $\angle BCD = \theta$, 则由题意 $\angle A = 2\theta$. 需在不同的三角形中应用正弦定理, 借公共角或等角传递比例关系.

在 $\triangle BCD$ 中, 对 $\angle B$ 和 $\angle BCD$ 应用正弦定理:

$$\frac{CD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin\theta} \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin B} = \frac{1}{\sin\theta} \Longrightarrow \sin B = \sqrt{2}\sin\theta$$

在 $\triangle ABC$ 中, 对 $\angle A$ 和 $\angle B$ 应用正弦定理:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Longrightarrow BC\sin B = AC\sin A$$

将已得的关系 $\sin B = \sqrt{2}\sin\theta$ 和 $A = 2\theta$ 代入上式, 得

$$BC(\sqrt{2}\sin\theta) = AC\sin(2\theta)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

利用二倍角公式 $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$:

$$\sqrt{2}BC\sin\theta = 2AC\sin\theta\cos\theta$$

由于 θ 是三角形内角的一部分, $\sin\theta \neq 0$, 可约去 $\sqrt{2}\sin\theta$, 得到第二个方程:

$$BC = \sqrt{2}AC\cos\theta \quad \cdots\cdots(2)$$

联立求解, 消去未知角 θ.

此时方程组仍含三个未知数 AC, BC, θ. 我们消去 θ. 回到 $\triangle BCD$, 对角 θ 应用余弦定理, 用边长表示 $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2(BC)(CD)} = \frac{BC^2 + 2 - 1}{2(BC)\sqrt{2}} = \frac{BC^2 + 1}{2\sqrt{2}BC}$$

将这个 $\cos\theta$ 的表达式代入方程 (2) 中:

$$BC = \sqrt{2}AC\left(\frac{BC^2 + 1}{2\sqrt{2}BC}\right)$$

化简得

$$2BC^2 = AC(BC^2 + 1) \quad \cdots\cdots(3)$$

解这个代数方程组.

接着已有两个只含 AC 和 BC 的方程,联立 (1) 和 (3) 求解. 设 $x = AC, y = BC$. 方程组为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ 2y^2 = x(y^2 + 1) \end{cases}$$

由第二式得 $x = \frac{2y^2}{y^2+1}$. 代入第一式:

$$\left(\frac{2y^2}{y^2 + 1}\right)^2 + y^2 = 6$$

$$\frac{4y^4}{(y^2 + 1)^2} + y^2 = 6$$

令 $u = y^2$. 则 $\frac{4u^2}{(u+1)^2} + u = 6$.

$$4u^2 + u(u + 1)^2 = 6(u + 1)^2$$

$$4u^2 + u(u^2 + 2u + 1) = 6(u^2 + 2u + 1)$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

$$4u^2+u^3+2u^2+u=6u^2+12u+6$$

$$u^3-11u-6=0$$

通过试根法,可见 $u=-3$ 是一个根,故 $(u+3)$ 是一个因式. $(u+3)(u^2-3u-2)=0$. 由于 $u=y^2$ 必须为正,$u=-3$ 舍去. 解 $u^2-3u-2=0$ 得 $u=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-2)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. 由于 $u>0$,故 $u=y^2=BC^2=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

最后,代入方程 (1) 求 AC^2:

$$AC^2=6-BC^2=6-\frac{3+\sqrt{17}}{2}=\frac{12-3-\sqrt{17}}{2}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

所以

$$AC=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}=\frac{\sqrt{18-2\sqrt{17}}}{2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{17}-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

(1) $AC=2$.(2) $AC=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

2.2. **解** 条件 $\angle CAD=\angle B$ 跨越两个三角形,提示我们寻找相似三角形. 一旦发现相似,边长关系便可直接由比例得到.

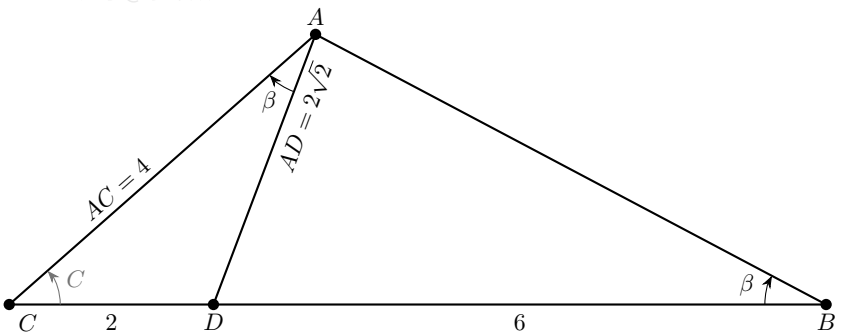


图 5.17 根据第 (2) 问数据按比例精确绘制的图示

对于第 (1) 问.

考察 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$.

- $\angle CAD=\angle B$(已知条件)
- $\angle ACD=\angle BCA$(公共角)

根据 AA 相似判定定理,$\triangle BAC\sim\triangle ADC$.

由相似三角形的性质,对应边成比例.

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}=\frac{BA}{AD}$$

知乎关注@余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

取前两项, 交叉相乘即得

$$AC^2 = BC \cdot CD$$

知乎@余命数

对于第 (2) 问.

求 $\triangle ABD$ 的面积, 可用 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADC}$ 或 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{CD}$. 两种方法都需要先求 $\triangle ADC$ 的元素与 BD.

首先, 在 $\triangle ADC$ 中, 已知两边 AD, CD 和一角 $\cos C$. 可用余弦定理求出边 AC.

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2(AC)(CD)\cos C$$

代入已知值 $AD = 2\sqrt{2}, CD = 2, \cos C = \frac{3}{4}$:

$$(2\sqrt{2})^2 = AC^2 + 2^2 - 2(AC)(2)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$8 = AC^2 + 4 - 3AC$$

整理得一个关于 AC 的一元二次方程:

知乎@余命数

$$AC^2 - 3AC - 4 = 0$$

知乎@余命数

因式分解得 $(AC-4)(AC+1) = 0$. 由于 AC 为边长, 必为正数, 故 $AC = 4$.

接下来, 利用第 (1) 问的结论求出 BC:

$$BC = \frac{AC^2}{CD} = \frac{4^2}{2} = 8$$

知乎@余命数

从而可以求出 BD 的长度:

$$BD = BC - CD = 8 - 2 = 6$$

接着用面积比来求解. 首先计算 $\triangle ADC$ 的面积. 已知 $\cos C = \frac{3}{4}$, 且 $C \in (0, \pi)$, 故 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

知乎@余命数

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot CD \sin C = \frac{1}{2}(4)(2)\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \sqrt{7}$$

由于 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 共用从顶点 A 出发的高线, 它们的面积之比等于底边之比:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{CD} = \frac{6}{2} = 3$$

所以

$$S_{\triangle ABD} = 3 \cdot S_{\triangle ADC} = 3\sqrt{7}$$

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

(1) 证明见上.(2) $\triangle ABD$ 的面积为 $3\sqrt{7}$.

第 3 章解析几何

3.1. **解** $a=3, b=4, c=5$. 切线 $\dfrac{5x}{9}-\dfrac{y}{3}=1$，化为 $5x-3y-9=0$，法向量 $\vec{n}=(5,-3)$. 两焦半径 $|PF_1|=\dfrac{25}{3}+3=\dfrac{34}{3}$，$|PF_2|=\dfrac{25}{3}-3=\dfrac{16}{3}$. 算数量积，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_1}=5\cdot(-10)-3\cdot\left(-\dfrac{16}{3}\right)=-34$，除以 $|PF_1|=\dfrac{34}{3}$ 得 -3；$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_2}=5\cdot 0-3\cdot\left(-\dfrac{16}{3}\right)=16$，除以 $|PF_2|=\dfrac{16}{3}$ 得 3. 两个夹角余弦大小相等，切线与两焦半径成等角，且平分的是外角.

3.2. **解** 设它们交于 P，共同焦点为 F_1, F_2. 椭圆在 P 处的切线是 $\angle F_1PF_2$ 的内角平分线，双曲线在 P 处的切线是外角平分线(第3.3节 与 定理 3.43)，而同一顶角的内、外角平分线互相垂直，故两条切线垂直. 设两条焦半径的方向角为 0° 与 θ，内角平分线方向 $\theta/2$，外角平分线方向 $\theta/2+90^\circ$，两者总是差 90°.

3.3. **解** 过轴的截面是抛物线，顶点为原点、轴向为 x 轴时，口径边缘的点为 $(0.1, 0.6)$，代入 $y^2=2px$ 得 $0.36=0.2p$，$p=1.8$. 灯丝放在焦点，距顶点 $\dfrac{p}{2}=0.9$ m.

3.4. **解** 例题已算出 $|AF|=\dfrac{6}{5}$，$|BF|=2$，于是 $\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{2a}{b^2}$，与定理一致，$|AB|=\dfrac{16}{5}$. 也可以不走例题，直接对 $r(\theta)=\dfrac{3/2}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$ 取 $\theta=60^\circ$ 与 240° 相加.

3.5. **解** 渐近线斜率 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，弦的斜率 1 比渐近线更陡，与右支交出两个点，两端在同一支上，调和式适用，直接得

$$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2a}{b^2}=\frac{4}{3}.$$

若对同一支的判断不放心，可解直线 $y=x-\sqrt{7}$ 与双曲线的联立，两个交点的横坐标均为正，确在右支上.

3.6. **解** 由 $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{2}{p}=1$ 得 $\dfrac{1}{|BF|}=\dfrac{3}{4}$，$|BF|=\dfrac{4}{3}$. 设 A 在倾斜角 θ 方向，$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}=4$ 给 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\theta=60^\circ$. 此时 A 的参数 $t_1=\sqrt{3}$(由 $\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$)，$t_2=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，切线交点由 定理 3.46 落在准线上，坐标 $T\left(-1,\ \dfrac{p(t_1+t_2)}{2}\right)=\left(-1,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

知乎关注 @ 余命数谢谢喵,有帮助的话去爱发电支持一下谢谢喵

第 5 章射影几何

知乎@余命数

5.1. **解** 记 $X=AB\cap DE$、$Y=BC\cap EF$、$Z=CD\cap FA$. 前两对平行使 X、Y 都是无穷远点, 帕斯卡线 (定理 5.8) 只能是无穷远直线, 于是 Z 也在无穷远直线上, 即 $CD\parallel FA$. 这与 第5.5节 末尾帕普斯定理的平行情形如出一辙.

5.2. **解** 把六边形的边依次取成 AB, AB, BC, BC, CA, CA, 相邻两边重合处, 顶点塌缩成切点, 六个顶点依次为 Z, B, X, C, Y, A. 布里昂桑定理给出三条对角线 ZC、BY、XA 共点, 即 AX、BY、CZ 共点.Ceva 复核时注意从每个顶点引出的两条切线等长, $AZ=AY$、$BZ=BX$、$CX=CY$, 于是

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{BZ}{CY}\cdot\frac{CY}{AZ}\cdot\frac{AZ}{BZ}=1,$$

乘积为一, 三线共点.

5.3. **解** 把 P 视作六边形相邻两顶点的重合, 切线是退化的那条边. 取六边形 $P, P, 1, 2, 3, 4$, 对边交点依次为 $X=$ 切线 $_P\cap 23$、$Y=P1\cap 34$、$Z=12\cap 4P$, 三者共线. 于是先作 $Y=P1\cap 34$ 与 $Z=12\cap 4P$, 连 YZ 交直线 23 于 X, 连 PX 即为切线, 依据是退化帕斯卡.

知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
知乎@余命数
余命数

PROJECT AKARI

AKARI

内容简介

《中学数学之旅》把初等数学当作一个完整的体系，从初中运算的起点一路讲到大学数学的门口. 全书五卷按数学自身的生长顺序编排，从代数语言与函数出发，经周期、离散与随机，走过几何主干，拧成极限、导数与积分的分析主干，最后扩到复数、空间与线性结构. 每条结论尽量给出推导；高考与竞赛的主干题材全部覆盖，取舍只看一条，它在数学结构里是否承重.

无论你是准备升学的学生、带学生的老师，还是想把数学重新学一遍的人，这本书都用得上.

本系列分卷

第 1 卷：预备知识、集合与映射、函数、函数方程、不等式
第 2 卷：三角函数、数列、统计、计数原理、概率
第 3 卷：平面向量、解三角形、解析几何、极坐标与参数方程、射影几何
第 4 卷：极限与导数、简单的积分、微分方程初步、数学思想浅谈
第 5 卷：复数、立体几何、矩阵与行列式、连分数、常数 e、π 与 γ、无穷乘积

公开版 • 10 月 7 日

Project Akari